مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۱، ص ۱–۲۱

برآوردگرهای بیزی مقید تحت توابع زیان متعادل

احمد پارسیان، شهرام عزیزی سازی

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۴/۱۶ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۷/۱۵

چکیده : در این مقاله رده جدیدی از برآوردگرها، تحت عنوان برآوردگرهای بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل و متعادل موزون را بررسی می‌کنیم. همچنین برآوردگرهای بیزی مقید پارامتر طبیعی خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری را محاسبه می‌کنیم. یک روش عمومی در تحلیل بیزی زمانی که عدم حتمیت در انتخاب توزیع پیشین وجود دارد، انتخاب یک کلاس از توزیع‌های پیشین و دستیابی به تصمیم بهینه در داخل این کلاس است، که به روش بیزی نیرومند معروف است. در این راستا، برآوردگر تاسف پسین مقید گاما–مینیمکس را تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا بدست می‌آوریم و با استفاده از «راه حل بیزی» آنرا به توابع زیان متعادل تعمیم می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی : برآوردگر بیزی مقید، برآوردگر تاسف پسین مقید گاما–مینیماکس، توابع زیان متعادل و متعادل موزون، خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احمد پارسیان، ahmad_p@khayam.ut.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲C۱۰، ۶۲F۳۰ و ۶۲F۳۵

۱ مقدمه

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)$، که در آن هر یک از X_iها متوسط n نمونه تصادفی و از خانواده توزیع‌های $\mathcal{F}_{\theta_i} = \{f(x|\theta_i) : \theta_i \in \Theta\}$ است و $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ پارامترهای متناظر با میانگین متغیرهای تصادفی $\boldsymbol{X}$ و $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{X}) = (t_1(\boldsymbol{X}), \cdots, t_m(\boldsymbol{X}))$ کلاسی از برآوردگرهای دلخواه این پارامترها باشد. در برآورد بیزی پارامتر $\boldsymbol{\theta}$، تحت تابع زیان معین نظیر تابع زیان مجموع مربعات خطا، مسئله به صورت مولفه به مولفه حل می‌شود در صورتیکه در بسیاری موارد علاقمندیم که تابع توزیع تجربی برآوردها به تابع توزیع تجربی پسین پارامترها نزدیک باشد. در این مقاله، به بررسی رده جدیدی از برآوردگرهای پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ می‌پردازیم که نوعی سازگاری بین دو گشتاور اول از هیستوگرام برآوردها با گشتاورهای متناظر با هیستوگرام توزیع پسین پارامترها ایجاد می‌کنند. یک امتیاز مهم این نوع برآوردها یا پیش‌بینی‌های همزمان، شناسایی نواحی از پیش تعیین شده است که عموماً بهتر از برآورد بیزی یا پیش‌بینی بیزی عمل می‌کنند. به عبارت دیگر، هدف نه تنها برآورد پارامتر مولفه‌های مختلف بلکه شناسایی پارامترهای مولفه‌هایی است که از نقطه خاصی بالاتر و یا از نقطه مرزی پائین‌تر هستند. لویس (۱۹۸۴) در چهارچوب مدل نرمال، با تعدیل کردن برآوردگر بیزی پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا، برآوردگر بیزی تعدیل شده را محاسبه کرد. سپس گوش (۱۹۹۲) این برآوردگر را در چهارچوبی کلی‌تر و تحت فرض ضعیف‌تری محاسبه و آن را برآوردگر بیزی مقید[۱] نامید. فری و کرسی (۲۰۰۳) برآوردگر مذکور را تحت تابع زیان مجموع مربعات خطای موزون محاسبه کردند. گوش و همکاران (۲۰۰۷) با به کارگیری روش لاگرانژ برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل را بدست آوردند. متاسفانه، با استفاده از روش لاگرانژ محاسبه این برآوردگر تحت تابع زیان متعادل موزون امکان پذیر نیست و ما در این مقاله از «راه حل بیزی»، که ابزاری قوی برای محاسبه برآوردگرهای بیزی و بیزی مقید تحت توابع زیان متعادل و متعادل موزون است، استفاده می‌کنیم. در بسیاری از موارد که بین دو یا چند نفر در مورد

---

۱ Constrained Bayes

توزیع پیشین اختلاف وجود دارد یا در مورد توزیع پیشین با هم تفاهم دارند اما نسبت به ابرپارامتر(های) آن تفاهم ندارند، اطلاعات ما در مورد توزیع پیشین کافی نیست و کلاسی از این توزیع‌ها را در اختیار داریم. در این صورت، مجموعه‌ای از برآوردگرهای بیزی به روی کلاس Γ حاصل می‌شود. در چهارچوب روش‌های بیزی نیرومند، یکی از روش‌های متداول در دستیابی به برآوردگر بهینه به روی کلاس Γ برآوردگر تاسف پسین[۲] مقید است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه زن و داس گوپتا (۱۹۹۳)، اینسوا و همکاران (۱۹۹۵) و جعفری و همکاران (۲۰۰۸) را ببینید. با توجه به اینکه برآوردگرهای بیزی در قیدهای لویس صدق نمی‌کنند، بنابراین برآوردگری که علاوه بر خصوصیات فوق در قیدهای لویس صدق کند مطلوب است که از آن تحت عنوان برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس[۳] یاد می‌کنیم و آن را تحت توابع زیان مجموع مربعات خطا و متعادل بررسی می‌کنیم.

«راه حل بیزی» ارائه شده توسط جعفری و همکاران (۲۰۰۶) را در بخش ۲ بیان می‌کنیم. همچنین در این بخش، آنچه که در بخش‌های آتی به منظور دستیابی به برآوردگر بیزی مقید مورد نیاز است، معرفی می‌کنیم. در پایان این بخش، خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری را معرفی و طریقه محاسبه میانگین و واریانس توزیع پسین پارامتر θ_i در این خانواده از توزیع‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش ۳ برآوردگرهای بیزی مقید تحت توابع زیان متعادل و متعادل موزون را محاسبه نموده و این برآوردگرها را برای خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری محاسبه می‌کنیم. در بخش ۴ برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ را تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا برای خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری بدست می‌آوریم. این برآوردگر، برآوردگر بهینه در کلاس توزیع های پیشین داده شده تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا است که با جزئیات بیشتری به آن خواهیم پرداخت. آنگاه با استفاده از نتایج جعفری و همکاران (۲۰۰۸) آن را برای توابع زیان متعادل و متعادل موزون تعمیم می‌دهیم.

---

۲ Posterior Regret

۳ Posterior Regret Constrained Gamma Minimax

۲ پیش نیازها

زلنر (۱۹۹۴) تابع زیان جدیدی به نام تابع زیان متعادل معرفی کرد. این تابع زیان به گونه‌ای طراحی شده است که به طور همزمان دو معیار نیکویی برازش و دقت برآوردیابی در برآورد تابع پارامتر θ را در نظر می‌گیرد. در حالی که در بیشتر تحلیل‌های آماری، تابع زیان مورد استفاده تنها یکی از دو معیار مذکور را در نظر می‌گیرد.

فرض کنید $(X_1,\cdots,X_n) \sim \mathcal{F}_\theta$ نمونه تصادفی به اندازه n از مدل احتمال $\mathcal{F}_\theta$ باشد. زلنر (۱۹۹۴) تابع زیان متعادل را به صورت

$$L^z(\theta,t) = w\sum_{i=1}^{n}(X_i-t)^2 + (1-w)(t-\theta)^2$$

معرفی کرد، که در آن $w \in [0,1)$ مقداری معلوم و $t=t(X)$ برآوردگر پارامتر θ است. جعفری و همکاران (۲۰۰۶) تعمیمی کلی از تابع زیان متعادل زلنر را بصورت

$$L_{w,\delta_0}(\theta,t) = w(\delta_0-t)^2 + (1-w)(t-\theta)^2$$

ارائه کردند، که در آن $w \in [0,1)$ مقداری معلوم، $t=t(X)$ برآوردگر θ و δ_0 برآوردگر هدف است. همچنین جعفری و همکاران (۲۰۰۶) تابع زیان متعادل موزون

$$L^q_{w,\delta_0}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t}) = wq(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{m}(\delta_{0i}-t_i)^2 + (1-w)q(\boldsymbol{\theta})\sum_{i=1}^{m}(t_i-\theta_i)^2 \qquad (1)$$

را در حالت چند متغیره معرفی و برآوردیابی بیزی را انجام دادند، که در آن $q(\boldsymbol{\theta})$ تابع وزنی مناسب و مثبت و $\delta_0 \equiv \boldsymbol{\delta}_0(x) = (\delta_{01},\cdots,\delta_{0m})$ است.

در این مقاله، به منظور محاسبه برآوردگر بیزی مقید پارامتر $\boldsymbol{\theta}$، تابع زیان متعادل

$$L_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{w(\delta_{0i}-t_i)^2 + (1-w)(t_i-\theta_i)^2\} \qquad (2)$$

را که حالت خاصی از تابع زیان (۱) است، در نظر می‌گیریم. حال اگر وزن متناسب با هر یک از پارامترها برابر نباشند تابع زیان متعادل موزون را به صورت

$$L_۲(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{t}) = \frac{۱}{\sum_{j=۱}^{m} N_j} \sum_{i=۱}^{m} N_i \{w(\delta_{\circ i} - t_i)^۲ + (۱ - w)(t_i - \theta_i)^۲\} \qquad (۳)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن N_i وزن متناسب با θ_i، به ازای $i = ۱, \cdots, m$ است. برای دستیابی به برآوردگرهای بیزی مقید تحت توابع زیان متعادل (۲) و متعادل موزون (۳) از «راه حل بیزی» استفاده می‌کنیم که به صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۱ : (جعفری و همکاران، ۲۰۰۶) برآوردگر بیزی $e^B(\boldsymbol{X})$ برای پارامتر $\boldsymbol{\theta}$ تحت تابع زیان متعادل (۲) نسبت به توزیع پیشین $\pi(\boldsymbol{\theta})$، معادل با «راه حل بیزی» $e^{B^*}(\boldsymbol{X})$ نسبت به «توزیع پسین»

$$\pi^*(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = wI_{\delta_\circ(\boldsymbol{x})}(\boldsymbol{\theta}) + (۱ - w)\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$$

تحت تابع زیان $\sum_{i=۱}^{m} N_i(t_i - \theta_i)^۲$ است. یعنی $\pi^*(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$ آمیخته‌ای از جرم نقطه‌ای در $\delta_\circ(\boldsymbol{x})$ و توزیع پسین $\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$ است.

۱.۲ خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_۱, \cdots, X_m)$، که در آن هر یک از X_iها متوسط n نمونه تصادفی، مستقل از هم و از خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری با میانگین $\theta_i = \psi'(\phi_i)$ است که تابع چگالی آن به صورت،

$$\begin{aligned} f(x_i|\theta_i) &= f(x_i|\phi_i(\theta_i)) \\ &\propto \exp[n(\phi_i(\theta_i)x_i - \psi(\phi_i(\theta_i)))], \qquad i = ۱, \cdots, m \qquad (۴) \end{aligned}$$

نوشته می‌شود که در آن $\psi(.)$ تابعی دو بار مشتق‌پذیر است. توزیع پیشین مستقل

$$\pi_\mu(\theta_i) = \exp[\mu\nu(\phi_i(\theta_i)) - \nu\psi(\phi_i(\theta_i))]V^{-۱}(\theta_i), \qquad i = ۱, \cdots, m \qquad (۵)$$

را برای θ_i در نظر بگیرید، که در آن $V(\theta_i) = \psi''(\phi_i)$ و ν مقداری ثابت و معلوم و μ پارامتر توزیع پیشین θ_i است. آنگاه توزیع پسین به صورت

$$\pi(\theta_i|x_i, \mu) \propto \exp[(n+\nu)\{x_\circ \phi_i(\theta_i) - \psi(\phi_i(\theta_i))\}]V^{-1}(\theta_i) \qquad (۶)$$

محاسبه می‌شود، که در آن $x_\circ = \frac{nx_i+\mu\nu}{n+\nu}$.
قبل از محاسبه میانگین و واریانس توزیع پسین، چند قضیه در ارتباط با خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری بیان می‌شود.

قضیه ۲ (موریس، ۱۹۸۳) فرض کنید $h(\theta)$ تابعی پیوسته و مشتق پذیر با مشتق $h'(\theta)$ بروی بازه $\Omega = (a, b)$ باشد. اگر θ دارای تابع چگالی (۵) و $E(h(\theta)(\theta - \mu))$ موجود باشد و $\lim_{\theta \to a or b} h(\theta)(\theta - \mu) = \circ$. آنگاه،

$$E[h(\theta)(\theta - \mu)] = \frac{1}{\nu} E[h'(\theta)V(\theta)]$$

قابل ذکر است که به منظور محاسبه میانگین پسین θ، $h(\theta) = 1$ و در نتیجه $h'(\theta) = \circ$ مورد نظر است.

قضیه ۳ (موریس، ۱۹۸۳) فرض کنید $M^*_r = E[(\theta - x_\circ)^r|\boldsymbol{X}]$، r-امین گشتاور مرکزی توزیع پسین باشد و تابع چگالی $\boldsymbol{X}$ به شرط ϕ به فرم (۴) و θ دارای توزیع پیشین (۵) باشد. آنگاه، $M^*_\circ = 1$، $M^*_1 = \circ$ و $M^*_2 = V(\theta|\boldsymbol{X}) = (1 - B)E[\frac{V(\theta)}{n}|\boldsymbol{X}]$، که در آن، $V(\theta) = V(\boldsymbol{X}|\phi) = \psi''(\phi)$.

حال برای دستیابی به میانگین توزیع پسین θ_i، با به کارگیری قضیه ۲ و استفاده از توزیع پسین (۶) و جایگذاری $h(\theta_i) = 1$ داریم:

$$E(\theta_i - x_\circ|\boldsymbol{X}) = \circ$$

بنابراین با جایگذاری مقدار $x_\circ$ در رابطه فوق، میانگین پسین توزیع θ_i به صورت

$$\begin{aligned} E(\psi'(\phi_i)|\boldsymbol{X}) &= \frac{nX_i + \mu\nu}{n+\nu} \\ &= (1 - B)X_i + B\mu \qquad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

حاصل می‌شود، که در آن $B = \frac{\nu}{n+\nu}$. برای محاسبه واریانس توزیع پسین θ_i، با به کارگیری قضیه ۳ به سادگی معلوم می‌شود که:

$$
\begin{aligned}
V(\theta_i|\boldsymbol{X}) &= (1-B)E[\frac{V(\theta_i)}{n}|\boldsymbol{X}] \\
&= \frac{1-B}{n}E(\psi''(\phi_i)|\boldsymbol{X}) \\
&= \frac{1}{n+\nu}E(\psi''(\phi_i)|\boldsymbol{X})
\end{aligned}
$$

۳ برآوردگر بیزی مقید تحت توابع زیان متعادل و متعادل موزون

در این بخش ابتدا به معرفی برآوردگر بیزی مقید می‌پردازیم. آنگاه با استفاده از «راه حل بیزی» برآوردگر بیزی مقید را تحت توابع زیان متعادل و متعادل موزون بدست می‌آوریم.

۱.۳ برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل

در این زیر بخش رده جدیدی از برآوردگرها را معرفی می‌کنیم که نوعی سازگاری بین دو گشتاور اول از هیستوگرام برآوردها با گشتاورهای متناظر با هیستوگرام پسین پارامترها ایجاد می‌کند. ایده اولیه این برآوردگرها توسط لویس (۱۹۸۴)، در حالت نرمال و گوش (۱۹۹۲) در حالت کلی‌تر بیان شد.

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)$، که در آن هر یک از X_i ها متوسط n نمونه تصادفی و از خانواده توزیع‌های $\mathcal{F}_{\theta_i}$ باشد و $\theta_1, \cdots, \theta_m$ پارامترهای متناظر با میانگین X_i، $i = 1, \cdots, m$ هستند که تمام $(\theta_i - \overline{\theta})$ ها، به ازای $i = 1, \cdots, m$، به طور همزمان دارای توزیع پسین تباهیده نیستند. جعفری و همکاران (۲۰۰۶) نشان دادند برآوردگر بیزی پارامتر θ_i، تحت تابع زیان متعادل (۲) به صورت

$$
e_i^B(\boldsymbol{X}) = w\delta_{0i}(\boldsymbol{X}) + (1-w)e_i^{PM}(\boldsymbol{X}), \qquad i = 1, \cdots, m
$$

است، که در آن $e_i^{PM}(\boldsymbol{X})$ میانگین پسین و $\delta_{\circ i}(\boldsymbol{X})$ برآوردگر هدف پارامتر θ_i هستند. با تعریف، $\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_i^{PM}(\boldsymbol{X})$ و $\overline{e}^{B}(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} e_i^{B}(\boldsymbol{X})$ به سادگی تحقیق می‌شود که

- $\overline{e}^{B}(\boldsymbol{X}) \neq \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X})$
- $E(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_i - \overline{\theta})^2|\boldsymbol{X}) \neq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(e_i^{B}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{B}(\boldsymbol{X}))^2$

همان طور که ملاحظه می‌شود برآوردگر بیزی پارامتر θ_i، $i = 1, \cdots, m$، تحت تابع زیان متعادل، به طور هم زمان نمی‌توانند در روابط فوق صدق کنند. برای رفع این مشکل، لویس (۱۹۸۴) و گوش (۱۹۹۲) رده جدیدی از برآوردگرها که «قیدهای لویس» بصورت

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \overline{t} = \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}) \\
(ii) & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(t_i - \overline{t})^2 = E(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_i - \overline{\theta})^2|\boldsymbol{X})
\end{array}
$$

را برقرار می‌کنند معرفی و آن ها را برآوردگرهای بیزی مقید نامیدند. فرض کنید $\boldsymbol{t} = (t_1, \cdots, t_m)$ کلاسی از برآوردگرها باشند که در قیدهای لویس صدق کنند، به سادگی تحقیق می‌شود که (گوش، ۱۹۹۲)

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{i=1}^{m}(\theta_i - \overline{\theta})^2|\boldsymbol{X}) &= \sum_{i=1}^{m} V(\theta_i - \overline{\theta}|\boldsymbol{X}) + \sum_{i=1}^{m}(e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))^2 \\
&= H_1(\boldsymbol{X}) + H_2(\boldsymbol{X})
\end{aligned}
$$

که در آن

$$
H_1(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m} V(\theta_i - \overline{\theta}|\boldsymbol{X}) \tag{۷}
$$

$$
H_2(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m}(e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))^2 \tag{۸}
$$

قضیه ۴ : اگر $H_1(\boldsymbol{X})$ و $H_2(\boldsymbol{X})$ مقادیر تعریف شده در (۷) و (۸) باشند و قرار دهیم

$$a \equiv a(\boldsymbol{X}) = [1 + \frac{H_1(\boldsymbol{X})}{H_2(\boldsymbol{X})}]^{\frac{1}{2}}$$

آنگاه در کلاس برآوردگرهای $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{X})$، برآوردگر بیزی مقید

$$e_i^{CB}(\boldsymbol{X}) = \{H_1(\boldsymbol{X}) + H_2(\boldsymbol{X})\}^{\frac{1}{2}} \frac{(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))}{\{\sum\limits_{i=1}^{m}(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2\}^{\frac{1}{2}}} + \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X})$$

مخاطره پسین را با توجه به قیدهای (i) و (ii) تحت تابع زیان متعادل (۲) مینیمم می‌کند، که در آن

$$(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X})) = w(\delta_{\circ i} - \overline{\delta_\circ}) + (1 - w)(1 - B)((X_i - \overline{X}))$$

برهان : اثبات در پیوست الف آمده است.

مثال ۱ : فرض کنید $X_1, \cdots, X_m$، m متغیر تصادفی مستقل از هم باشند، که هر یک از X_i ها متوسط n متغیر تصادفی و از خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری است. میانگین پسین پارامتر θ_i، تحت تابع زیان متعادل (۲) بصورت

$$e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) = (1 - B)X_i + B\mu, \qquad i = 1, \cdots, m$$

حاصل می‌شود، که در آن $B = \frac{\nu}{n+\nu}$ و $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)$. همچنین بر اساس این خانواده از توزیع‌ها می‌توان موارد زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}) &= (1 - B)(\delta_{\circ i} - \overline{\delta}_\circ) \\ H_1(\boldsymbol{X}) &= (n + \upsilon)^{-1}(1 - \frac{1}{m})\sum_{i=1}^{m} E(\psi''(\phi_i)|\boldsymbol{X}) \\ H_2(\boldsymbol{X}) &= \sum_{i=1}^{m}(e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) - \overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-B)^2\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2\\
e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}) &= w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta}_{\circ})+(1-w)(1-B)((X_i-\overline{X}))
\end{aligned}
$$

حال با به کارگیری روابط فوق، برآوردگر بیزی مقید پارامتر θ_i تحت تابع زیان متعادل (۲) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
e_i^{CB}(X) &= \{H_1(X)+H_2(X)\}^{\frac{1}{2}}\times\\
&\quad\frac{w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta_{\circ}})+(1-w)(1-B)((X_i-\overline{X}))}{\{\sum_{i=1}^{m}(w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta_{\circ}})+(1-w)(1-B)(X_i-\overline{X}))^2\}^{\frac{1}{2}}}\\
&+ (1-B)\overline{X}+B\mu \qquad i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

۲.۳ برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل موزون

در این زیر بخش برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل موزون (۳) محاسبه می‌شود. نمادهای زیر در طول بخش مورد استفاده قرار می گیرند.

۱) $$\overline{\theta}^{W}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}N_j}\sum_{i=1}^{m}N_i\theta_i$$

۲) $$\overline{e}^{WPM}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}N_j}\sum_{i=1}^{m}N_ie_i^{PM}(\boldsymbol{X})$$

۳) $$\overline{t}^{W}=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}N_j}\sum_{i=1}^{m}N_it_i$$

۴) $$\overline{e}^{WB}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}N_j}\sum_{i=1}^{m}N_ie_i^{B}(\boldsymbol{X})$$

۵) $$\overline{e}^{WB^*}(\boldsymbol{X})=\frac{1}{\sum_{j=1}^{m}N_j}\sum_{i=1}^{m}N_ie_i^{B^*}(\boldsymbol{X})$$

فرض کنید $\boldsymbol{t}$ کلاسی از برآوردگرها باشد که در روابط

$$\begin{aligned} &(iii) \qquad \bar{t}^W = \bar{e}^{WPM}(\boldsymbol{X}) \\ &(iv) \qquad \sum_{i=۱}^{m} N_i(t_i - \bar{t}^W)^۲ = E(\sum_{i=۱}^{m} N_i(\theta_i - \bar{\theta}^W)^۲|\boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

تحت عنوان «قیدهای لویس برای حالت وزنی» صدق می‌کند. به سادگی تحقیق می‌شود که (فری و کرسی، ۲۰۰۳)

$$\begin{aligned} E(\sum_{i=۱}^{m} N_i(\theta_i - \bar{\theta}^W)^۲|\boldsymbol{X}) &= \frac{۱}{\sum\limits_{j=۱}^{m} N_j} \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j>i}^{m} N_iN_jV(\theta_i - \theta_j|\boldsymbol{X}) \\ &+ \sum_{i=۱}^{m} N_i(e_i^{PM}(\boldsymbol{X}) - \bar{e}^{WPM}(\boldsymbol{X}))^۲ \\ &= H_۱^W(\boldsymbol{X}) + H_۲^W(\boldsymbol{X}) \end{aligned}$$

که در آن

$$H_۱^W(X) = \frac{۱}{\sum\limits_{i=۱}^{m} N_j} \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j>i}^{m} N_iN_jV(\theta_i - \theta_j|X) \qquad (۹)$$

$$H_۲^W(X) = \sum_{i=۱}^{m} N_i(e_i^{PM}(X) - \bar{e}^{WPM}(X))^۲ \qquad (۱۰)$$

در قضیه زیر دستور العمل کلی برای محاسبه برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل موزون (۳) با استفاده از «راه حل بیزی» ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که به کارگیری روش لاگرانژ که گوش و همکاران (۲۰۰۷) از آن استفاده نمودند در حالت وزنی امکان پذیر نیست.

قضیه ۵ اگر $H_۱^W(\mathbf{X})$ و $H_۲^W(\mathbf{X})$ مقادیر تعریف شده در (۹) و (۱۰) باشند و قرار دهیم

$$a^W(\mathbf{X}) = [۱ + \frac{H_۱^W(\mathbf{X})}{H_۲^W(\mathbf{X})}]^{\frac{۱}{۲}}$$

آنگاه تحت قیدهای لویس برای حالت وزنی، برآوردگر بیزی مقید

$$\begin{aligned} e_i^{WCB}(\boldsymbol{X}) &= \{H_1^W(\boldsymbol{X})+H_2^W(\boldsymbol{X})\}^{\frac{1}{2}} \frac{(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WB^*}(\boldsymbol{X}))}{\{\sum\limits_{i=1}^{m} N_i(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WB^*}(\boldsymbol{X}))^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ &+ \overline{e}^{WPM}(\boldsymbol{X}) \qquad i=1,\cdots,m \end{aligned}$$

در کلاس برآوردگرهای $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{X})$ مخاطره پسین $E(L_2(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{t})|\boldsymbol{X})$ را تحت تابع زیان متعادل موزون (۳) مینیمم می‌کند، که در آن

$$e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WB^*}(\boldsymbol{X}) = w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta}^W)+(1-w)(e_i^{PM}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WPM}(\boldsymbol{X}))$$

برهان : اثبات مشابه قضیه ۴ است.

مثال ۲ : مفروضات مثال ۱ را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید N_i وزن متناظر با هر یک از پارامترهای θ_i است. در خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری می‌توان موارد زیر را در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} e_i^{PM}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WPM}(\boldsymbol{X}) &= (1-B)(X_i-\overline{X}^W) \\ H_1^W(\boldsymbol{X}) &= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} N_j}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}^{m} N_iN_jV(\theta_i-\theta_j|\boldsymbol{X}) \\ H_2^W(\boldsymbol{X}) &= (1-B)^2\sum_{i=1}^{m} N_i(X_i-\overline{X}^W)^2 \\ e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{WB^*}(\boldsymbol{X}) &= w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta_\circ}^W)+(1-w)(1-B)(X_i-\overline{X}^W) \end{aligned}$$

با به کارگیری روابط فوق، برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل موزون (۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} e_i^{WCB}(\boldsymbol{X}) &= \{H_1^W(\boldsymbol{X})+H_2^W(\boldsymbol{X})\}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \frac{w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta_\circ}^W)+(1-w)(1-B)(X_i-\overline{X}^W)}{\{\sum\limits_{i=1}^{m} N_i(w(\delta_{\circ i}-\overline{\delta_\circ}^W)+(1-w)(1-B)(X_i-\overline{X}^W))^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ &+ (1-B)\overline{X}^W+B\mu \end{aligned}$$

۴ برآوردگر تاسف پسین مقید گاما- مینیماکس

در تحلیل بیزی، زمانی که اطلاعات کافی در مورد توزیع پیشین وجود ندارد یا بر سر یک توزیع توافق وجود دارد اما هم چنان در مورد ابر پارامتر(های) توزیع اختلاف وجود دارد، یکی از روش‌های رایج این است که کلاسی از توزیع‌های پیشین مانند Γ را تعیین کرده و برآوردگرهای بیزی را در کلاس Γ بدست آوریم و سپس در این مجموعه از برآوردگرها، برآوردگر بهینه را انتخاب نمائیم. یکی از روش‌های دستیابی به برآوردگرهای بیزی نیرومند، روش تاسف پسین گاما- مینیماکس است، که به صورت زیر تعریف می‌شود.

گوییم e^{PRGM} برآوردگر تاسف پسین گاما- مینیماکس است هر گاه

$$\sup_{\pi\in\Gamma} R_1(\pi_\mu, e^{PRGM}) = \inf_{\boldsymbol{t}\in A}\sup_{\pi\in\Gamma} R_1(\pi_\mu, \boldsymbol{t})$$

که در آن $R_1(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) = \rho(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) - \rho(\pi_\mu, e_\mu^B)$ تابع تاسف پسین و $\rho(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) = E_\pi(L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{t})|\boldsymbol{X})$ تابع مخاطره پسین است.

با توجه به اینکه برآوردگرهای بیزی در قیدهایی که لویس معرفی کرده است صدق نمی‌کنند، برآوردگر بهینه مذکور را در کلاس برآوردگرهای بیزی مقید بدست می‌آوریم. بدین منظور، در تابع تاسف پسین، با قرار دادن برآوردگر بیزی مقید e_μ^{CB} به جای برآوردگر بیزی e_μ^B، تابع تاسف پسین مقید به صورت

$$R_2(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) = \rho(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) - \rho(\pi_\mu, e_\mu^{CB})$$

حاصل می‌شود. از برآوردگر حاصل از رابطه

$$\sup_{\pi\in\Gamma} R_2(\pi_\mu, e^{PRCGM}) = \inf_{\boldsymbol{t}\in A}\sup_{\pi\in\Gamma} R_2(\pi_\mu, \boldsymbol{t})$$

تحت عنوان برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس یاد می‌کنیم و آن را با e^{PRCGM} نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، یک معیار برای یافتن برآوردگر بهینه این است که در کلاس برآوردگرهای $\boldsymbol{t}$ برآوردگری که بیشترین مقدار اختلاف مخاطره

پسین آن از مخاطره پسین برآوردگر بیزی مقید در کلاس Γ، حداقل مقدار ممکن باشد، بدست آوریم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه زن و داس گوپتا (۱۹۹۳)، اینسوا و همکاران (۱۹۹۵) و جعفری و همکاران (۲۰۰۸) را ببینید.
فرض کنید $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$ دارای تابع چگالی پیشین $\pi_\mu(\boldsymbol{\theta})$ و $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)$، که در آن هر یک از X_i ها متوسط n متغیر تصادفی و از خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری است، باشند و $\boldsymbol{t}(\mathbf{X}) = (t_1(\mathbf{X}), \cdots, t_m(\mathbf{X}))$ کلاسی از برآوردگرهای دلخواه $\boldsymbol{\theta}$ باشد. تابع زیان مجموع مربعات خطا به صورت

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{m} (\theta_i - t_i)^2 \qquad (11)$$

تعریف شود. کلاس توزیع‌های پیشین را به صورت $\Gamma = \{\pi_\mu : \mu \in [\mu_1, \mu_2]\}$ در نظر می‌گیریم که در آن π_μ تعریف شده در(۵) و μ_i، $i = 1, 2$، مقادیر ثابت و معلوم هستند. بنابراین برآوردگر بیزی مقید پارامتر θ_i، تحت تابع زیان (۱۱) برای خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری به صورت

$$e_i^{CB}(\boldsymbol{X}) = a(\boldsymbol{X})(1 - B)(X_i - \overline{X}) + (1 - B)\overline{X} + B\mu \quad i = 1, \cdots, m \quad (12)$$

حاصل می‌شود، که در آن $a(\mathbf{X}) = [1 + \frac{H_1(\mathbf{X})}{H_2(\mathbf{X})}]^{\frac{1}{2}}$ و $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. توجه داشته باشید که برآوردگر (۱۲) همان برآوردگر بدست آمده در (۱۶) به ازای $w = 0$ و $\delta_{0i} = X_i$ است. رابطه (۱۲) را می‌توان به صورت

$$e_i^{CB}(\boldsymbol{X}) = A(X_i) + B\mu, \qquad i = 1, \cdots, m \qquad (13)$$

بازنویسی کرد، که در آن $A(X_i) = a(\boldsymbol{X})(1-B)(X_i-\overline{X})+(1-B)\overline{X}$ و $B = \frac{v}{n+v}$.

قضیه ۶ : فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_m)$، که در آن هر یک از X_i ها متوسط n متغیر تصادفی و از خانواده توزیع‌های نمایی تک پارامتری و $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$ بردار متناظر با میانگین متغیر تصادفی $\boldsymbol{X}$ باشد. اگر $\alpha = \frac{-3mB}{2}(\mu_1 + \mu_2) - (1 - B)m\overline{X}$ و $\beta_j = \sum_{i=1}^{m} [(1 - B)X_i + B\mu_j] - \alpha$،

$j=۱,۲$، آنگاه برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا (۱۱) به صورت زیر حاصل می‌شود:

حالت ۱: اگر $R_۲(\pi_{\mu_۱},\mathbf{t}) \geq R_۲(\pi_{\mu_۲},\mathbf{t})$، آنگاه،

$$e_i^{PRCGM}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} (۱-B)X_i + B\mu_۱ & \beta_۱ \geq ۰ \\ \frac{-\beta_۱}{m} + (۱-B)X_i + B\mu_۱ & \beta_۱ < ۰ \end{cases} \qquad i=۱,\cdots,m$$

حالت ۲: اگر $R_۲(\pi_{\mu_۱},\mathbf{t}) \leq R_۲(\pi_{\mu_۲},\mathbf{t})$، آنگاه،

$$e_i^{PRCGM}(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} (۱-B)X_i + B\mu_۲ & \beta_۲ < ۰ \\ \frac{-\beta_۲}{m} + (۱-B)X_i + B\mu_۲ & \beta_۲ \geq ۰ \end{cases} \qquad i=۱,\cdots,m$$

برهان: اثبات در پیوست ب آمده است.

لم ۱: برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس پارامتر θ_i، $i=۱,\cdots,m$، تحت تابع زیان متعادل (۲) در کلاس توزیع‌های پیشین $\Gamma=\{\pi_\mu : \mu \in [\mu_۱,\mu_۲]\}$، معادل با «راه حل بیزی» e^{PRCGM^*} تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا در کلاس توزیع‌های پیشین

$$\Gamma=\{\pi^*_\mu : \pi^*_\mu(\theta) = wI_{\{\delta_\circ(x)\}}(\theta) + (۱-w)\pi_\mu(\theta), \pi_\mu \in \Gamma\}$$

است. به عبارت دیگر

$$e_i^{PRCGM^*}(\boldsymbol{X}) = w\delta_{\circ i}(\boldsymbol{X}) + (۱-w)e_i^{PRCGM}(\boldsymbol{X})$$

که در آن e^{PRCGM} برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا در کلاس Γ است.

تذکر ۱: برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس تحت تابع زیان متعادل موزون (۳) با استفاده از قضیه ۶ و لم ۱ به سادگی قابل محاسبه است.

پیوست الف

برهان: قضیه ۴. به منظور دستیابی به برآوردگر بیزی مقید تحت تابع زیان متعادل (۲) لازم است تابع مخاطره پسین $E(L_۱(\theta,\mathbf{t})|\mathbf{X})$ را با توجه به قیدهای های (i) و

(ii)، نسبت به t_iها مینیمم کنیم. حال با به کارگیری «راه حل بیزی»، دستور العمل فوق معادل با این است که تابع مخاطره پسین

$$\sum_{i=1}^{m} E[(t_i-\theta_i)^2 \overset{*}{|} \boldsymbol{X}]$$

با توجه به قیدهای (i) و (ii) نسبت به t_iها مینیمم شود، که در آن $\overset{*}{|}$ نمایانگر استفاده از «توزیع پسین» $\pi^*(\theta|x)$ است. به سادگی معلوم می شود که

$$\begin{aligned}
e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) &= w\delta_{\circ i}+(1-w)e_i^{PM}(\boldsymbol{X})\\
\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}) &= w\overline{\delta}_{\circ}+(1-w)\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X})\\
\sum_{i=1}^{m} E[(t_i-\theta_i)^2 \overset{*}{|} \boldsymbol{X}] &= \sum_{i=1}^{m} E[(t_i-e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})+e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\theta_i)^2 \overset{*}{|} \boldsymbol{X}]\\
&= \sum_{i=1}^{m} (t_i-e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2+\sum_{i=1}^{m} E[(\theta_i-e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2 \overset{*}{|} \boldsymbol{X}]
\end{aligned}$$

عبارت دوم سمت راست تساوی فوق به t_i ها بستگی ندارد، بنابراین کافی است $\sum_{i=1}^{m}(t_i-e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2$ را با توجه به قیدهای های (i) و (ii) نسبت به t_iها مینیمم کنیم. با توجه به قید (i) و نادیده گرفتن عباراتی که شامل t_iها نیستند، داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}(t_i &- e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2=\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X})+\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X})-e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2\\
&= \sum_{i=1}^{m}\{(t_i-\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))-w(\overline{\delta_{\circ}}-\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))\}^2\\
&\quad +\sum_{i=1}^{m}(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2\\
&- 2\sum_{i=1}^{m}\{(t_i-\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))-w(\overline{\delta_{\circ}}-\overline{e}^{PM}(\boldsymbol{X}))\}(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))
\end{aligned}$$

با نادیده گرفتن عباراتی که شامل t_i ها نیستند، عبارت فوق به مقدار

$$\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{t})^2+\sum_{i=1}^{m}(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2-2\sum_{i=1}^{m}(t_i-\overline{t})(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X})-\overline{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))$$

$$= m\{Var(Z_1) + Var(Z_2) - 2Cov(Z_1, Z_2)\} \qquad (۱۴)$$

تبدیل می‌شود، که در آن Z_1 و Z_2 دو متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال توام

$$P(Z_1 = t_i, Z_2 = e_j^{B^*}(\boldsymbol{X})) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{m} & i = j \end{cases}$$

است. با توجه به ثابت بودن مقادیر $Var(Z_1)$ و $Var(Z_2)$، عبارت (۱۴) در صورتی مینیمم است که رابطه

$$\begin{aligned} t_i &= a^* e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) + b^* \\ &= a^*(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \bar{e}^{B^*}(\boldsymbol{X})) + \bar{t} \qquad i = 1, \cdots, m \qquad (۱۵) \end{aligned}$$

با احتمال یک رخ دهد. چون $\sum_{i=1}^{m} (t_i - \bar{t})^2 = H_1(\boldsymbol{X}) + H_2(\boldsymbol{X})$، با به کارگیری رابطه (۱۵) معلوم می‌شود که

$$a^* \equiv a^*(\boldsymbol{X}) = \{\frac{H_1(\boldsymbol{X}) + H_2(\boldsymbol{X})}{\sum_{i=1}^{m} (e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \bar{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2}\}^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین برآوردگر بیزی مقید پارامتر θ_i به ازای $i = 1, \cdots, m$، تحت تابع زیان متعادل (۲) برابر است با:

$$e_i^{CB}(\boldsymbol{X}) = \{H_1(\boldsymbol{X}) + H_2(\boldsymbol{X})\}^{\frac{1}{2}} \frac{(e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \bar{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))}{\{\sum_{i=1}^{m} (e_i^{B^*}(\boldsymbol{X}) - \bar{e}^{B^*}(\boldsymbol{X}))^2\}^{\frac{1}{2}}} + \bar{e}^{PM}(\boldsymbol{X}) \qquad (۱۶)$$

پیوست ب

برهان : قضیه ۶. تابع تاسف پسین مقید تحت تابع زیان مجموع مربعات خطا (۱۱) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} R_2(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) &= \rho(\pi_\mu, \boldsymbol{t}) - \rho(\pi_\mu, e_\mu^{CB}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \{E[(\theta_i - t_i)^2 | \boldsymbol{X}] - E[(\theta_i - e_{i\mu}^{CB})^2 | \boldsymbol{X}]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{m}\{t_i^2-(e_{i\mu}^{CB})^2-2(t_i-e_{i\mu}^{CB})E(\theta_i|\boldsymbol{X})\} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{t_i^2-(A(X_i)+B\mu)^2 \\ &- 2(t_i-(A(X_i)+B\mu))((1-B)X_i+B\mu)\} \end{aligned}$$

مشتق های اول و دوم تابع فوق نسبت به μ به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_2(\pi_\mu,\boldsymbol{t})}{\partial\mu} &= 2B(1-B)\overline{X}-2B\sum_{i=1}^{m}t_i+2mB^2\mu \\ \frac{\partial^2 R_2(\pi_\mu,\boldsymbol{t})}{\partial\mu^2} &= 2mB^2>0 \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. با توجه به اینکه $R_2(\pi_\mu,\boldsymbol{t})$ نسبت به μ تابعی اکیداً محدب است و مشتق دوم آن نسبت به μ، مثبت است بنابراین R_2 سوپریمم مقدار خود را در μ_1 یا μ_2 می گیرد به عبارت دیگر، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

حالت ۱: $R_2(\pi_{\mu_1},\boldsymbol{t})\geq R_2(\pi_{\mu_2},\boldsymbol{t})$.

با جایگذاری مقادیر $R_2(\pi_{\mu_i},\boldsymbol{t})$، $i=1,2$ داریم:

$$\begin{aligned} -3B^2\mu_1^2-2B\mu_1\sum_{i=1}^{m}t_i-2B(1-B)\mu_1 m\overline{X} &\geq \\ -3B^2\mu_2^2-2B\mu_2\sum_{i=1}^{m}t_i &- 2B(1-B)\mu_2 m\overline{X} \end{aligned}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m}t_i\geq\frac{-3mB}{2}(\mu_1+\mu_2)-(1-B)m\overline{X} \tag{17}$$

بنابراین برای محاسبه برآوردگر مطلوب، در این حالت کافی است که $R_2(\pi_{\mu_1},\mathbf{t})$ را با توجه به قید (۱۷) و نسبت به t_iها مینیمم کنیم. به عبارت دیگر، لازم است مقدار زیر را با توجه به قید (۱۷) و نسبت به t_iها مینیمم کنیم.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\{t_i^2-2(1-B)t_iX_i-2B\mu_1 t_i\} &= \sum_{i=1}^{m}(t_i-[(1-B)X_i+B\mu_1])^2 \\ &- \sum_{i=1}^{m}[(1-B)X_i+B\mu_1]^2 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه عبارت دوم سمت راست تساوی فوق به t_iها بستگی ندارد، برآوردگر مطلوب جواب بهینه $\sum_{i=1}^{m}(t_i-[(1-B)X_i+B\mu_1])^2$ با شرط جانبی بیان شده در رابطه (۱۷) است.

حال با به کارگیری روش کاروش-کان-تاکر[۴] (بازارا و همکاران، ۱۹۹۳) و با فرض اینکه، $\alpha=\frac{-3mB}{2}(\mu_1+\mu_2)-(1-B)m\overline{X}$ و $\beta_j=\sum_{i=1}^{m}[(1-B)X_i+B\mu_j]-\alpha$ و $j=1,2$، جواب بهینه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$t_i^*(X)=\begin{cases}(1-B)X_i+B\mu_1 & \beta_1\geq 0\\ \frac{-\beta_1}{m}+(1-B)X_i+B\mu_1 & \beta_1<0\end{cases}\qquad i=1,\cdots,m$$

حالت ۲: $R_2(\pi_{\mu_1},\boldsymbol{t})\leq R_2(\pi_{\mu_2},\boldsymbol{t})$.

به روشی مشابه با حالت ۱، برآوردگر مطلوب، جواب بهینه $\sum_{i=1}^{m}(t_i-[(1-B)X_i+B\mu_1])^2$ با شرط جانبی

$$\sum_{i=1}^{m}t_i\leq\frac{-3mB}{2}(\mu_1+\mu_2)-(1-B)m\overline{X}$$

است. با به کارگیری روش کاروش-کان-تاکر، جواب بهینه به صورت

$$t_i^*(X)=\begin{cases}(1-B)X_i+B\mu_2 & \beta_2<0\\ \frac{-\beta_2}{m}+(1-B)X_i+B\mu_2 & \beta_2\geq 0\end{cases}\qquad i=1,\cdots,m$$

حاصل می‌شود. در نتیجه با ادغام حالات ۱ و ۲ برآوردگر تاسف پسین مقید گاما-مینیماکس حاصل می‌گردد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم که پیشنهادهای ارزنده آنها موجب بهبود مقاله گردید کمال تشکر را دارند.

---
۴ Karush-Kuhn-Tucker

مراجع

Bazaraa, M. S., Sherali, H. D. and Shetty, C. M. (1993), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiely, New York.

Frey, J. and Cressie, N. (2003), Some Results on Constrained Bayes Estimators, *Statistics and Probability Letters*, **65**, 389-399.

Insua, R. D., Ruggeri, F. and Vidakovic, B. (1995), Some Results on Posterior Regret G-Minimax Estimation, *Statistics and Decisions*, **13**, 315-351.

Jafari Jozani, M., Marchand, *É.* and Parsian, A. (2006), On Estimation with Weighted Balanced Type Loss Function, *Statistics and Probability Letters*, **76**, 773-780.

Jafari Jozani, M., Marchand, *É.* and Parsian, A. (2010), Bayesian and Robust Bayesian Analysis Under a General Class of Balanced Loss Functions, Accepted in *Statistical Papers.*

Ghosh, M. (1992), Constrained Bayes Estimation with Applications, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 533-540.

Ghosh, M., Kim, M. J. and Kim, D. (2007), Constrained Bayes and Empirical Bayes Estimation with Balanced Loss Functions, *Communication in Statistics: Theory and Methods*, **36**, 1527-1542.

Louis, T. A. (1984), Estimating a Population of Parameter Values Using Bayes and Empirical Bayes Methods, *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 393-398.

Morris, C. (1983), Natural Exponential Families with Quadratic Variance Functions, Statistical Theory, *The Annals of Statistics*, **11**, 515-529.

Zellner, A. (1994), Bayesian and Non-Bayesian Estimation Using Balanced Loss Functions, In: Gupta. S. S., Berger. J. O. (Eds.), *Statistical Decision Theory and Related Topics*, Springer New York,

Zen, M. M. and Das Gupta, A. (1993), Estimating a Binomial Parameter: Is Robust Bayes Real Bayes?, *Statistics and Decisions*, **11**, 37-60.