مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱
جلد ۶، شماره ۱، ص ۲۱–۳۷

احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته

ابوذر بازیاری
گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۲/۱۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۶/۱۸

چکیده : در فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه‌ای که اندازه‌های خسارت بیمه‌گذاران آن به یکدیگر وابسته‌اند، تعیین احتمال و زمان ورشکستگی از اهمیت بسزایی برخوردار است. محاسبه دقیق این احتمالات به‌دلیل ساختار پیچیده آن، کار آسانی نیست. در این مقاله، برآورد احتمالات ورشکستگی، تعیین زمان‌های ورشکستگی و بازه اطمینان احتمالات ورشکستگی در سطوح مختلف همبستگی خسارت‌ها با روش شبیه‌سازی مونت کارلو انجام شده است. در این شبیه‌سازی برای تولید خسارت‌های وابسته از تابع مفصل فرانک چند متغیره و الگوریتم مارشال و الکین کمک گرفته و نشان داده شده است که با افزایش سطح وابستگی بین اندازه‌های خسارت، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره افزایش و زمان ورشکستگی آن کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی : ا حتمال ورشکستگی، الگوریتم مارشال و الکین، تابع مفصل فرانک، فرآیند مخاطره انفرادی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab_bazyari@pgu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۹۱B۳۰، ۶۰E۱۵ و ۶۰K۹۹

۱ مقدمه

فرض کنید یک شرکت بیمه در شاخه‌ای از بیمه شروع به سرمایه‌گذاری کند. این سرمایه‌گذاری همیشه توام با خطر است، زیرا ممکن است مقدار پولی را که شرکت بابت خسارت‌های بیمه‌گذاران پرداخت می‌کند از مجموع سرمایه اولیه[۱] و میزان حق بیمه[۲] دریافتی فزونی یابد، در این‌صورت شرکت ورشکست می‌شود. بنابراین محاسبه احتمالات ورشکستگی مساله بسیار مهمی است، زیرا با دانستن آن‌ها مدیران شرکت بیمه می‌توانند در مورد خط‌مشی شرکت از جمله تعیین حق بیمه دریافتی از افراد تحت پوشش خود تصمیم‌گیری کنند. دانستن این احتمالات وقتی مهم‌تر خواهد بود که خسارت‌های رخداده شده به یکدیگر وابسته باشند، زیرا در این‌صورت شرکت بیمه بنا به قرارداد بایستی مبلغ زیادتری را بابت جبران خسارت‌ها بپردازد. بنابراین نیاز است که سیاست‌گذاران و مدیران شرکت به‌طور دقیق خط‌مشی سرمایه‌گذاری شرکت خود را مورد بررسی قرار دهند. لاندبرگ (۱۹۰۳) آماردان سوئدی اولین شخصی بود که احتمال ورشکستگی را در نظریه مخاطره[۳] مورد مطالعه قرار داد. لاندبرگ (۱۹۲۶) بسیاری از مفاهیم ریاضی و آماری نظریه مخاطره را مورد بررسی قرار داد. کرامر (۱۹۳۰) و کرامر (۱۹۵۵) این مفاهیم را کامل‌تر کردند. از طرفی مفهوم تابع مفصل[۴] توسط اسکلار (۱۹۵۹) معرفی شد، اما استفاده آنها در بیمه و دارایی کاملاً جدید و تازه است. اسکلار (۱۹۷۳) به بحث و بررسی در ارتباط با توزیع‌های توام متغیرهای تصادفی و توابع مفصل آنها پرداخت و با بکارگیری این توابع همراه با قدم تصادفی در نظریه مخاطره نتایج بسیار جالبی را به‌دست آورد. آسموسن (۱۹۸۹) برخی از مفاهیم و قضایای نظریه مخاطره را با استفاده از زنجیرهای مارکوفی مورد بررسی قرار داد. دی‌ویلدر (۱۹۹۶) از روش‌های پیشرفته در ریاضیات برای بسط و گسترش نظریه مخاطره استفاده کرد. رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) روش‌ها و نتایج جالبی را در نظریه مخاطره به‌دست آوردند که در ارتباط با مسایل مربوط به بیمه و دارایی بودند.

برای محاسبه احتمالات ورشکستگی یک شرکت بیمه، بایستی فرآیند مجموع خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران و مقدار خسارت رخداده شده از طرف هر بیمه‌گذار مدل‌بندی شود. چون مقدار خسارت‌ها متغیرهایی تصادفی هستند، برای مدل‌بندی

---

۱ Initial Capital

۲ Premium

۳ Risk Theory

۴ Copula Function

از روش‌های احتمالی و آماری استفاده می‌شود. مدل کلاسیک برای توصیف فرآیند مخاطره یک سبد بیمه بکار می‌رود که در آن استقلال بین اندازه‌های خسارت و نیز استقلال بین اندازه‌های خسارت و زمان رخداد آنها است. در عمل امکان دارد این مفروضات به ندرت رخ دهند. بنابراین نیاز به مدل‌های وابسته و ارایه راه حل‌هایی است که بتوان احتمالات را به‌طور دقیق یا تقریبی محاسبه کرد.

توجه به فرض وابستگی در مدل‌های مخاطره و محاسبه احتمال ورشکستگی در این مدل‌ها تقریباً از سال ۱۹۸۰ توسط برخی از نویسندگان آغاز شد. گربر (۱۹۸۲) احتمال ورشکستگی را در مدل خطی سری زمانی (ARMA) برای وقتی که اندازه‌های خسارت رخداده شده وابسته باشند، مورد بررسی قرار داد. سپس توسط پرومیسلو (۱۹۹۱) به مدل‌های دیگر سری زمانی گسترش داده شد.

نتایج مختلفی در ارتباط با رفتار مجانبی احتمال ورشکستگی به‌دست آمده است. نیرهینن (۱۹۹۸) و نیرهینن (۱۹۹۹) برای وقتی که خسارت‌ها دارای توزیع دم سبک هستند با استفاده از قضیه انحرافات بزرگ[۵]، نتایج حدی را برای این احتمالات به‌دست آورد و نیز کران لاندبرگ را مورد مطالعه قرار داد. مولر و پفلاگ (۲۰۰۱) نتایج مشابهی را با بکارگیری نامساوی مارکوف [۶] در مورد کران لاندبرگ به‌دست آوردند. آلبرچر و کانتور (۲۰۰۲) رفتار لاندبرگ را در محیط وابسته مورد مطالعه قرار دادند و مشاهده کردند که این نما به صورت تابعی از اندازه وابسته[۷] می‌باشد. در واقع تابع مفصل شامل پارامتری است که این پارامتر نشان‌دهنده سطح همبستگی بین خسارت‌ها است.

کوزت و مارسا (۲۰۰۰) به محاسبه احتمال ورشکستگی در محیط گسسته زمان با فرض وابستگی بین اندازه‌های خسارت پرداختند و نشان دادند که تحت ساختار وابستگی احتمال ورشکستگی افزایش می‌یابد. آلبرچر و بوکسما (۲۰۰۴) نیز با در نظر گرفتن مدل مخاطره‌ای که در آن بین اندازه‌های خسارت و زمان رخداد آنها وابستگی باشد، با استفاده از تبدیل لاپلاس و معادلات دیفرانسیل احتمال ورشکستگی را به‌طور دقیق به‌دست آوردند. همچنین این روش‌ها را روی چندین مدل وابسته دیگر به کار بردند و برای آن‌ها نیز توانستند احتمال ورشکستگی را محاسبه کنند. آلبرچر و تئوگلز (۲۰۰۶) با در نظر گرفتن چنین وابستگی در مدل، با استفاده از قدم تصادفی و معادلات دیفرانسیل توانستند احتمالات ورشکستگی را

---

۵ Large Deviations

٦ Markov Inequality

۷ Dependent Measure

به‌طور تقریبی در زمان‌های متناهی و نامتناهی برای خسارت‌های دارای توزیع دم سبک به‌دست آورند.

در بخش دوم این مقاله، به تعریف تابع مفصل، قضیه اسکلار و مفاهیم مرتبط با آن پرداخته شده است. در بخش سوم، مدل مخاطره جمعی کلاسیک و مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه که در آن خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای تابع توزیع مشخص $F_X(x)$ باشند، در نظر گرفته شده است. در ادامه فرآیند مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران در یک سبد بیمه مورد بررسی قرار گرفته و امید ریاضی، واریانس و تابع مولد گشتاور آن محاسبه شده است.

در بخش چهارم، با الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو برآورد احتمالات ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه در سطوح مختلف همبستگی بین خسارت‌ها محاسبه شده است. خواهیم دید که برآوردگرهای ارایه شده برای احتمالات ورشکستگی نااریب بوده و بازه‌های اطمینان در سطح معنی‌داری α برای این احتمالات محاسبه شده است. در بخش پنجم، روش استفاده شده در فرآیند شبیه‌سازی برای تولید خسارت‌های وابسته با کمک تابع مفصل فرانک چند متغیره از طریق الگوریتم مارشال و الکین (۱۹۸۸) توضیح داده شده است. همچنین زمان ورشکستگی[۸] در سطوح مختلف وابستگی بین خسارت‌ها و نیز بازه‌های اطمینان محاسبه شده‌اند. در بخش ششم، الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو ارایه شده است.

۲ تابع مفصل

در مدیریت مخاطره بیمه‌ای و مالی امکان دارد با عوامل متعددی مواجه شویم. در این‌گونه مسایل نیاز به مدل‌هایی با ساختار وابسته است و بررسی این‌گونه مدل‌ها در تحلیل‌های کاربردی گریزناپذیر است. در گذشته بحث مدل‌های وابسته با استفاده از مدل‌بندی‌های ساده انجام می‌گرفت. اما در کارهای کنونی بررسی این مسایل در اکثر کارهای تحقیقاتی و علمی از کانال مفهومی تحت عنوان مفصل می‌گذرد. جهت درک مفهوم مفصل می‌توان آن را به‌صورت تابع توزیع توام متغیرهای تصادفی که انتظار می‌رود دارای توزیع‌های حاشیه‌ای خاصی باشد بیان کرد.

استفاده از یک مفصل به عنوان پایه و اساس یک مدل چند متغیره علمی انعطاف‌پذیر است و این به‌دلیل این است که هیچ محدودیتی روی چگالی‌های کناری اعمال نمی‌شود. قضیه اسکلار ساخت توابع مفصلی را بیان می‌کند که توزیع‌های کناری متفاوتی را نتیجه

۸ Time to Ruin

می‌دهد. بنابراین کافی است این توابع توزیع کناری را به سمت تابع مفصل مناسب سوق داده تا تابع توزیع دو متغیره به‌دست آید. بنابراین در ساخت توابع مفصل هیچ محدودیتی در انتخاب توزیع‌های کناری وجود ندارد، اگرچه این توابع در مدل‌بندی‌های وابستگی بین متغیرهای تصادفی پیوسته مفیداند اما کاربرد آنها در حالت گسسته نسبتاً نامشخص بوده و این بدان جهت است که در حالت گسسته استفاده از تبدیلات انتگرالی مناسب نیست (جو، ۱۹۹۷). برای مطالعات بیشتر در مورد توابع مفصل به نلسن (۲۰۰۶) و چروبینی و همکاران (۲۰۰۴) رجوع شود.

تابع توزیع $F_X(x)$ با توزیع‌های کناری $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ را در نظر بگیرید. می‌توان توابع $F_{X_1}(x_1)$، $F_{X_2}(x_2)$ و $F_X(x)$ را با هر جفت عدد حقیقی $x=(x_1,x_2)$ در ارتباط دانست. البته هر کدام از این سه تابع در بازه $[0,1]$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر هر جفت x از اعداد حقیقی منجر به نقطه $(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2))$ در مربع واحد می‌شود و این جفت مطابق با اعداد $F_X(x)$ در بازه $[0,1]$ تغییر می‌کند. طبق تعریف یک مفصل لزوماً باید یک تابع توزیع دو متغیره برای یک بردار تصادفی دو متغیره با تابع چگالی کناری یکنواخت $U(0,1)$ باشد. قضیه اسکلار در تعیین ارتباط بین توابع توزیع چند متغیره و توزیع‌های کناری یک متغیره آنها نقش اساسی دارد.

قضیه ۱ (اسکلار، ۱۹۷۳): فرض کنید توابع $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ به‌ترتیب توابع توزیع کناری متغیرهای تصادفی پیوسته X_1 و X_2 باشند. در این‌صورت یک تابع مفصل یکتا همچون C موجود است که برای تمام $x\in R^2$ همواره

$$F_X(x_1,x_2)=C(F_{X_1}(x_1),F_{X_2}(x_2)), \qquad (1)$$

بر عکس، اگر C یک مفصل و $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ توابع توزیع کناری باشند، آنگاه $F_X(x_1,x_2)$ در رابطه (۱) یک تابع توزیع دو متغیره با توزیع‌های کناری $F_{X_1}(x_1)$ و $F_{X_2}(x_2)$ است.

برای به‌دست آوردن تابع مفصل طبق قضیه اسکلار، بهتر است که از معکوس توابع توزیع کناری استفاده شود. به این ترتیب که با قرار دادن $u=F_{X_1}(x_1)$ و $v=F_{X_2}(x_2)$ و با توجه به پیوسته بودن توابع توزیع حاشیه‌ای، آنگاه

$$C(u,v)=F_X(F_{X_1}^{-1}(x_1),F_{X_2}^{-1}(x_2)) \quad , \quad u,v\in[0,1]. \qquad (2)$$

لازم به ذکر است که تابع مفصلی که به‌طور مستقیم از قضیه اسکلار در رابطه (۲) به‌دست می‌آید، ممکن است شامل پارامتری باشد که بتوان آن را به‌وضوح در تابع مفصل مشاهده کرد.

در حقیقت بستگی به خود تابع توزیع دارد. اگر تابع توزیع شامل پارامتر باشد این پارامتر خود را به نحوی در تابع مفصل نشان می‌دهد و بیانگر سطح همبستگی بین متغیرها است (برای جزییات بیشتر به نلسن، ۲۰۰۶ و چروبینی و همکاران، ۲۰۰۴ رجوع شود). به همین دلیل روش‌های مختلفی توسط آماردانان ابداع شد که زیر بنای آن‌ها استفاده از قضیه اسکلار است. در حقیقت آنان توانستند توابع مفصل خاصی را به‌دست آورند که در آن‌ها پارامتر سطح وابستگی به وضوح مشخص باشد.

برای مثال اگر دو متغیر $X_۱$ و $X_۲$ از هم مستقل باشند، آنگاه با استفاده از رابطه (۲) براحتی دیده می‌شود تابع مفصل به‌صورت $C(u,v) = uv$ است، که به‌دلیل استقلال بین دو متغیر، سطح همبستگی در این تابع مفصل وجود ندارد.

۳ فرآیند مخاطره شرکت بیمه و فرآیند مجموع خسارت‌ها

مدل مخاطره جمعی برای بیان وضعیت شرکت بیمه در یک دوره زمانی است. اگرچه این مدل بر اساس چندین فرض ساخته می‌شود، ولی هنوز هم به عنوان چارچوبی برای ساختن مدل‌های واقعی بکار می‌روند. فرض کنید (Ω, f, P) یک فضای احتمال شامل موارد زیر باشد:

الف) یک فرآیند نقطه‌ای مانند $N = \{N(t) : t \geq ۰\}$ با فرض $N(۰) = ۰$.

ب) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل $\{X_k\}_{k=۱}^{\infty}$ با تابع توزیع مشترک F، $(F(۰) = ۰)$، میانگین β و واریانس $\sigma^۲$.

فرآیند مخاطره شرکت بیمه فرآیندی مهم با چارچوبی تصادفی برای اطلاع از وضعیت سرمایه شرکت بیمه در یک دوره زمانی است. فرض کنید شرکت با سرمایه اولیه ثابت u شروع به فعالیت کند، آنگاه فرآیند مخاطره جمعی شرکت بیمه به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k, \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود، که در آن ct مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t، X_k، $k = ۱, \dots, N(t)$، متغیر تصادفی اندازه خسارت رخداده شده در بازه $[۰, t]$ و $\sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ مجموع خسارت‌های رخداده شده تا زمان t هستند. در واقع فرض می‌شود که شرکت در هر دوره زمانی مبلغ ثابت c را از هر بیمه‌گذار دریافت کند که آن را نرخ ناخالص حق بیمه مخاطره می‌گویند. در رابطه (۳)، $\{N(t) : t \geq ۰\}$ فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان t

است و معمولاً فرض می‌شود که پواسن با پارامتر λ و میانگین $E(N(t)) = \lambda t$ است. در این‌صورت سود شرکت بیمه در بازه $[0, t]$ عبارت است از

$$U(t) = ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k.$$

هر شرکت بیمه علاوه بر هزینه‌های خسارت، هزینه‌های جانبی دیگر مانند حقوق کارکنان و هزینه‌های بازاریابی را نیز متحمل می‌شود. برای تامین این هزینه‌ها مبلغی تحت عنوان سربار ایمنی[۹] اضافی از بیمه‌گذاران دریافت می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود سرباز ایمنی شرکت $\eta = 5000$ و حق بیمه تابعی از سربار ایمنی است.

در هر فرآیند مخاطره یکی از جالب‌ترین موارد تعیین زمان ورشکستگی آن است تا با توجه به آن، مدیران شرکت بتوانند در مورد چگونگی رفتار فرآیند در آینده تصمیم‌گیری کنند. زمان ورشکستگی اولین باری است که فرآیند (۳) زیر صفر قرار بگیرد. به عبارت دیگر اگر زمان ورشکستگی با T نشان داده شود، آنگاه

$$T = \inf\{t : R(t) < 0\}. \tag{۴}$$

در یک فرآیند مخاطره وقتی ورشکستگی رخ می‌دهد که مجموع خسارت‌های پرداخت شده شرکت بیشتر از مقدار مبلغ ذخیره شدهٔ شرکت باشد، به عبارت دیگر برای کوچکترین مقدار $t > 0$، $R(t) < 0$ باشد. اما اگر برای تمام مقادیر $t > 0$، همواره $R(t) \geq 0$ باشد، ورشکستگی رخ نخواهد داد و زمان ورشکستگی به‌صورت $T = \infty$ تعریف می‌شود. شکل ۱ نشان‌دهنده مسیر یک فرآیند مخاطره شرکت بیمه است که در آن زمان ورشکستگی و اندازه‌های خسارت مشخص شده‌اند. احتمال ورشکستگی به دو صورت تعریف می‌شود. یکی احتمال ورشکستگی افق متناهی[۱۰]، یعنی احتمال اینکه شرکت تا قبل از زمان مشخص $t > 0$ ورشکست شود و عبارت است از

$$\psi(u, t) = P(T < t | R(0) = u).$$

دیگری احتمال ورشکستگی افق نامتناهی[۱۱]، یعنی احتمال اینکه شرکت یک جایی ورشکست شود و عبارت است از

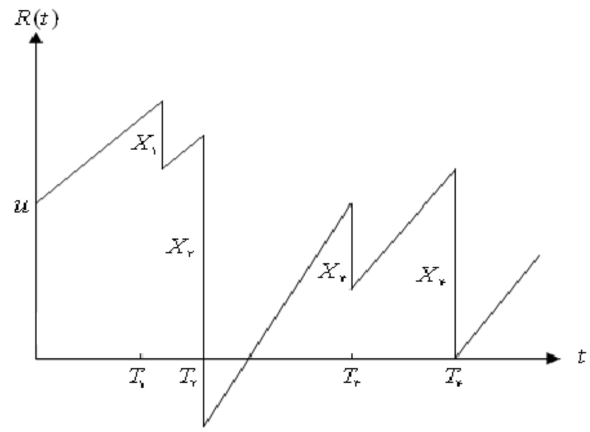
$$\psi(u) = P(T < \infty | R(0) = u).$$

---

[۹] Safety Loading

[۱۰] Finite Horizon Ruin Probability

[۱۱] Infinite Horizon Ruin Probability



شکل ۱: مسیر فرآیند مخاطره $R(t)$

۱.۳ فرآیند مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران

فرآیند مجموع خسارت‌ها از زمان صفر تا t، را به‌صورت

$$S(t) = X_۱ + \ldots + X_{N(t)} = \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k \quad ; \quad t \geq ۰ \qquad (۵)$$

در نظر بگیرید، که در آن $\{N(t) : t \geq ۰\}$ فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده در بازه $[۰, t]$ و مستقل از فرآیند اندازه‌های خسارت $\{X_k\}$ است. معمولاً فرض می‌شود اندازه‌های خسارت $\{X_k\}$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نمایی با پارامتر $\beta = ۱$ هستند. اما در ادامه فرض استقلال رها شده و اثر آن روی احتمال ورشکستگی و زمان ورشکستگی شرکت بیمه مورد بررسی قرار می‌گیرد. در عمل وابستگی بین اندازه‌های خسارت در یک سبد بیمه ممکن است در چندوضعیت رخ دهد. به عنوان مثال، در سبد بیمهٔ منازل که اشیا و امکانات درون منازل بیمه می‌شوند، خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران در این سبد بیمه، امکان دارد تحت تاثیر حوادث مصیبت‌باری از جمله آتش‌سوزی یا زلزله باشد.

همچنین یک سبد بیمه امکان دارد شامل افرادی با ویژگی یا ویژگی‌های مشترک باشند، به عنوان مثال افراد یک خانواده (شامل پدر، مادر و بچه‌ها) یا یک گروه خاص (مثلاً کارمندان

یک موسسه) که مرگ و میر و پیشامد هرگونه بیماری وابسته به یک حوزه معین است (دهین و گوارتس، ۱۹۹۷).

فرآیند مجموع خسارت‌ها در رابطهٔ (۵) را در نظر بگیرید. اگر فرض شود در یک دوره زمانی، n بیمه‌گذار در شرکت بیمه عضو باشند، آنگاه می‌توان رابطه (۵) را به‌صورت

$$S(t) = X_1 + \ldots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (I_k B_k), \qquad (6)$$

نوشت، که در آن متغیر X_k به‌صورت حاصل ضرب یک تابع نشانگر خسارت برنولی I_k و B_k اندازه خسارت توسط k امین بیمه‌گذار بیان شده است. در واقع اگر خسارتی از طرف k امین بیمه‌گذار در بازه $[0, t]$ رخ دهد، $I_k = 1$ و در غیراین‌صورت $I_k = 0$ تعریف می‌شود. اگر احتمال رخ‌داد هر خسارت q_k باشد، آنگاه تابع نشانگر I_k دارای توزیع برنولی با احتمالات $P(I_k = 0) = p_k$ و $P(I_k = 1) = q_k = 1 - p_k$ است. در ادامه فرض می‌شود که $q_k = 0/005$ باشد و متغیرهای B_k و I_k از یکدیگر مستقل هستند.

فرآیند مخاطرهٔ (۳) را می‌توان به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

نوشت، که فرآیند مخاطره بیمه انفرادی نامیده می‌شود. تابع توزیع، تابع مولد گشتاور، میانگین و واریانس متغیر تصادفی B_k عبارتند از

$$F_{B_k}(x) = P(B_k \leq b) \quad , \quad M_{B_k}(t) = E(e^{B_k t})$$
$$\mu_k = E(B_k) \quad , \quad Var(B_k) = \sigma_k^2.$$

امید ریاضی و واریانس فرآیند مجموع خسارت‌ها در (۶) نیز عبارت است از

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} E[E(X_k | I_k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k | I_k = 1) q_k = \sum_{k=1}^{n} q_k \mu_k, \end{aligned}$$

$$Var[S(t)] = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + 2 \sum_{i<j} \sum Cov(X_i, X_j),$$

که در آن

$$\begin{aligned} Var(X_k) &= E[E(X_k^2|I_k)] - [E(X_k)]^2 \\ &= q_k E[B_k^2] - q_k^2 \mu_k^2 \\ &= q_k \sigma_k^2 - q_k(1 - q_k)\mu_k^2. \end{aligned}$$

برای هر $i \neq j$ همواره رابطه

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= E(I_i B_i I_j B_j) - E(X_i)E(X_j) \\ &= E(I_i I_j)\mu_i \mu_j - q_i \mu_i q_j \mu_j \\ &= [Cov(I_i, I_j)]\mu_i \mu_j, \end{aligned}$$

برقرار است. همچنین تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی X_k عبارت است از

$$\begin{aligned} M_{X_k}(t) &= E(e^{X_k t}) \\ &= E[E(e^{X_k I}|I_k)] \\ &= E(p_k + q_k e^{B_k t}) \\ &= p_k + q_k M_{B_k}(t) \\ &= M_{I_k}[\log(M_{B_k}(t))], \end{aligned}$$

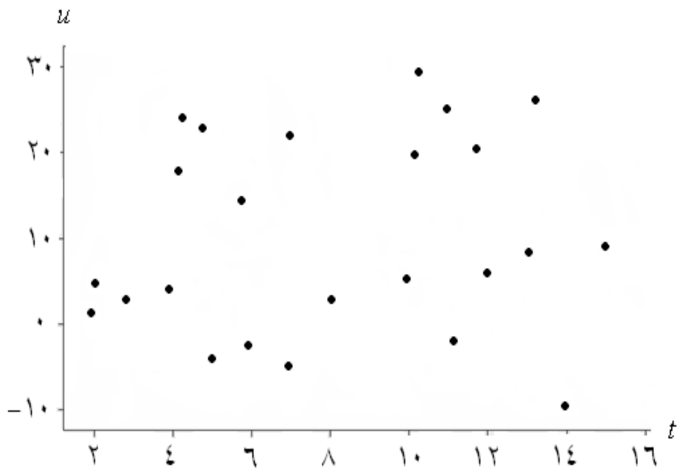
که در آن $M_{I_k}(0)$ تابع مولد گشتاور متغیر نشانگر I_k است. بنابراین تابع مولد گشتاور $S(t)$ در نقطه ثابت d عبارت است از

$$M_{S(t)}(d) = E(e^{S(t)d}) = E\{\exp(\sum_{k=1}^{n} X_k d)\}.$$

۴ اثر وابستگی بر زمان و احتمال ورشکستگی

در این بخش، مطالعه‌ای شبیه‌سازی برای بررسی اثر وابستگی روی زمان و احتمال ورشکستگی انجام شده است. فرض کنید تعداد کل مسیرهای شبیه‌سازی شده برای هر یک از فرآیندهای مخاطره انفرادی برابر با $M = 1000$ است.

برای هر مسیر در این شبیه‌سازی، هر کدام از فرآیندهای مخاطره انفرادی با سرمایه اولیه u و تعداد ۱۰۰۰۰ بیمه‌گذار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. همچنین برای هر مسیر در هر یک



شکل ۲: مسیرهای نمونه‌ای شبیه‌سازی شده فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه

از فرآیندهای مخاطره انفرادی، مقدار سرمایه اولیه و حق بیمه‌های دریافتی تغییر می‌کند. در شکل ۲ چند مسیر نمونه‌ای برای این شبیه‌سازی نشان داده شده است. محور افقی زمان و محور عمودی مقادیر سرمایه اولیه را نشان می‌دهند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در برخی از مسیرهای نمونه‌ای، فرآیند مخاطره انفرادی زیر صفر قرار دارد. در واقع همان مسیرهایی هستند که منجر به ورشکستگی شده‌اند. هر مسیر آن‌قدر دنبال شده تا در آن ورشکستگی رخ دهد. البته در این شبیه‌سازی بعضی از مسیرها اصلاً منجر به ورشکستگی نشده‌اند، بنابراین لازم است این فرآیندها در زمان متناهی t پایان یابد. زمان $t = ٦٠$ سال در نظر گرفته شده است. در هر فرآیند که شروع بکار شده، اگر $T < t$، آنگاه گوییم فرآیند منجر به ورشکستگی شده، در غیر این‌صورت ورشکستگی رخ نداده است. در هر فرآیند نسبت مسیرهایی که قبل از زمان t منجر به ورشکستگی می‌شوند به کل مسیرهای شبیه‌سازی شده، برآورد احتمال ورشکستگی فرآیند را نتیجه می‌دهد. با فرض آنکه تعداد کل مسیرها برای هر مدل مخاطره انفرادی برابر با $M = ۱۰۰۰$ و برای هر یک از مدل‌های مخاطره انفرادی با سرمایه اولیه u، $I_k(\circ)$ تابع نشانگر احتمال ورشکستگی برای kامین مسیر و T زمان ورشکستگی (۴) باشد، برآورد احتمال ورشکستگی عبارت است از

$$\hat{\psi}(u,t) = \frac{۱}{M}\sum_{k=۱}^{M} I_k(T < t). \qquad (۷)$$

۱.۴ بازه اطمینان برای برآورد احتمال ورشکستگی

برآوردگر (۷) برای احتمال ورشکستگی ناریب است، زیرا

$$\begin{aligned} E[\hat{\psi}(u,t)] &= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} E[I_k(T<t)] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} \psi(u,t) = \psi(u,t). \end{aligned}$$

واریانس این برآوردگر عبارت است از

$$\begin{aligned} Var[\hat{\psi}(u,t)] &= \frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{M} Var[I_k(T<t)] \\ &= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} [\psi(u,t) - \psi^2(u,t)] \\ &= \frac{1}{M}[\psi(u,t) - (1-\psi(u,t))]. \end{aligned}$$

همچنین برای نمونه‌های بزرگ داریم

$$\frac{\hat{\psi}(u,t) - \psi(u,t)}{\sqrt{\frac{1}{M}[\hat{\psi}(u,t) - \hat{\psi}^2(u,t)]}} \sim N(0,1).$$

بنابراین بازه اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی برای احتمال ورشکستگی عبارت است از

$$\hat{\psi}(u,t) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{M}\{\hat{\psi}(u,t)[1-\hat{\psi}(u,t)]\}}. \qquad (8)$$

۵ تولید خسارت‌های وابسته با استفاده از تابع مفصل فرانک چند متغیره

نکته اصلی در این شبیه‌سازی تولید کردن خسارت‌های وابسته است. برای این منظور فاصله زمانی ۶۰ سال را به زیر فاصله‌های $[t, t+1]$ تقسیم نموده و در هر کدام از آن خسارت‌ها را با صفر و یک نشان می‌دهیم. این عمل با تولید کردن یک بردار $m \times 1$ بعدی $R = (r_1, \ldots, r_m)$ است، شبیه‌سازی شده از $(r_1^*, \ldots, r_m^*)$ که تابعی از بردار $m \times 1$ بعدی چگالی کناری یکنواخت انجام می‌گیرد. همچنین این بردار تبدیل به بردار خسارت‌هایی می‌شود که مولفه‌های آن شامل فقط اعداد صفر و یک هستند. به این‌صورت که اگر هر

مولفه بردار خسارت از مقدار عددی q کمتر باشد، عدد یک و در غیر این‌صورت بجای آن عدد صفر قرار داده می‌شود. بنابراین در هر زیر فاصله تعداد خسارت‌های رخ‌داده شده $N = \sum_{k=1}^{10000} I(b_k < q)$ هستند.

الگوریتم شبیه‌سازی مونت کارلو

۱- $a = 1$ قرار داده شود.

۲- $n = 10000$ قرار داده شود.

۳- $q_k = 0/005$ قرار داده شود.

۴- حق بیمه‌های دریافتی از n بیمه‌گذار $c = nqE(X)(1+\eta)$ محاسبه شود.

۵- $t = 0$ قرار داده شود.

۶- تعداد مسیرهایی که منجر به ورشکستگی می‌شوند برابر با $r = a$ قرار داده شود.

۷- اگر $r > 1000$، به مرحله ۱۸ انتقال یابد.

۸- $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ از تابع مفصل فرانک چند متغیره تولید شود.

۹- تعداد خسارت‌های رخ‌داده شده $N = \sum_{i=1}^{n} I(b_i < q)$ محاسبه شود.

۱۰- اگر $N = 0$، به مرحله ۱۴ انتقال یابد.

۱۱- بردار $x = (x_1, \dots, x_N)$ با مولفه‌های مستقل از توزیع کناری نمایی با پارامتر یک تولید شود.

۱۲- مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده $x = \sum_{i=1}^{N} x_i$ محاسبه شود.

۱۳- $u = u - x$ قرار داده شود.

۱۴- $u = u + c$ قرار داده شود.

۱۵- اگر $t \leq 60$، $t = t + 1$ قرار داده شود و به مرحله ۲ برای یک مسیر جدید انتقال یابد.

۱۶- اگر $u \leq 0$، ورشکستگی رخ‌داده و با قرار دادن $a = a + 1$ به مرحله ۲ انتقال یابد.

۱۷- در غیر این‌صورت به مرحله ۸ انتقال یابد.

۱۸- الگوریتم پایان یابد.

به‌دلیل وابستگی بین خسارت‌ها برای تولید خسارت‌ها از تابع مفصل فرانک چند متغیرهٔ

$$C(u_1, \dots, u_n) = -\frac{1}{\log \theta} \log[1 + \frac{\prod_{k=1}^{n}(\theta^{u_k} - 1)}{(\theta - 1)^{n-1}}], \qquad 0 < \theta < 1$$

استفاده می‌شود (فرانک، ۱۹۷۹). همچنین چندین الگوریتم توسط نلسن (۲۰۰۶) برای تولید خسارت‌ها از تابع مفصل فرانک دو متغیره ارایه شده است. یک الگوریتم مفید و کارا توسط

مارشال و الکین (۱۹۸۸) ارایه شده که در این مقاله از آن استفاده شده است. آنها نشان دادند که بردارهای تصادفی تابع مفصل فرانک چند متغیره را می‌توان از یک متغیر تصادفی گسسته Z با پارامتر $\theta - 1$ تولید کرد. مراحل انجام این الگوریتم عبارتند از

۱) مقدار عددی z از توزیع هندسی با مقادیر پارامتر $\theta = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۹$ تولید شود.

۲) m مقدار تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت $U(۰, ۱)$ تولید کرده با $R = (r_۱, \dots, r_m)$ نشان داده شود.

۳) با قرار دادن $r^* = M_z(z^{-۱} \log r)$، که در آن $M_z(۰)$ تابع مولد گشتاور متغیر Z و $\log r = (\log r_۱, \dots, \log r_m)$ است، مقادیر $(r^*_۱, \dots, r^*_m)$ به‌دست آورده شوند.

۴) با قرار دادن $(x_۱, \dots, x_m) = (F_۱^{-۱}(r^*_۱), \dots, F_m^{-۱}(r^*_m))$، که در آن $F_i^{-۱}$ معکوس توابع توزیع کناری متغیرهای تصادفی X_i هستند، مقادیر عددی x_iها تعیین شوند.

در این شبیه‌سازی زمان ورشکستگی فرآیند مخاطره شرکت بیمه برای سطوح مختلف همبستگی، $\theta = ۰/۱, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۹$ که $\theta = ۰/۱$ مربوط به همبستگی بالا، $\theta = ۰/۲$ مربوط به همبستگی نسبتاً بالا، $\theta = ۰/۴$ مربوط به همبستگی نسبتاً کم و $\theta = ۰/۹$ مربوط به همبستگی کم می‌باشد، نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در جدول ۱ نتایج شامل تعداد خسارت، مینیمم، ماکسیمم و میانگین زمان ورشکستگی در هر سطح همبستگی نشان داده شده است.

همانطور که ملاحظه می‌شود در هر سطح سرمایه اولیه افزایش سطح همبستگی موجب کاهش زمان ورشکستگی می شود. بازه‌های اطمینان ۹۵ درصدی برای احتمال ورشکستگی در سطوح همبستگی $\theta = ۰/۲, ۰/۴, ۰/۹$ با استفاده ازبراساس روابط (۷) و (۸) محاسبه و در جدول ۲ آورده شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود در هر سطح همبستگی خسارت‌ها، با افزایش سرمایه اولیه شرکت، احتمال ورشکستگی در حال کاهش و با زیاد شدن همبستگی، احتمال ورشکستگی در حال افزایش است. در حقیقت این نتایج می‌توانند خط‌مشی اساسی برای مدیران و سیاست‌گذاران شرکت بیمه برای تصمیم‌گیری در مورد آینده آن شرکت باشند.

بحث و نتیجه‌گیری

مدل فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه‌ای مورد مطالعه قرار گرفت، که در آن تنها بین اندازه‌های خسارت رخ‌داده شده وابستگی باشد. از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای برآورد احتمالات ورشکستگی، زمان‌های ورشکستگی و ساختن بازه‌های اطمینان برای برآورد

جدول ۱: زمان ورشکستگی فرآیند مخاطره با سرمایه اولیه ۵ و ۱۵

	u							
	۱۵				۵			
سطح همبستگی	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۹	۰/۱	۰/۲	۰/۴	۰/۹
تعداد خسارت	۱۵۰	۱۲۰	۱۰۰	۱۰	۳۵۰	۴۱۰	۴۰۰	۱۵۰
مینیمم زمان ورشکستگی	۲	۱	۱	۲	۱	۲	۲	۱
ماکسیمم زمان ورشکستگی	۳۱	۳۸	۴۴	۱۹	۲۳	۳۱	۳۴	۲۱
میانگین زمان ورشکستگی	۸/۸	۹/۲	۹/۷	۱۰/۶	۱/۸	۲/۱	۲/۴	۲/۸

جدول ۲: بازه اطمینان ۰/۹۵ احتمال ورشکستگی در سطوح مختلف همبستگی

	u		
θ	۵	۱۵	۲۰
۰/۹	(۰/۲۶۶ و ۰/۲۱۳)	(۰/۱۷۲ و ۰/۱۲۸)	(۰/۰۹۷ و ۰/۰۶۳)
۰/۴	(۰/۳۴۸ و ۰/۲۹۱)	(۰/۲۲۸ و ۰/۱۷۵)	(۰/۱۴۰ و ۰/۰۹۹)
۰/۲	(۰/۴۳۰ و ۰/۳۶۹)	(۰/۲۸۷ و ۰/۲۳۳)	(۰/۲۱۴ و ۰/۱۶۶)

احتمالات ورشکستگی فرآیند مخاطره استفاده شد. در این شبیه‌سازی از تابع مفصل فرانک چند متغیره و الگوریتم مارشال و الکین (۱۹۸۸) کمک گرفته شد. با استفاده از پارامتر همبستگی تابع مفصل فرانک میزان همبستگی بین خسارت‌ها مشخص شد. ملاحظه شد که در هر سطح از سرمایه اولیه با افزایش سطح همبستگی، زمان ورشکستگی کاهش می‌یابد و با افزایش هبستگی بین خسارت‌ها، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره سیر صعودی دارد.

تقدیر و تشکر

نویسنده از سردبیر و داوران محترم مجله به‌خاطر پیشنهادات ارزشمند آنها که موجب تغییرات اساسی در راستای هر چه بهتر شدن مقاله شد، نهایت تشکر را دارد.

مراجع

Albercher, H. and Kantor, J. (2002), Simulation of Ruin Probability for Risk Processes of Markovian Type, *Monte Carlo Methods and Applications*, **8**, 111-127.

Albercher, H. and Boxma, O. J. (2004), A Ruin Model with Dependence Between Claim Sizes and Claim Intervals, *Mathematics and Economics*, **35**, 245-254.

Albercher, H. and Teugels, J. L. (2006), Exponential Behavior in the Presence of Dependence in Risk Theory, *Journal of Applied Probability*, **43**, 257-273.

Asmussen, S. (1989), Risk Theory in a Markovian Environment, *Scandinavian Actuarial Journal*, **89**, 69-100.

Asmussen, S. (2000), *Ruin Probability*, World Scientific, Singapore.

Cherubini, U., Luciano, E. and Veccchiato, W. (2004), *Copulas Methods in Finance*, The Wiely Finance Series.

Cossette, H. and Marceau, E. (2000), The Discrete-Time Risk Model with Correlated Classes of Business, *Insurance: Mathematics and Economics*, **26**, 133-149.

Cramer, H. (1930), *On the Mathematical Theory of Risk*, Skandia JubileeVolume, Stockholm.

Cramer, H. (1955), *Collective Risk Theory*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

De Vylder, F. (1996), *Advanced Risk Theory*, Editions de I'Universite de Bruxelles.

Dhaene, J. and Goovaerts, M. J. (1997), On the Dependency of Risk in the Individual Life Model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **19**, 243-253.

Frank, M. J. (1979), On the Simultaneous Associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$. *Aequationes Mathematicae*, **19**, 194-226.

Gerber, H. U. (1982), Ruin Theory in the Linear Model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **1**, 177-184.

Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.

Lundberg, F. (1903), *I. Approximerad Framstallning av Sannolikhetsfunktionen. II. Aterforsakring av Kollektivrisker*, Almqvist and Wiksell, Uppsala.

Lundberg, F. (1926), *Forsakringsteknisk Riskutjamning*, F. Englunds Boktryckeri A. B., Stockholm.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988), Families of Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 834-841.

Muller, A. and Pflug, G. (2001), Asymptotic Ruin Probability for Risk Processes with Dependent Increment, *Insurance: Mathematics and Economics*, **28**, 381-392.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer, USA.

Nyrhinen, H. (1998), Rough Descriptions of Ruin for a General Class of Surpluse Processes, *Advances in Applied Probability*, **30**, 1008-1026.

Nyrhinen, H. (1999), Large Deviations for the Time of Ruin, *Journal of Applied Probability*, **36**, 733-764.

Rolski, T., Schimidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.

Promislov, S. D. (1991), The Probability of Ruin in a Process with Dependent Increments, *Insurance: Mathematics and Economics*, **10**, 99-107.

Sklar, A. (1959), Fonctions de Repartition a n Dimensions et Leurs Marges, *Publications de l'Institut de Statistique de l'Universite de Paris*, **28**, 381-392.

Sklar, A. (1973), Random Variables, Joint Distributions, and Copulas, *Kybernetica*, **9**, 449-460.