مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۱
جلد ۶، شماره ۲، ص ۱۶۷-۱۸۶

اطلاع فیشر متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها و آماره‌های مرتب در مدل شبه نمایی

سمانه جلمبادانی، مصطفی رزمخواه
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۵/۲۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۱۱/۲۹

چکیده : استفاده از متغیرهای همراه داده‌های ترتیبی از جمله روش‌هایی است که برای اعمال ترتیب روی یک مجموعه از داده‌های دارای بیش از یک بعد مورد توجه قرار می‌گیرد. در این مقاله متغیرهای همراه دو بعدی رکوردها و آماره‌های مرتب بررسی می‌شوند. برای این منظور ابتدا تابع چگالی این متغیرها برای توزیع‌های سه‌متغیره در حالت کلی محاسبه و سپس با در نظر گرفتن توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره، محاسبات با جزئیات بیشتر بیان می‌شود. با استفاده از معیار اطلاع فیشر نشان داده می‌شود که استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها و آماره‌های مرتب کارآیی استنباط را نسبت به متغیرهای همراه تک‌بعدی افزایش می‌دهند.

واژه‌های کلیدی : داده‌های ترتیبی، توزیع نمایی، آماره بسنده.

۱ مقدمه

اگر داده‌های موجود دارای بیش از یک بعد باشند در این صورت یکی از روش‌های ترتیب قائل شدن بین داده‌ها این است که ترتیب فقط روی یکی از مولفه‌ها اعمال

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: سمانه جلمبادانی، jalambadanis@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰)۶۲B۱۰، ۶۲G۳۰

شود و بقیه مولفه‌ها به طور متناظر در نظر گرفته شوند، به این مولفه‌های متناظر متغیرهای همراه داده‌های ترتیبی گفته می‌شود. در این مقاله متغیرهای همراه آماره‌های مرتب و مقادیر رکوردی که دو نوع از داده‌های ترتیبی هستند بررسی می‌شوند.

در بسیاری از موارد کاربردی در بررسی دنباله‌ای از پدیده‌های تصادفی، مانند ثبت مشاهدات هواشناسی، مسابقات ورزشی و غیره، فقط مشاهداتی ثبت می‌شوند که از مقادیر پیشین خود کوچکتر یا بزرگتر باشند. این متغیرها به آماره‌های رکوردی معروفند. اگر $X_1, \ldots$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی باشد، آنگاه اولین مشاهده یعنی X_1 اولین رکورد است که به آن رکورد بدیهی نیز گفته می‌شود و مشاهده X_j یک رکورد بالاست اگر برای همه مقادیر i که $i < j$ رابطه $X_i < X_j$ برقرار باشد. فرض کنید $(X_1, \mathbf{Y}_1), \ldots$ دنباله‌ای از چندتایی‌های تصادفی مستقل و هم توزیع باشند، که در آن $\mathbf{Y}_i$ $(i \geq 1)$ یک بردار از متغیرهای تصادفی است. اگر مشاهده X_j، kامین رکورد بالا در دنباله $X_1, \ldots$ باشد، که با R_k نشان داده می‌شود، آنگاه مولفه متناظر آن یعنی $\mathbf{Y}_j$ متغیر همراه رکورد kام نام دارد و با $\mathbf{R}_{[k]}$ نمایش داده می‌شود. در مسائل صنعتی مربوط به تنش یا مقاومت و آزمایش‌های تخریبی، رکوردها و متغیرهای همراه متناظر آنها حائز اهمیت هستند. متغیرهای همراه آماره‌های رکوردی مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به احسان‌اله (۱۹۹۴، ۲۰۰۰) و رکب و احسان‌اله (۲۰۰۲) اشاره کرد.

آماره‌های مرتب در مسائل مربوط به طول عمر، بررسی مشاهدات دور افتاده، کنترل کیفیت و امثال آن نقش اساسی ایفا می‌کنند. به علاوه از این آماره‌ها به عنوان ابزاری مفید برای برآورد پارامترهای مکانی و مقیاسی استفاده می‌شود. در یک نمونه تصادفی آماره‌های مرتب در واقع همان مشاهدات نمونه هستند که به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند. اگر $(X_1, \mathbf{Y}_1), \ldots, (X_n, \mathbf{Y}_n)$ نمونه‌ای تصادفی از یک توزیع چندمتغیره باشد و $X_{k:n}$ نشان دهنده kامین آماره مرتب در نمونه $X_1, \ldots, X_n$ باشد، آنگاه $\mathbf{Y}_i$ متناظر با آن متغیر همراه kامین آماره مرتب است و با $\mathbf{Y}_{[k:n]}$ نشان داده می‌شود. از جمله مسائل کاربردی متغیرهای همراه آماره‌های مرتب می‌توان به روال‌های گزینشی و نمونه‌گیری به شیوه مجموعه رتبه‌دار با استفاده از

یک متغیر کمکی اشاره کرد. از جمله کارهای انجام شده در خصوص متغیرهای همراه تک‌بعدی آماره‌های مرتب می‌توان به دیوید و ناگاراجا (۱۹۸۸) اشاره کرد.

هدف اصلی این مقاله، بررسی میزان اطلاع فیشر متغیرهای همراه دوبعدی متناظر با آماره‌های مرتب و رکوردها در توزیع شبه‌نمایی می‌باشد. مسئله بررسی میزان اطلاع مجموعه‌های مختلف داده‌ها در خصوص پارامتر مورد علاقه بر اساس معیار اطلاع فیشر مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است که از آن جمله می‌توان به احمدی و ارقامی (۲۰۰۱)، استپانوف و همکاران (۲۰۰۳) و بالاکریشنان و استپانوف (۲۰۰۶) اشاره کرد. اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی و آماره‌های ترتیبی توزیع به ترتیب توسط رزمخواه و همکاران (۱۳۸۲) و خطیب و همکاران (۱۳۸۳) محاسبه و بررسی شده‌اند. مقایسه دو روش استخراج رکوردها از دیدگاه اطلاع فیشر توسط رزمخواه و همکاران (۱۳۸۶) انجام شده است. اطلاع فیشر رکوردهای دو متغیره در نمونه‌ای به حجم ثابت توسط امینی و همکاران (۲۰۱۲) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین اطلاع فیشر رکوردها و متغیرهای همراه آن‌ها توسط امینی و همکاران (۲۰۱۱) مطالعه شده است.

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f(x,\theta)$ باشد. در این صورت، تحت شرایط نظم میزان اطلاع فیشر متغیر تصادفی X درباره پارامتر θ برابر

$$I_X(\theta) = -E(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(X,\theta)).$$

است. در بخش دوم، توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره معرفی و توابع چگالی متغیرهای همراه رکوردها و آماره‌های مرتب آن محاسبه می‌شوند. اطلاع فیشر متغیرهای همراه دو بعدی رکوردها و آماره‌های مرتب نیز به ترتیب در بخش‌های سوم و چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرند. در انتها به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته و مدل مورد بررسی به حالت‌های دیگر تعمیم داده می‌شود.

۲ نتایج مقدماتی

شبه‌توزیع‌ها در حقیقت یک ترکیب خطی از چند متغیر تصادفی هم‌توزیع هستند که توسط فیلوس و فیلوس (۲۰۰۰، ۲۰۰۶) معرفی شدند. این توزیع‌ها در موقعیت‌هایی

که توزیع‌های معروف مثل نرمال، نمایی، گاما و غیره انعطاف‌پذیری لازم را ندارند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. متغیرهای (X, Y, Z) دارای توزیع شبه‌نمایی هستند هرگاه تابع چگالی توأم آن‌ها به‌صورت

$$f(x, y, z) = \alpha\phi_1(x)\phi_2(x, y)e^{-(\alpha x+\phi_1(x)y+\phi_2(x,y)z)}, \qquad x, y, z \geq 0, \alpha > 0,$$

باشد، که در آن $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x, y)$ توابعی مثبت هستند. این توزیع دارای ویژگی‌های زیر است:

الف. متغیر تصادفی X دارای توزیع حاشیه‌ای نمایی با پارامتر α است، یعنی

$$f_X(x; \alpha) = \alpha e^{-\alpha x}, x \geq 0,$$

ب. متغیر تصادفی Y به شرط X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\phi_1(x)$ است، یعنی

$$f_{Y|X}(y|x) = \phi_1(x)e^{-\phi_1(x)y}, y \geq 0,$$

ج. متغیر تصادفی Z به شرط X, Y دارای توزیع نمایی با پارامتر $\phi_2(x, y)$ می‌باشد، یعنی

$$f_{Z|X,Y}(z|x, y) = \phi_2(x, y)e^{-\phi_2(x,y)z}, z \geq 0.$$

با انتخاب‌های متفاوت برای $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x, y)$ می‌توان توزیع‌های متنوعی به دست آورد. گشتاورهای متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها در این توزیع توسط شهباز و همکاران (۲۰۱۰) محاسبه شده است. در این مقاله با انتخاب $\phi_1(x) = \alpha x$ و $\phi_2(x, y) = xy$ خواهیم داشت

$$f(x, y, z; \alpha) = \alpha^2 x^2 y e^{-x(\alpha+\alpha y+yz)}, \qquad x, y, z \geq 0, \alpha > 0. \qquad (1)$$

توجه شود که با استفاده از (۱)، تابع چگالی (Y, Z) به شرط X عبارت است از

$$f(y, z|x; \alpha) = \alpha x^2 y e^{-x(\alpha y+yz)}.$$

تذکر ۱ : از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که متغیرهای تصادفی X و Z مستقل هستند.

از جمله زمینه‌های کاربردی توزیع شبه‌نمایی می‌توان به مباحث قابلیت اعتماد و پزشکی اشاره کرد. در مطالعه مدت زمان لازم برای بهبودی بیماران مبتلا به فشار خون و دیابت، با فرض اینکه مدت زمان لازم برای بهبودی به شرط معلوم بودن میزان فشار خون و دیابت بیماران دارای توزیع‌نمایی باشد، می‌توان از توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره استفاده کرد. در ادامه این بخش به بررسی توابع چگالی متغیرهای همراه دو بعدی رکوردها و آماره‌های مرتب در توزیع شبه‌نمایی پرداخته می‌شود. در مثال فوق، اگر در یک نمونه تصادفی از بیماران، داده‌های مربوط به فشار خون آن‌ها را (که ساده‌تر اندازه‌گیری می‌شود) مرتب کنیم آنگاه می‌توان میزان دیابت و زمان لازم برای بهبودی بیماران را به عنوان متغیرهای همراه دوبعدی متناظر با فشار خون مرتب شده در نظر گرفت. برای داده‌های رکوردی نیز می‌توان به‌طور مشابه عمل کرد.

۱.۲ توابع چگالی متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها

فرض کنید $X_1, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی $f_X(x)$ و تابع توزیع $F_X(x)$ باشند. تابع چگالی nامین رکورد بالا از این دنباله به فرم

$$f_{R_n}(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} f_X(x)(-\log(1 - F_X(x)))^{n-1}$$

است. تابع چگالی توأم نخستین n رکورد بالا نیز به‌صورت

$$f_{R_1,R_2,\ldots R_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_X(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{f_X(x_i)}{(1 - F_X(x_i))}$$

است. برای جزئیات بیشتر به آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) مراجعه شود.

فرض کنید $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots$ دنباله‌ای مستقل و هم توزیع از متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع توزیع $F(x, y, z)$ و تابع چگالی $f(x, y, z)$ باشد. تابع چگالی (Y, Z) به شرط $X = x$ با $f_{Y,Z|X}(y, z|x)$ و چگالی‌های کناری با $f_X(x)$، $f_Y(y)$ و $f_Z(z)$

نمایش داده می‌شود. با توجه به تناظر متغیرهای همراه با داده‌های ترتیبی مورد نظر، به طور شهودی معلوم می‌شود که

$$f_{R_{[k]}|R_k}(y,z|x) = f_{Y,Z|X}(y,z|x), \qquad (۲)$$

که در آن R_k نمایش kامین رکورد بالا از دنباله $X_۱,\ldots$ و $\mathbf{R}_{[k]} = (R^Y_{[k]}, R^Z_{[k]})$ متغیر همراه دو بعدی متناظر با آن است.

به همین ترتیب تابع چگالی $(\mathbf{R}_{[۱]},\ldots,\mathbf{R}_{[n]})$ به شرط $\{R_۱ = x_۱,\ldots,R_n = x_n\}$ را به‌ازای $\mathbf{v}_i = (y_i, z_i)$ می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} &f_{R_{[۱]},\ldots,R_{[n]}|R_۱,\ldots,R_n}(v_۱,\ldots,v_n|x_۱,\ldots,x_n) \\ &= f_{V_۱,\ldots,V_n|X_۱,\ldots,X_n}(v_۱,\ldots,v_n|x_۱,\ldots,x_n) \\ &= \prod_{i=۱}^{n} f_{V_i|X_i}(v_i|,x_i), \end{aligned} \qquad (۳)$$

نوشت، که در آن $\mathbf{V}_i = (Y_i, Z_i)$. تساوی اخیر از استقلال $(X_i, \mathbf{V}_i)$ها نتیجه می‌شود.

بااستفاده از (۲)، تابع چگالی kامین متغیر همراه دو بعدی رکوردهای بالا از دنباله $X_۱,\ldots$ به‌صورت

$$f_{R_{[k]}}(y,z) = \int_{۰}^{\infty} f_{Y,Z|X}(y,z|x) f_{R_k}(x)dx, \qquad (۴)$$

است، که در آن $f_{R_k}(x)$ تابع چگالی k امین رکورد بالا می‌باشد و در (۲) آمده است.

تذکر ۲ : برای سایر داده‌های ترتیبی از جمله آماره‌های مرتب، می‌توان روابطی مشابه (۲)، (۳) و (۴) بیان کرد.

تابع چگالی توأم نخستین n رکورد بالا و متغیرهای همراه متناظرشان را نیز می‌توان با استفاده از رابطه (۳) به‌صورت

$$f_{R_{[۱]},\ldots,R_{[n]},R_۱,\ldots,R_n}(v_۱,\ldots,v_n,x_۱,\ldots,x_n) = \frac{\prod_{i=۱}^{n} f(x_i,y_i,z_i)}{\prod_{i=۱}^{n-۱}(۱-F_X(x_i))}. \qquad (۵)$$

در نظر گرفت. فرض کنید (X_i, Y_i, Z_i)ها دارای توزیع شبه‌نمایی سه متغیره با تابع چگالی (۱) باشند، در این صورت روابط زیر برای رکوردهای بالای مستخرج از

دنباله $X_1, \ldots$ برقرار هستند:

الف. با توجه به رابطه (۲)، تابع چگالی kامین رکورد بالا عبارتست از

$$f_{R_k}(x;\alpha) = \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\alpha x}. \qquad (۶)$$

ب. با استفاده از (۴)، تابع چگالی متغیر همراه دو بعدی متناظر با kامین رکورد بالا به‌صورت

$$\begin{aligned} f_{R_{[k]}}(y,z;\alpha) &= \int_0^\infty \frac{\alpha^{k+1} y}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\alpha x} x^2 e^{-x(\alpha y + yz)} dx \\ &= \frac{k(k+1)\alpha^{k+1} y}{(\alpha + \alpha y + yz)^{k+2}}. \qquad (۷) \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید.

ج. با استفاده از رابطه (۵)،

$$\begin{aligned} & f_{R_{[1]},\ldots,R_{[n]},R_1,\ldots,R_n}(v_1,\ldots,v_n,x_1,\ldots,x_n;\alpha) \\ & = \alpha^{2n} (\prod_{i=1}^n {x_i}^2 y_i) \exp\{-\sum_{i=1}^n x_i(\alpha y_i + y_i z_i) - x_n \alpha\}. \qquad (۸) \end{aligned}$$

تذکر ۳ : از رابطه (۷) نتیجه می‌شود که تابع چگالی $R^Y_{[k]}$، یعنی متغیر Y متناظر با R_k از دنباله $X_1, \ldots$ عبارتست از

$$f_{R^Y_{[k]}}(y) = \frac{k}{(1+y)^{k+1}}, \quad y \geq 0. \qquad (۹)$$

تذکر ۴ : بنابر تذکر ۱ ، از آنجایی که متغیرهای تصادفی X و Z مستقل هستند، آماره‌های ترتیبی (شامل رکوردها، آماره‌های مرتب و غیره) بر اساس دنباله X_iها و متغیرهای همراه متناظر با آنها از دنباله Z_iها مستقل هستند. لذا خواهیم داشت

$$f_{R^Z_{[k]}}(z;\alpha) = f_{Z_{[k:n]}}(z;\alpha) = f_Z(z;\alpha) = \frac{\alpha}{(\alpha+z)^2}, \quad z \geq 0. \qquad (۱۰)$$

۲.۲ توابع چگالی متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع توزیع F_X و تابع چگالی f_X باشد. تابع چگالی توأم آماره‌های مرتب $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ به‌صورت

$$f_{1\ldots n:n}(x_1, \ldots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i). \tag{۱۱}$$

است. به‌علاوه، تابع چگالی کناری آماره مرتب kام به‌صورت

$$f_{X_{k:n}}(x) = c f_X(x)(F_X(x))^{k-1}(1 - F_X(x))^{n-k}, \tag{۱۲}$$

است، که در آن $c = k\binom{n}{k}$. برای جزئیات بیشتر، به آرنولد و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه شود.

فرض کنید نمونه تصادفی n تایی $(X_1, \mathbf{W}_1), \ldots, (X_n, \mathbf{W}_n)$، که در آن $\mathbf{W}_i = (Y_i, Z_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ در اختیار باشد. با توجه به تذکر ۲، روابط زیر برای متغیرهای همراه دوبعدی متناظر با آماره‌های مرتب نمونه $X_1, \ldots, X_n$ برقرار هستند:

الف. مشابه رابطه (۴)، تابع چگالی متغیر همراه دو بعدی kامین آماره مرتب $\mathbf{W}_{[k:n]} = (Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})$ عبارتست از

$$f_{W_{[k:n]}}(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y,Z|X}(y, z|x) f_{X_{k:n}}(x) dx, \tag{۱۳}$$

که در آن $f_{X_{k:n}}(x)$ تابع چگالی kامین آماره مرتب می‌باشد که در رابطه (۱۲) آمده است.

ب. مشابه رابطه (۳) و با استفاده از (۱۱)، تابع چگالی توأم آماره‌های مرتب و متغیرهای همراه متناظر آنها به‌صورت

$$\begin{aligned} &f_{W_{[1:n]},\ldots,W_{[n:n]},X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(w_1, \ldots, w_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad = \prod_{i=1}^{n} f_{W,X}(w_i, x_i) f_{1,\ldots,n:n}(x_1, \ldots, x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i), \end{aligned}$$

است، که در آن $\mathbf{w}_i = (y_i, z_i)$ مقدار مشاهده شده $\mathbf{W}_i$ است.

فرض کنید نمونه‌ای تصادفی به حجم n از توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره با تابع چگالی (۱) در اختیار باشد. در این صورت، روابط زیر برقرار هستند:

الف. از رابطه (۱۲)، نتیجه می‌شود

$$f_{X_{k:n}}(x) = c\alpha(1 - e^{-\alpha x})^{k-1}(e^{-\alpha x})^{n-k+1}. \tag{۱۴}$$

ب. بنا به رابطه (۱۳)،

$$\begin{aligned} f_{W_{[k:n]}}(y,z) &= c\alpha^2 y \int_0^\infty x^2(1 - e^{-\alpha x})^{k-1} e^{-x(\alpha(n-k+1)+\alpha y+yz)} dx \\ &= c\alpha^2 y \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \int_0^\infty x^2 e^{-x(\alpha(n-k+j+1)+\alpha y+yz)} dx \\ &= 2c\alpha^2 y \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \binom{k-1}{j}}{(\alpha(n-k+j+1)+\alpha y+yz)^3}. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

توجه شود که در حالت خاص $k = 1$،

$$f_{W_{[1:n]}}(y,z;\alpha) = \frac{2c\alpha^2 y}{(\alpha n + \alpha y + yz)^3}, \qquad y, z \geq 0.$$

و در حالت $k = 2$،

$$f_{W_{[2:n]}}(y,z;\alpha) = \frac{2c\alpha^2 y}{(\alpha(n-1)+\alpha y+yz)^3} - \frac{2c\alpha^2 y}{(\alpha n + \alpha y + yz)^3}, \qquad y, z \geq 0.$$

ج. با استفاده از رابطه (۱۴)، تابع چگالی توأم آماره‌های مرتب و متغیرهای همراه متناظر آنها به فرم زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} &f_{W_{[1:n]},\ldots,W_{[n:n]},X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(w_1,\ldots,w_n,x_1,\ldots,x_n;\alpha) \\ &= n!\alpha^{2n}\Big(\prod_{i=1}^n x_i^2 y_i\Big)\exp\Big\{-\sum_{i=1}^n x_i(\alpha + \alpha y_i + y_i z_i)\Big\}. \end{aligned} \tag{۱۶}$$

تذکر ۵ : با استفاده از (۱۵)، تابع چگالی $Y_{[k:n]}$، متغیر همراه تک بعدی متناظر با $X_{k:n}$ از نمونه $Y_1, \ldots, Y_n$، عبارتست از

$$f_{Y_{[k:n]}}(y) = c\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{(y+n+k-j+1)^2}. \tag{۱۷}$$

همچنین، تابع چگالی $Z_{[k:n]}$، متغیر همراه تک‌بعدی متناظر با $X_{k:n}$ از نمونه $Z_1, \ldots, Z_n$ در رابطه (۱۰) آمده است.

۳ اطلاع فیشر متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها

اطلاع فیشر متغیرهای همراه دو بعدی رکوردهای مستخرج از توزیع شبه‌نمایی سه متغیره در این بخش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

لم ۱ : فرض کنید $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots$ دنباله‌ای از بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره با تابع چگالی توأم (۱) باشند. در این‌صورت، میزان اطلاع فیشر $\mathbf{R}_{[k]}$ در خصوص پارامتر α عبارتست از

$$\alpha^2 I_{R_{[k]}}(\alpha) = \frac{k+1}{k+3}. \tag{۱۸}$$

برهان : با استفاده از (۱) و (۷) و انجام برخی اعمال جبری نشان داده می‌شود

$$I_{R_{[k]}}(\alpha) = \frac{(k+1)}{\alpha^2} - (k+2)E\Big(\frac{1+R^Y_{[k]}}{\alpha+\alpha R^Y_{[k]}+R^Y_{[k]}R^Z_{[k]}}\Big)^2. \tag{۱۹}$$

با استفاده مجدد از رابطه (۷)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{1+R^Y_{[k]}}{\alpha+\alpha R^Y_{[k]}+R^Y_{[k]}R^Z_{[k]}}\Big)^2 &= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{k(k+1)\alpha^{k+1}y(1+y)^2}{(\alpha+\alpha y+yz)^{k+4}}dzdy \\ &= \frac{k(k+1)}{\alpha^2(k+3)}\int_0^\infty (1+y)^{-k-1}dy \\ &= \frac{(k+1)}{(k+3)\alpha^2}. \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با جایگذاری (۲۰) در (۱۹)، نتیجه حاصل می‌شود.

همان‌طور که در رابطه (۱۸) دیده می‌شود میزان اطلاع فیشر $\mathbf{R}_{[k]}$ در مورد پارامتر α نسبت به k صعودی است.

تذکر ۶ : در خصوص اطلاع فیشر رکوردهای بالای مستخرج از توزیع شبه‌نمایی و اطلاع فیشر متغیرهای همراه تک بعدی متناظر آنها روابط زیر برقرار هستند:

الف. با توجه به (۶)،

$$\alpha^{۲} I_{R_k}(\alpha) = k. \tag{۲۱}$$

ب. با استفاده از (۱۰)،

$$\alpha^{۲} I_{R^Z_{[k]}}(\alpha) = \frac{۱}{۳}. \tag{۲۲}$$

ج. بنابر (۹) ملاحظه می‌شود که چگالی $R^Y_{[k]}$ به پارامتر α بستگی ندارد. لذا، این آماره اطلاعی در خصوص α نیز نخواهد داشت، یعنی

$$I_{R^Y_{[k]}}(\alpha) = ۰. \tag{۲۳}$$

فرع ۱ : از مقایسه روابط (۲۲) و (۲۳) با رابطه (۱۸) نتیجه می‌شود که میزان اطلاع فیشر متغیرهای همراه دو بعدی رکوردهای بالا، در خصوص پارامتر α نسبت به متغیرهای همراه تک‌بعدی بسیار بیشتر است که این موضوع اهمیت استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی را روشن می‌سازد.

قضیه ۱ : تحت مفروضات لم ۱،

$$\alpha^{۲} I_{R_{[k]},R_k}(\alpha) = ۱ + \alpha^{۲} I_{R_k}(\alpha). \tag{۲۴}$$

برهان : بنابر (۲)

$$\ln f_{R_{[k]},R_k}(y,z,x) = \ln f_{Y,Z|X}(y,z|x) + \ln f_{R_k}(x).$$

بنابراین،

$$I_{R_{[k]},R_k}(\alpha) = I_{Y,Z|X}(\alpha) + I_{R_k}(\alpha).$$

از طرفی با استفاده از (۱) و (۲)، $\alpha^{۲} I_{Y,Z|X}(\alpha) = ۱$ و اثبات کامل است.

تذکر ۷ : با توجه به (۲۱) و (۲۴)، میزان اطلاع فیشر $(\mathbf{R}_{[k]}, R_k)$ در خصوص پارامتر α عبارتست از

$$\alpha^{۲} I_{R_{[k]},R_k}(\alpha) = k + ۱. \tag{۲۵}$$

فرع ۲ : از مقایسه روابط (۱۸) و (۲۵)، نتیجه می‌شود میزان اطلاع نسبی $(\mathbf{R}_{[k]}, R_k)$ نسبت به $\mathbf{R}_{[k]}$ در مورد پارامتر α برابر $k + ۳$ می‌باشد. به عبارتی، با استفاده از $(\mathbf{R}_{[k]}, R_k)$ در مقایسه با $\mathbf{R}_{[k]}$ کارآیی استنباط در خصوص α بیشتر می‌شود.

با استفاده از روابط (۱) و (۸)، میزان اطلاع فیشر متغیرهای تصادفی $(\mathbf{R}_{[۱]}, \ldots, \mathbf{R}_{[n]}, R_۱, \ldots, R_n)$ در خصوص پارامتر α عبارتست از

$$\alpha^{۲} I_{R_{[۱]},\ldots,R_{[n]},R_۱,\ldots,R_n}(\alpha) = ۲n. \tag{۲۶}$$

همچنین، در مورد میزان اطلاع فیشر نخستین n رکورد بالا از دنباله X_iها در توزیع شبه‌نمایی رابطه زیر برقرار است

$$\alpha^{۲} I_{R_۱,\ldots,R_n}(\alpha) = n. \tag{۲۷}$$

با توجه به روابط (۲۶) و (۲۷)، به سادگی نتیجه می‌شود میزان اطلاع فیشر نخستین n رکورد بالا و متغیرهای همراه متناظر با آنها دو برابر اطلاع فیشر نخستین n رکورد بالا در خصوص پارامتر α است.

فرع ۳ : از مقایسه روابط (۲۱) و (۲۷)، ملاحظه می‌شود که اطلاع فیشر kامین رکورد بالا با اطلاع فیشر نخستین k رکورد بالا برابر است که این مطلب بسنده بودن R_k در مجموعه $\{R_۱, \ldots, R_k\}$ را اثبات می‌کند.

۴ اطلاع فیشر متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب

در این بخش، به محاسبه میزان اطلاع فیشر متغیرهای همراه آماره‌های مرتب در نمونه تصادفی از توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره پرداخته می‌شود.

لم ۲ : فرض کنید $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots, (X_n, Y_n, Z_n)$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی (۱) باشد. در این‌صورت، میزان اطلاع فیشر $\mathbf{W}_{[k:n]} = (Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})$ در مورد پارامتر α عبارتست از

$$\alpha^2 I_{W_{[k:n]}}(\alpha) = 2 - 6\varphi_1(n,k) + 18\varphi_2(n,k),$$

که در آن

$$\varphi_1(n,k) = c\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{(n-k+j+1)},$$

$$\varphi_2(n,k) = c\int_0^\infty\int_0^\infty y\frac{(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{(n-k+j+1+y)}{(n-k+j+1+y(1+t))^4})^2}{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{(n-k+j+1+y(1+t))^3}}dydt.$$

برهان : با استفاده از (۱) و (۱۵) می‌توان نشان داد

$$I_{W_{[k:n]}}(\alpha) = \frac{2}{\alpha^2} - 12E(\psi^{(1)}_{(n,k)}(Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})) + 9E(\psi^{(2)}_{(n,k)}(Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})),$$

که در آن

$$\psi^{(1)}_{(n,k)}(y,z) = \frac{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{(n-k+j+1+y)^2}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^5}}{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^3}},$$

$$\psi^{(2)}_{(n,k)}(y,z) = (\frac{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{(n-k+j+1+y)}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^4}}{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^3}})^2.$$

با استفاده مجدد از (۱۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&E(\psi^{(1)}_{(n,k)}(Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})) \\
&\quad = 2c\alpha^2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\binom{k-1}{j}(n-k+j+1+y)^2 y}{(\alpha(n-k+j+1)+\alpha y+yz)^5}dzdy \\
&\quad = \frac{c}{2\alpha^2}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{(n-k+j+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E(\psi^{(2)}_{(n,k)}(Y_{[k:n]}, Z_{[k:n]})) \\
&\quad = 2c\alpha^2\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{(n-k+j+1+y)}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^4})^2}{\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}\frac{1}{((n-k+j+1)\alpha+\alpha y+yz)^3}}dydz.
\end{aligned}$$

اکنون، با اعمال تغییر متغیر $t = \frac{z}{\alpha}$ در روابط فوق نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. در جدول ۱، مقادیر عددی $\alpha^{۲} I_{\mathbf{W}_{[k:n]}}(\alpha)$ برای سه آماره مرتب اول و سه مقدار n ارائه شده است.

جدول ۱: مقادیر $\alpha^{۲} I_{\mathbf{W}_{[k:n]}}(\alpha)$ به ازای برخی مقادیر n و k.

	n		
k	۵	۱۰	۱۵
۱	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۵۰
۲	۰/۵۱	۰/۵۳	۰/۵۴
۳	۰/۶۰	۰/۶۱	۰/۵۵

تذکر ۸ : در خصوص اطلاع فیشر آماره‌های مرتب و متغیرهای همراه تک بعدی متناظر با آنها برای نمونه‌ای به حجم n از توزیع شبه‌نمایی سه متغیره روابط زیر برقرار هستند:

الف. با استفاده از (۱۴)،

$$\alpha^{۲} I_{X_{k:n}}(\alpha) = \begin{cases} ۱ & k = ۱ \\ h_{۱}(n,k) & k = ۲ \\ h_{۲}(n,k) & k \geq ۳ \end{cases} \tag{۲۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned} h_{۱}(n,k) &= ۱ + c\int_{۰}^{\infty} \frac{y^{n-۱}}{۱+y} \log^{۲}(y)dy, \\ h_{۲}(n,k) &= ۱ + ۲c(k-۱)\sum_{j=۰}^{k-۲}(-۱)^{j}\binom{k-۱}{j}\frac{۱}{(n-k+j+۲)^{۳}} \\ &\quad +۲c(k-۱)\sum_{j=۰}^{k-۳}(-۱)^{j}\binom{k-۱}{j}\frac{۱}{(n-k+j+۳)^{۳}}. \end{aligned}$$

ب. با توجه به (۱۰)،

$$\alpha^{۲} I_{Z_{[k:n]}}(\alpha) = \frac{۱}{۳}. \tag{۲۹}$$

ج. بنا به (۱۷)، ملاحظه می‌شود که چگالی $Y_{[k:n]}$ به پارامتر α بستگی ندارد. بنابراین این آماره اطلاعی در خصوص α نیز نخواهد داشت، یعنی

$$\alpha^{۲} I_{Y_{[k:n]}}(\alpha) = ۰.$$

فرع ۴ : از مقایسه رابطه (۲۹) با جدول ۱ نتیجه می‌شود که میزان اطلاع فیشر متغیرهای همراه دوبعدی متناظر با $X_{k:n}$ بیشتر از متغیر همراه تک بعدی $Z_{[k:n]}$ است.

قضیه ۲ : تحت مفروضات لم ۲،

$$\alpha^{۲} I_{X_{k:n}, W_{[k:n]}}(\alpha) \quad = \quad ۱ + \alpha^{۲} I_{X_{k:n}}(\alpha). \qquad (۳۰)$$

برهان : اثبات مشابه قضیه ۱ است.

تذکر ۹ : با توجه به روابط (۲۸) و (۳۰)، به سادگی میزان اطلاع فیشر آماره مرتب kام و متغیرهای همراه متناظر با آن، در خصوص پارامتر α محاسبه می‌شود.

مقادیر $\alpha^{۲} I_{X_{k:n}, \mathbf{W}_{[k:n]}}(\alpha)$ برای برخی انتخاب‌های n و k در جدول ۸، نمایش داده شده و از آن نتایج زیر حاصل می‌شوند:

الف. به‌ازای مقدار ثابت k، میزان اطلاع فیشر آماره مرتب kام و متغیرهای همراه متناظر آن با افزایش حجم نمونه افزایش می‌یابد.

ب. به‌ازای مقدار ثابت n، میزان اطلاع فیشر آماره مرتب kام و متغیرهای همراه متناظر آن با افزایش مقدار k ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد. همان طور که در جدول ۸ مشاهده می‌شود در نمونه به حجم $n = ۵$، آخرین آماره مرتب و متغیرهای همراه متناظر آن حاوی بیشترین اطلاع در خصوص پارامتر α هستند، اما در نمونه‌ای به حجم $n = ۱۰$، نهمین آماره مرتب و متغیرهای همراه آن و همچنین در نمونه‌ای به حجم $n = ۱۵$، سیزدهمین آماره مرتب و متغیرهای همراه متناظر با آن حاوی بیشترین اطلاع در مورد پارامتر α می‌باشند. نتایج حاصل از محاسبات عددی با

نرم‌افزار R که در جدول ۸ ارائه شده‌اند، حاکی از آن است که با افزایش حجم نمونه آماره مرتبی که حاوی بیشترین اطلاع در خصوص پارامتر α است از بزرگترین آماره مرتب دورتر می‌شود. اکنون برای مقایسه میزان اطلاع فیشر آماره‌های مرتب توأم و

جدول ۲: مقادیر $\alpha^{۲} I_{X_{k:n}, \mathbf{W}_{[k:n]}}(\alpha)$ به ازای مقادیر مختلف n و k.

n			
۱۵	۱۰	۵	k
۳/۹۹	۳/۹۷	۳/۸۷	۳
۴/۹۷	۴/۹۳	۴/۵۶	۴
۵/۹۴	۵/۸۴	۴/۶۶	۵
۶/۸۹	۶/۶۷		۶
۷/۸۰	۷/۳۸		۷
۸/۶۸	۷/۸۵		۸
۹/۴۷	۷/۸۷		۹
۱۰/۱۸	۶/۸۵		۱۰
۱۰/۷۵			۱۱
۱۱/۱۰			۱۲
۱۱/۱۱			۱۳
۱۰/۴۸			۱۴
۸/۵۱			۱۵

متغیرهای همراه متناظر آنها، با استفاده از (۱) و (۱۶) خواهیم داشت

$$\alpha^{۲} I_{W_{[۱:n]},\ldots,W_{[n:n]},X_{۱:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha) = ۲n. \qquad (۳۱)$$

همچنین بنا به (۱) و (۱۱)،

$$\alpha^{۲} I_{X_{۱:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha) = n. \qquad (۳۲)$$

با توجه به روابط (۳۱) و (۳۲)، ملاحظه می‌شود که استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب در کنار این آماره‌ها، میزان اطلاع فیشر در خصوص پارامتر α را تا دو برابر افزایش می‌دهد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله توابع چگالی متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب و رکوردها برای توزیع‌های پیوسته تعیین شدند و با در نظر گرفتن توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره اطلاع فیشر این متغیرها محاسبه شد. اهم نتایج به‌دست آمده عبارتند از

• اطلاع فیشر kامین رکورد (آماره مرتب) و متغیرهای همراه دو بعدی متناظر آن همواره از اطلاع فیشر kامین رکورد (آماره مرتب) به تنهایی بیشتر است، لذا در صورت امکان، استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب و رکوردها در کنار این آماره‌ها برای استنباط در خصوص پارامتر مورد نظر توصیه می‌شود.

• اطلاع فیشر متغیرهای همراه دو بعدی رکوردها (آماره‌های مرتب) همواره از اطلاع فیشر متغیرهای همراه تک بعدی آنها بیشتر است.

• استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی نخستین n رکورد بالا (کلیه آماره‌های مرتب) در کنار این آماره‌ها، میزان اطلاع فیشر را تا دو برابر افزایش می‌دهد.

• نخستین n رکورد بالا و متغیرهای همراه متناظر آن‌ها و کلیه آماره‌های مرتب در نمونه‌ای به حجم n و متغیرهای همراه متناظرشان از دیدگاه اطلاع فیشر کارآیی یکسانی دارند. این موضوع در مورد آماره‌های بیان شده بدون در نظر گرفتن متغیرهای همراه نیز برقرار است. بنابراین، با توجه به اینکه دستیابی به رکوردها مستلزم صرف زمان و هزینه بیشتری است، استفاده از آماره‌های مرتب و متغیرهای همراه آنها برای استنباط در خصوص پارامتر مورد نظر توصیه می‌گردد. ذکر این نکته نیز حائز اهمیت است که در شرایطی که دستیابی به آماره‌های مرتب و متغیرهای همراه آنها امکان پذیر نباشد، باید از آماره‌های رکوردی استفاده شود.

در فرم کلی توزیع شبه‌نمایی سه‌متغیره، با انتخاب‌های متفاوت برای $\phi_1(x)$ و $\phi_2(x,y)$ می‌توان توزیع‌های متنوعی به‌دست آورد. با انتخاب‌های $\phi_1(x) = \alpha x$ و $\phi_2(x,y) = xy$ نشان داده شد که استفاده از متغیرهای همراه در کنار داده‌های ترتیبی بر میزان اطلاع فیشر در مورد پارامتر α می‌افزاید. انتخاب‌های دیگری برای این دو تابع می‌تواند در نظر گرفته شود، که در ذیل به دو مورد آن اشاره می‌شود.

۱ – چنانچه $\phi_1(x) = x$ و $\phi_2(x,y) = xy$ انتخاب شوند، مشابه قضایای ۱ و ۲

نتیجه می‌شود

$$I_{R_{[k]},R_k}(\alpha) = I_{R_k}(\alpha), \qquad I_{W_{[k:n]},X_{k:n}}(\alpha) = I_{X_{k:n}}(\alpha).$$

همچنین مشابه روابط (۲۶) و (۳۱) می‌توان نشان داد

$$I_{R_{[1]},\ldots,R_{[n]},R_1,\ldots,R_n}(\alpha) = I_{R_1,\ldots,R_n}(\alpha),$$
$$I_{W_{[1:n]},\ldots,W_{[n:n]},X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha) = I_{X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha).$$

یعنی استفاده از متغیرهای همراه در کنار داده ترتیبی هیچ تاثیری در افزایش میزان اطلاع در خصوص پارامتر α ندارد.

۲- به‌ازای انتخاب‌های $\phi_1(x) = \alpha x$ و $\phi_2(x,y) = \alpha xy$ نتیجه می‌شود که اولا متغیرهای همراه دو بعدی رکوردها و آماره‌های مرتب به تنهایی هیچ اطلاعی در مورد پارامتر توزیع ندارند، یعنی $I_{\mathbf{R}_{[k]}}(\alpha) = 0$ و $I_{\mathbf{W}_{[k:n]}}(\alpha) = 0$.

ثانیا استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی رکوردها و آماره‌های مرتب در کنار این آماره‌ها میزان اطلاع فیشر در مورد پارامتر مورد نظر را دو واحد افزایش می‌دهد، یعنی

$$\alpha^2 I_{R_{[k]},R_k}(\alpha) = 2 + \alpha^2 I_{R_k}(\alpha), \qquad \alpha^2 I_{W_{[k:n]},X_{k:n}}(\alpha) = 2 + \alpha^2 I_{X_{k:n}}(\alpha).$$

همچنین مشابه روابط (۲۶) و (۳۱) می‌توان نشان داد

$$\alpha^2 I_{R_{[1]},\ldots,R_{[n]},R_1,\ldots,R_n}(\alpha) = 2n + \alpha^2 I_{R_1,\ldots,R_n}(\alpha) = 3n,$$
$$\alpha^2 I_{W_{[1:n]},\ldots,W_{[n:n]},X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha) = 2n + \alpha^2 I_{X_{1:n},\ldots,X_{n:n}}(\alpha) = 3n.$$

یعنی با استفاده از متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های رکوردی و آماره‌های مرتب در کنار خود این آماره‌ها میزان اطلاع فیشر در خصوص پارامتر α سه برابر می‌شود.

لازم به ذکر است که در عمل موقعیت‌هایی وجود دارند که در یک تحقیق بیش از دو متغیر اصلی موجود است، طوری‌که حضور همه آنها در استنباط الزامی است. بدیهی است که در این شرایط متغیرهای همراه تک‌بعدی داده‌های ترتیبی قابل استفاده نیستند. در چنین مواقعی مسئله استفاده از متغیرهای همراه چندبعدی داده‌های ترتیبی مطرح می‌شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند.

مراجع

خطیب، ب.، رزمخواه، م. و احمدی، ج. (۱۳۸۳)، اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های ترتیبی توزیع بر نوع دوازده، اندیشه آماری، **۹**، ۴۰-۳۲.

رزمخواه، م. (۱۳۸۲)، اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی توزیع بر نوع دوازده، اندیشه آماری، **۸**، ۲۵-۱۷.

رزمخواه، م.، احمدی، ج. و خطیب، ب. (۱۳۸۶)، مقایسه دو روش استخراج رکوردها از دیدگاه اطلاع فیشر، مجله علوم آماری، **۱**، ۴۴-۱۹.

Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2001), On the Fisher Information in Record Values, *Metrika*, **53**, 195-206.

Ahsanullah, M. (1994), Record Values, Random Record Models and Concomitants, *Journal of Statistical Research*, **28**, 89-101.

Ahsanullah, M. (2000), Concomitants of Record Values, *Pakistan Journal of Statistics*, **16**, 207-215.

Amini, M., Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2012), Fisher Information in Bivariate Record Values from a Sample of Fixed Size, *Statistics*, **46**, 23-39.

Amini, M., Ahmadi, J. and Razmkhah, M. (2011), Fisher Information in Record values and Their Concomitants: A Comparison of Two Sampling Schemes, *Communications in Statistics Theory and Methodes*, **40**, 1-17.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Recordes*, John Wiley Sons, New York.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (2008), *A First Course in Order Statistics*, Philadelfia: SIAM.

Balakrishnan, N. and Stepanov, A. (2006), On the Fisher Information in Record Data, *Statistics and Probability Letters*, **76**, 537-545.

David, H. A. and Nagaraja H. N. (1988), *Concomitants of Order Statistics*, Handbook of statistics, **16**, 487-513.

Filus, J.K. and Filus, A. (2000), A Class of Generalized Multivariate Normal Densities, *Pakistan Journal of Statistics*, **16**, 11-32.

Filus, J.K. and Filus, A. (2006), On Some New Class of Multivariate Probability Distributions, *Pakistan Journal of Statistics*, **22**, 21-42.

Raqab, M. Z. and Ahsanullah, M. (2002), Concomitants of Random Order Variables-A review, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **1**, 15-26.

Stepanov, A. V., Balakrishnan, N. and Hofmann, G. (2003), Exact Distribution and Fisher Information of Weak Record Values, *Statistics and Probability Letters*, **64**, 69-81.

Shahbaz, M. Q., Shabaz, S., Mohsin, M. and Rafiq, A. (2010), On Distribution of Biavariate Concomitants of Records, *Applied Mathematics Letters*, **23**, 567-570.