

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵

جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۸۱-۹۴

DOI: 10.7508/jss.2016.01.005

تعمیم جدید توزیع وایبول

علی دوستمرادی^۱، محمدرضا زادکرمی^۱، عارف خنجری عیدنک^۱، زهرا فریدونی^۲
^۱ گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز
^۲ گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۳/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۷/۲۱

چکیده: در این مقاله توزیعی جدید بر مبنای توزیع وایبول ارائه می‌شود. این توزیع دارای سه پارامتر است که نرخ شکست‌های صعودی، نزولی، وان شکل، تک‌مدی و صعودی نزولی صعودی را شامل می‌شود. سپس خواص توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد آنگاه با استفاده از یک مجموعه داده واقعی ویژگی‌های آن با برخی از تعمیم‌های توزیع وایبول مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع تعمیم‌یافته وایبول، نرخ شکست، گشتاورها، برآورد ماکسیمم درستنمایی.

۱ مقدمه

توزیع وایبول به علت داشتن نرخ شکست ثابت، نزولی و صعودی نقش مهمی در تحلیل داده‌های طول عمر ایفا می‌کند. با بسط توزیع وایبول، توزیع‌های جدیدی معرفی شده است که نرخ شکست‌های غیر یکنوا را شامل می‌شوند و به عنوان رقیبی برای توزیع‌های دو پارامتری طول عمر رایج مانند وایبول، گاما و لگ‌نرمال محسوب می‌شوند. از جمله این

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: علی دوستمرادی، ali.doostmoradi@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲۴۱۰

تعمیم‌ها می‌توان به توزیع‌هایی با نرخ شکست وان شکل هاپتا و اسکابل (۱۹۹۲)، توزیع‌های جدید بر مبنای وایبول راجارشی و راجارشی (۱۹۸۸)، توزیع وایبول نمایی توسط مادهولکر و همکاران (۱۹۹۶-۱۹۹۵)، توزیع وایبول تعمیم‌یافته توسط زای و لای (۱۹۹۵)، زای و همکاران (۲۰۰۲)، توزیع وایبول اصلاح‌شده توسط لای و همکاران (۲۰۰۳)، توزیع رایلی تعمیم‌یافته توسط کاندو و راکاب (۲۰۰۵)، توزیع بسط وایبول توسط بیسینگتون و همکاران (۲۰۰۷)، توزیع وایبول اصلاح‌شده سارهان و زیندین (۲۰۰۹)، توزیع تعمیم‌یافته وایبول کاراسکو و همکاران (۲۰۰۸)، توزیع بتا وایبول اصلاح‌شده توسط سیلوا و همکاران (۲۰۱۰) و توزیع تعمیم‌یافته وایبول معکوس توسط فیلیپی و همکاران (۲۰۱۱) اشاره کرد. در میان سایر دانشمندان فام و لای (۲۰۰۷) مرور خوبی بر توزیع‌های وایبول داشتند. در این مقاله به معرفی یک توزیع سه پارامتری جدید بر مبنای توزیع بیسینگتون و همکاران (۲۰۰۷) تحت عنوان تعمیم جدید توزیع وایبول می‌پردازیم و شکل تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک مدی، دو مدی نیز می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه توزیع جدید دارای سه پارامتر می‌باشد نرخ شکست‌های متفاوتی را شامل می‌شود. نرخ شکست‌های نزولی، صعودی، وان شکل، تک مدی و صعودی نزولی صعودی که این امر به انعطاف‌پذیری توزیع جدید می‌افزاید. در این مقاله ابتدا، در بخش ۲ به معرفی توزیع جدید، تابع بقا، تابع نرخ شکست، تابع گشتاور مرکزی، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درست‌نمایی می‌پردازیم، در بخش ۳ با استفاده از یک مثال کاربردی توزیع جدید را با برخی توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول مقایسه می‌کنیم و در بخش ۴ به نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲ تعمیم جدید توزیع وایبول

بیسینگتون و همکاران (۲۰۰۷) تابع توزیع بسط وایبول^۱ را به صورت

$$F(t) = 1 - e^{-exp(\lambda t - \beta t^{-1})}, \quad \lambda \geq 0, \beta \geq 0, t > 0$$

ارائه نمودند. تابع چگالی و تابع نرخ شکست این توزیع که با نماد $WE(\lambda, \beta)$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$f(t) = (\lambda + \beta t^{-2}) e^{\lambda t - \beta t^{-1} - exp(\lambda t - \beta t^{-1})} \quad t > 0$$

$$h(t) = (\lambda + \beta t^{-2}) e^{\lambda t - \beta t^{-1}}$$

^۱ Weibull Extension distribution

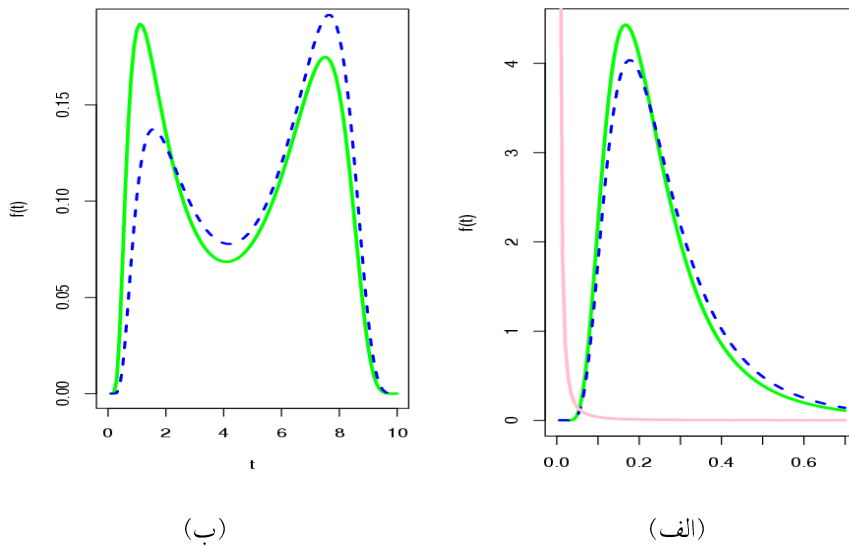
است. شکل تابع چگالی آن نزولی، تک‌مندی و شکل تابع شکست آن نزولی، صعودی و صعودی نزولی صعودی است. تعمیم جدید توزیع وایبول^۲ $GW(\lambda, \beta, \gamma)$ به صورت

$$F(t) = 1 - e^{-exp(\lambda t^\gamma - \beta t^{-1})}, \quad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

و تابع چگالی آن به صورت

$$f(t) = (\lambda \gamma t^{\gamma-1} + \beta t^{-2}) e^{\lambda t^\gamma - \beta t^{-1} - exp(\lambda t^\gamma - \beta t^{-1})} \quad t > 0 \quad (1)$$

است، که در آن λ و β پارامترهای مقیاس و γ پارامتر شکل هستند. با اضافه کردن پارامتر γ شکل هندسی تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک‌مندی، دوامدی نیز می‌شود. همچنین شکل هندسی تابع نرخ شکست آن علاوه بر نزولی، صعودی و صعودی نزولی را صعودی، تک‌نما و وان شکل را نیز شامل می‌شود. در شکل ۴ فرم‌های مختلف تابع چگالی را برای مقادیر انتخابی پارامترها رسم شده است.



شکل ۴: تابع چگالی احتمال توزیع GW به ازای مقادیر مختلف پارامترها الف: تابع چگالی نزولی و تک‌مندی و ب: تابع چگالی دوامدی

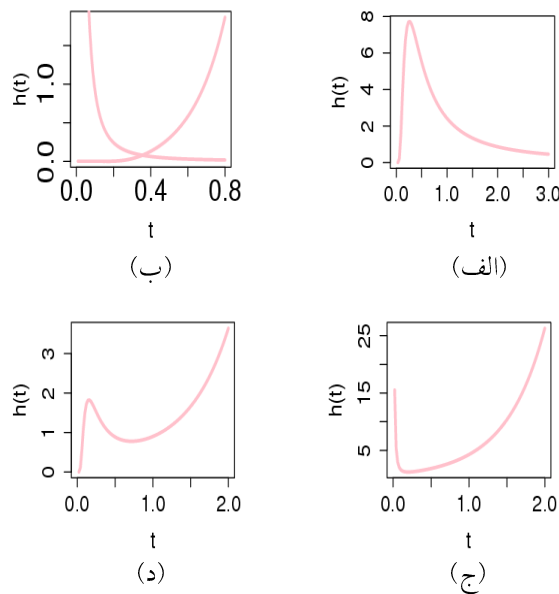
$$S(t) = 1 - F_T(t) = e^{-exp(\lambda t^\gamma - \beta t^{-1})}, \quad t > 0$$

^۲ Generalization Weibull distribution

$S(t)$ تابع بقا توزیع می‌باشد و تابع نرخ شکست توزیع GW نیز به صورت

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = (\lambda\gamma t^{\gamma-1} + \beta t^{-2})e^{\lambda t^\gamma - \beta t^{-1}}$$

است. برای رسم نمودار هندسی نرخ شکست تجربی داده‌ها، تبدیل TTT که توسط بارلو و کامپو (۱۹۷۵) معرفی شده است که با تشخیص نرخ شکست داده‌ها به صورت تجربی در انتخاب مدلی با نرخ شکست مناسب کاربرد دارد. اگر تغییر شکل تجربی TTT کوژ، کاو، کوژ سپس کاو آنگاه شکل تابع نرخ شکست برای داده به ترتیب نزولی، صعودی، وان شکل، تک مدی و صعودی نزولی صعودی است. شکل ۲ تابع نرخ شکست توزیع GW به ازای مقادیر مشخصی از پارامترهای مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۲: تابع نرخ شکست توزیع GW به ازای مقادیر مختلف پارامترها الف: تابع نرخ شکست نزولی و صعودی، ب: تابع نرخ شکست تک مدی، ج: تابع نرخ شکست صعودی نزولی و د: تابع نرخ شکست وان شکل

۱.۲ تابع گشتاور معمولی

گشتاور مرتبه r ام توزیع GW عبارت است از

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(T^r) \\ &= \int_0^\infty t^r f(t; \theta) dt \\ &= \int_0^\infty t^r (\lambda \gamma t^{\gamma-1} + \beta t^{-\gamma}) e^{\lambda t^\gamma - \beta t^{-1} - \exp(\lambda t^\gamma - \beta t^{-1})} dt \quad (2) \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت‌های

$$\begin{aligned} e^{-e^{\lambda t^\gamma - \beta t^{-1}}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j e^{\lambda j t^\gamma - j \beta t^{-1}}}{j!} \\ e^{-(j+1)\beta t^{-1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (j+1)^k \beta^k t^{-k}}{k!} \\ e^{\lambda t^\gamma (j+1)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda)^i t^{i\gamma} (j+1)^i}{i!} \end{aligned}$$

در رابطه (۲) و با فرض $t^\gamma = x$ ، $dt = \frac{x^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\gamma} dx$ گشتاور مرتبه r ام توزیع GW برابر است با

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^k (\lambda)^i (-j-1)^{k+i}}{i! k! j!} \left[\lambda \frac{\Gamma(\frac{r+i\gamma-k}{\gamma} + 1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{r+i\gamma-k}{\gamma} + 1}} \right. \\ &+ \left. \frac{\beta}{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{\gamma(i-1)+r-k-\gamma-1}{\gamma} + 1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{\gamma(i-1)+r-k-\gamma-1}{\gamma} + 1}} \right] \end{aligned}$$

امید و واریانس توزیع جدید نیز به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} E(T) = \mu'_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\beta^k (\lambda)^i (-j-1)^{k+i}}{i! k! j!} \left[\lambda \frac{\Gamma(\frac{1+i\gamma-k}{\gamma} + 1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{1+i\gamma-k}{\gamma} + 1}} \right. \\ &+ \left. \frac{\beta}{\gamma} \frac{\Gamma(\frac{\gamma(i-1)-k-\gamma}{\gamma} + 1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{\gamma(i-1)-k-\gamma}{\gamma} + 1}} \right] \\ V(T) &= E(T^2) - E^2(T) = \mu'_2 - \mu_1'^2. \end{aligned}$$

۲.۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید T_i متغیر تصادفی توزیع GW با بردار پارامتر $\theta = (\lambda, \beta, \gamma)^T$ است. براساس نمونه تصادفی t_1, \dots, t_n لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\ell \equiv \ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln(\lambda \gamma t_i^{\gamma-1} + \beta t_i^{-\gamma}) + \sum_{i=1}^n (\lambda t_i^\gamma - \beta t_i^{-\gamma}) - \sum_{i=1}^n \exp(\lambda t_i^\gamma - \beta t_i^{-\gamma})$$

است که با مشتق گیری از آن بر حسب پارامترها و برابر صفر قرار دادن آن‌ها معادلات

$$\ell_\lambda(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\gamma t_i^{\gamma-1}}{\lambda \gamma t_i^{\gamma-1} + \beta t_i^{-\gamma}} - \sum_{i=1}^n t_i^\gamma + \sum_{i=1}^n t_i^\gamma \exp(\lambda t_i^\gamma - \beta t_i^{-\gamma}) = 0$$

$$\ell_\beta(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{-\gamma}}{\lambda \gamma t_i^{\gamma-1} + \beta t_i^{-\gamma}} - \sum_{i=1}^n t_i^{-\gamma} + \sum_{i=1}^n t_i^{-\gamma} \exp(\lambda t_i^\gamma - \beta t_i^{-\gamma}) = 0$$

$$\ell_\gamma(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda \gamma t_i^{\gamma-1} \ln(t_i)}{\lambda \gamma t_i^{\gamma-1} + \beta t_i^{-\gamma}} + \sum_{i=1}^n t_i^\gamma \ln(t_i) - \sum_{i=1}^n \lambda t_i^\gamma \ln(t_i) \exp(\lambda t_i^\gamma - \beta t_i^{-\gamma}) = 0$$

حاصل می‌شوند. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها از حل این معادلات غیرخطی بدست می‌آیند. اما معادلات این فرم بسته‌ای ندارند و بایستی با روش‌های عددی حل شوند. برای تشکیل بازه‌های اطمینان و انجام آزمون فرض درباره پارامترها نیاز به محاسبه ماتریس اطلاع است. با توجه به اینکه محاسبه ماتریس اطلاع مورد انتظار بسیار پیچیده است و نیازمند محاسبه انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان از ماتریس اطلاع مشاهده شده

$$J(\hat{\theta}) = - \begin{pmatrix} \ell_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\lambda}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\lambda}\hat{\gamma}} \\ \ell_{\hat{\beta}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\beta}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} \\ \ell_{\hat{\gamma}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}} \end{pmatrix}$$

استفاده کرد. عناصر این ماتریس، از دو بار مشتق گرفتن از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به تک تک پارامترها محاسبه می‌شوند. برای نمونه با اندازه بزرگ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ ، تحت شرایط نظم (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) دارای توزیع مجانبی نرمال سه متغیره با میانگین θ و ماتریس-کوواریانس برابر عکس ماتریس اطلاع فیشر $I(\theta)$ است. ماتریس اطلاع فیشر $I(\theta)$ با گرفتن امید ریاضی از ماتریس اطلاع مشاهده شده $J(\theta)$ به دست می‌آید. بنابراین

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_3(0, I(\theta)^{-1}).$$

چون ماتریس اطلاع مورد نظر بسیار پیچیده و نیازمند حل انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان آن را با $J(\hat{\theta})$ جایگزین کرد (کاراسکو و همکاران ۲۰۰۸). بنابراین توزیع مجانبی

به صورت

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_{\mathbb{R}}(0, J(\hat{\theta})^{-1})$$

است که با استفاده از آن می توان بازه اطمینان جانبی و ناحیه اطمینان را برای تابع بقا، پارامترها و نرخ شکست تعیین کرد. از آزمون نسبت درستنمایی می توان برای مقایسه توزیع GW با هر یک از زیر توزیع های آن استفاده نمود. در این حالت می توان مقدارهای ماکسیمم درستنمایی را تحت محدودیت و غیر محدودیت محاسبه نمود. برای مثال آزمون فرضیه $H_0: \gamma = 1$ در مقابل $H_1: \gamma \neq 0$ معادل با مقایسه توزیع WE با GW است که آماره نسبت درستنمایی آن به صورت

$$W = 2\{\ell(\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) - \ell(\bar{\lambda}, \bar{\beta}, 1)\}$$

است. $\hat{\lambda}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت فرض H_1 و $\bar{\lambda}, \bar{\beta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت فرض H_0 هستند.

۳ مثال کاربردی

موسسه بازآموزی و اصلاح بزه کاران کلمبیا در یک ابتکار برای جلوگیری از تکرار جرم، یک تکنیک روشن در مواجهه با این مشکل در جامعه استفاده کرده است. این موسسه به تصادف تعدادی مجرم را تحت شرایط، با شرط تکرار نکردن جرم آزاد می کند. زمان تکرار به جرم (به روز) ۵۱ مجرم هستند. این داده ها توسط استولمیک و هریس (۱۹۷۴) مورد تحلیل قرار گرفتند.

۲۲۱، ۲۳۳، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۲۱، ۳۲، ۳۶، ۴۰، ۴۶، ۴۶، ۴۷، ۶۰، ۶۶، ۸۸، ۸۸، ۸۹، ۹۳، ۳۳۷، ۳۴۳، ۳۶۲، ۹۶، ۱۰۷، ۱۱۲، ۱۱۶، ۱۲۲، ۱۴۷، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۹۰، ۲۰۴، ۲۰۷، ۳۶۲، ۳۶۷، ۳۹۶، ۴۲۱، ۲۴۰، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۶۴، ۲۶۷، ۲۷۲، ۲۸۳، ۲۹۱، ۳۰۱، ۳۰۷، ۳۲۰

رفتار توزیع معرفی شده را با چند توزیع تعمیم یافته بر پایه توزیع وایبول مورد مقایسه قرار می دهیم. توابع چگالی این تعمیم ها در جدول ۱ ارائه شده اند.

با برازش این توزیع ها به داده ها با استفاده از معیار اطلاع آکائیک^۳ (AIC) و معیار اطلاع بیزی^۴ (BIC) به مقایسه مدل های برازش شده به داده ها خواهیم پرداخت. معیار اطلاع

^۳ Akaike Information Criterion

^۴ Bayesian Information Criterion

جدول ۱: چند توزیع تعمیم یافته بر پایه توزیع وایبول

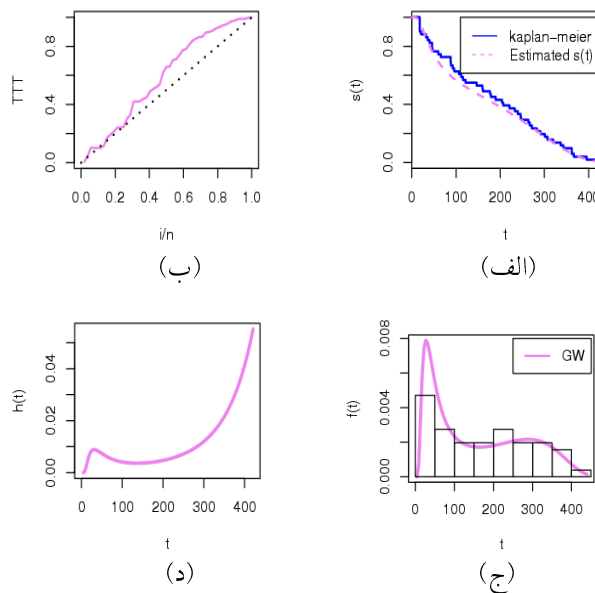
ردیف	توزیع	تابع چگالی
۱	وایبول نمایی (EW)، مادهولکر و همکاران (۱۹۹۵-۱۹۹۶)	$f(t) = \alpha\beta\gamma t^{\gamma-1} \exp(-\alpha t^\gamma) \{1 - \exp(-\alpha t^\gamma)\}^{\beta-1}$ $t > \alpha > 0, \gamma > 0, \beta > 0$
۲	تعمیم وایبول اصلاح شده (GMW)، کاراسکو و همکاران (۲۰۰۸) بتا وایبول (BW)، لی و همکاران (۲۰۰۷)	$f(t) = \frac{\lambda}{B(a,b)} G(t)^{a-1} \{1 - G(t)\}^{b-1} g(t)$ $G(t) = 1 - \exp(-\alpha t^\gamma)$ $g(t) = \alpha\gamma t^{\gamma-1} \exp(-\alpha t^\gamma)$ $t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0, \beta > 0$
۳	بسط وایبول (WE)، ببینگتو و همکاران (۲۰۰۶) بتا وایبول اصلاح شده (BWM) سیلوا م همکاران (۲۰۱۰)	$f(t) = \frac{\lambda}{B(a,b)} G(t)^{a-1} \{1 - G(t)\}^{b-1} g(t)$ $G(t) = 1 - \exp(-\alpha t^\gamma \exp(\lambda t))$ $g(t) = \alpha\gamma t^{\gamma-1} \exp(\lambda t - \alpha t^\gamma \exp(\lambda t))$ $t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \gamma > 0, \beta > 0$
۴	رایلی تعمیم یافته (GR)، کاندو و راکاب (۲۰۰۵)	$f(t) = \alpha\beta\gamma t^{\gamma-1} \exp(-\alpha t^\gamma) \{1 - \exp(-\alpha t^\gamma)\}^{\beta-1}$ $t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$
۵	تعمیم یافته وایبول معکوس (GIW)، فیلیپی و همکاران (۲۰۱۱) توزیع وایبول اصلاح شده (MW)، لای و همکاران (۲۰۰۳)	$f(t) = \alpha\beta\gamma t^{-\lambda-1} \exp(-\alpha\beta t^{-\lambda})$ $t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \beta > 0$ $f(t) = \alpha\beta\gamma t^{\gamma-1} (\gamma + \lambda t) \exp(\lambda t - \alpha t^\gamma \exp(\lambda t))$

آکائیک معیاری برای سنجش نیکویی و برازش است. این معیار نشان می‌دهد که استفاده از یک مدل به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. به عبارت دیگر این معیار تعادلی بین دقت مدل و پیچیدگی آن برقرار می‌کند. معیار AIC توسط هیروتسوگو (۱۹۷۴) و معیار BIC توسط شوارتز (۱۹۷۸) برای انتخاب بهترین مدل به ترتیب به صورت

$$AIC = 2k - 2\ln(L)$$

$$BIC = k\ln(n) - 2\ln(L)$$

معرفی می‌شوند، که در آن‌ها k تعداد پارامترهای مدل است n اندازه نمونه و L مقدار ماکسیمم درست‌نمایی برای مدل برآورد شده است. با توجه به تعاریف فوق مدلی بهتر است که مقدار آکائیک و بیزی کمتری داشته باشد.



شکل ۳: الف: نمودار TTT ، ب: منحنی کاپلان مایربقا، ج: برآورد تابع نرخ شکست و د: بافت‌نگار داده‌ها

مقادیر ارائه شده در جدول ۲ برآورد پارامترها و مقادیر داخل پرانتز انحراف معیار برآورد پارامترها هستند که با مینیمم کردن معادلات درست‌نمایی توسط بسته $fminsearch$ در نرم‌افزار MATLAB برآورد شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود ملاک‌های AIC و BIC توزیع

جدول ۲: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و ملاک ارزیابی

<i>BIC</i>	<i>AIC</i>	\hat{b}	\hat{a}	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	مدل
۶۱۹/۱	۶۱۳/۳	-	-	۶۱/۰۵۷ (۷/۹۱۹)	$۳/۸۲۲e^{-۷}$ ($۷/۹۳e^{-۸}$)	۲/۵۳۹۲ (۰/۰۲۸۸۱)	-	GW
۶۲۸/۳	۶۲۴/۵	-	-	۶۵/۸۹۴ (۸/۵۰۰۲)	$۳/۲۶۲e^{-۳}$ ($۴/۶۱۸e^{-۴}$)	۱	-	WE
۶۳۴/۹	۶۲۶/۲	۰/۴۱۱۳۰ (۰/۰۶۷۴۳)	۰/۲۸۴۷۶ (۰/۰۲۷۱۴)	-	۰/۰۰۱۹۷ ($۳/۶e^{-۳}$)	۱۲/۸۴۰۳۰ (۰/۲۰۴۳)	$۱۱۲۶e^{-۹}$ ($۱۶/۷۲e^{-۹}$)	BMW
۶۳۲/۶	۶۲۴/۸	-	-	۰/۶۴۲۳۸ ۰/۱۷۶۶	۰/۰۰۳۴۸ (۲/۲۹۶۰۳)	۱/۴۹۶۹ (۰/۳۸۹۷)	$۸۸۸e^{-۷}$ ($۱/۹۹۶e^{-۴}$)	GMW
۶۲۹/۲	۶۲۱/۷	۰/۶۶۴۸	۰/۱۰۲	-	-	۸/۴۶۳۳۴ (۰/۰۰۶۲۴)	$۳/۰۳e^{-۲۲}$ ($۷۹/۲e^{-۲۴}$)	BW
۶۲۹/۲	۶۲۳/۴	-	-	-	۰/۰۰۳۱۰ ($۱/۶e^{-۳}$)	۰/۸۸۷۳۱ (۰/۲۴۳۰۸)	۰/۰۰۴۶۴ ($۴/۸e^{-۳}$)	MW
۶۲۶/۶۶	۶۱۹/۷	-	-	۰/۰۹۹۲۶ (۰/۰۲۰۳)	-	۸/۷۶ (۱/۱۹)	$۲/۶۴e^{-۲۳}$ ($۱/۸۹e^{-۲۲}$)	EW
۶۵۱/۴	۶۵۰/۵	-	-	۰/۹۷۶۲ (۰/۰۱۹۲)	۸/۸۲۳ (۰/۱۷۲۹)	-	۷/۳۶۶ (۰/۱۴۴۴)	GIW
۲۶/۸	۶۲۲/۹	-	-	۰/۶۴۹۶۶ (۰/۹۱۱۲)	-	۲	$۱/۴۹۸e^{-۶}$ ($۳/۲۶۱e^{-۶}$)	GR
۶۲۹/۴	۶۲۶/۶	-	-	۰/۰۰۰۷۸ (۰/۰۰۰۶۷)	۱/۳۶۶۲ (۰/۱۶۶۶)	-	۰	W

GW دارای مقادیر کمتر و در نتیجه برازش مناسب تری به داده‌ها است. شکل ۳ (الف) نشان می‌دهد که TTT برای مجموعه داده‌ها کوژ است که بیانگر این است تابع نرخ شکست صعودی است. نمودار کاپلان مایر نیز یک روش تجربی برای مقایسه مدل ارائه شده با داده‌ها به صورت تجربی است. شکل ۳ (ب) که منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا مدل GW رسم شده است که بیانگر برازش خوب مدل GW به داده‌ها است. با توجه به شکل ۳ (ج) برآورد تابع نرخ شکست ابتدا صعودی سپس در بازه‌ای از زمان سیر نزولی و سپس صعودی می‌باشد. ولی در حالت کلی تابع نرخ شکست صعودی است که بیانگر این است که مجرمان با گذر زمان مجدداً مرتکب جرم می‌شوند. شکل ۳، بافت‌نگار داده‌ها را نشان می‌دهد که توزیع GW توزیع مناسب تری برای برازش به داده‌ها است که ملاحظه می‌شود نمودار تابع چگالی معرفی شده روی این داده‌ها شکل دومدی دارد. مقادیر ماتریس واریانس کوواریانس برآورد پارامترها برابر است با

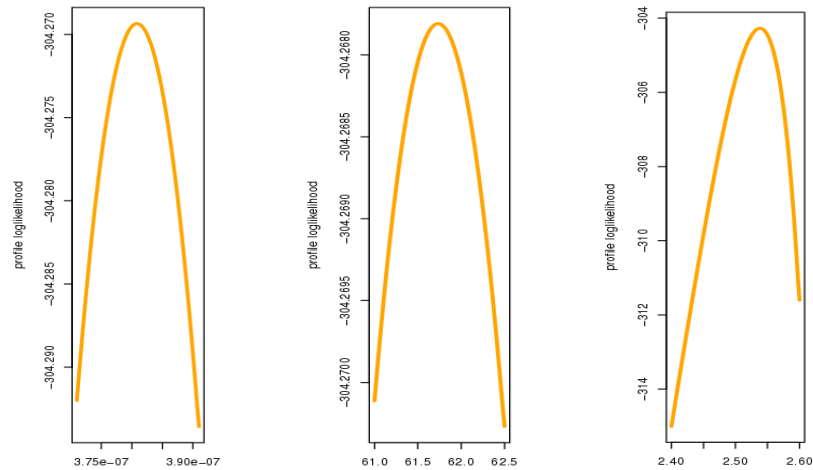
$$I(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} 6/3e^{-15} & -3/74e^{-9} & 2/78e^{-9} \\ -3/74e^{-9} & 62/71 & 0/0182 \\ 2/78e^{-9} & 0/0182 & 8/3e^{-4} \end{pmatrix}$$

مقدارهای ماکسیمم درست‌نمایی را تحت محدودیت و غیر محدودیت محاسبه و مقدار آماره LRT را بدست می‌آوریم. برای مثال آزمون فرضیه $H_0: \gamma = 1$ در مقابل $H_1: \gamma \neq 1$ معادل با مقایسه توزیع WE با GW است که مقدار آماره نسبت درست‌نمایی برابر با $w = 2\{(-303/6) - (-310/2)\} = 13/2$ با $p\text{-value} < 0/01$ است. بنابراین توزیع $GW(\lambda, \beta, \gamma)$ تایید می‌شود. برای اینکه نشان دهیم پارامترهای بدست آمده در معادلات درست‌نمایی یکتا هستند تابع درست‌نمایی نیم‌مرخی^۵ را برحسب پارامترهای λ, β, γ در شکل ۳ رسم شده‌اند. توابع درست‌نمایی نیم‌مرخی بر حسب پارامترهای مختلف بیانگر این است که برآوردهای به دست آمده یکتا هستند.

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله تعمیم جدیدی از توزیع وایبول (GW) معرفی گردید. تابع چگالی GW علاوه بر نزولی و تک نما، دومدی نیز می‌باشد و شکل هندسی تابع نرخ شکست آن نزولی، صعودی، تک نما، وان شکل و صعودی نزولی صعودی می‌باشد که این امر به انعطاف پذیری توزیع می‌افزاید. رفتار ریاضی این توزیع که در برگزیده گشتاور مرکزی، تابع نرخ شکست،

^۵ Profile log-likelihood



شکل ۴: تابع درستنمایی نیم‌رخ برحسب پارامترهای مختلف الف: λ : ب: β : ج: γ

تابع بقا، برآورد پارامترها به روش درستنمایی را محاسبه و کاربرد توزیع پیشنهادی را در قالب یک مثال با برخی توزیع‌های تعمیم‌یافته بر پایه توزیع وایبول مقایسه شد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری و داوران محترم که با راهنمایی‌های خود مقاله را پربار نمودند، کمال تقدیر و تشکر را دارند.

مراجع

- Bebbington, M., Lai, C. D. and Zitikis, R. (2007), A Flexible Weibull Extension. *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 719-726
- Barlow, R. E. and Campo, R. (1975), Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis. In: *Reliability and Fault Tree Analysis*, A Life Society for Industrial and Applied Mathematics, 451-481.
- Carrasco, J. M. F., Ortega, E. M. M. and Cordeiro, G. M. (2008), A Generalized Modified Weibull Distribution for Lifetime Modeling, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 450-462.

- Felipe, R. S., Edwine, M. M. O. and Cordeiro, M. (2011), The Generalized Inverse Weibull Distribution, *Statistical Paper*, **52**, 591-619.
- Haupt, E. and Schable, H. (1992), A New Model for a Lifetime Distribution with Bathtub Shaped Failure Rate, *Microelectronics and Reliability*, **32**, 633-639.
- Hirotagu, A. (1974), A New Book at The Statistical Mdel Identification, *IEEE Transecations on Automatic Control*, **19**, 716-723.
- Kundu, D. and Rakab, M. Z. (2005), Generalized Rayleigh Distribution: Different Methods of Estimtion, *Computational Statistics and Data Analysis*, **49**, 187-200.
- Lai, C. D, Xie, M. and Murthy, D. N. P. (2003), A Modified Weibull Distribution, *IEEE Transaction on Reliability*, **52**, 33-37.
- Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, 2ndEdn Chpman and Hall New York.
- Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K. and Kollia, G.D. (1996), A Generalization of the Weibull Distribution with Application to the Analysis of Survival Data, *Journal of American Statistical Association*, **91**, 1575-1583.
- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. and Friemer, M. (1995), The Exponentiated Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data, *Tecnometrics*, **37** , 436-445.
- Pham, H. and Lai, C. D. (2007), On Recent Generalization of the Weibull Distribution, *IEEE Transaction on Reliability* , **56**,454-458.
- Rajarshi, S., Rajarshi, M. B. (1988), Bathtub Distribution: A Review *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**, 2521-2597.
- Sarhan, A. M. and Zaindin, M. (2009), Reliability analysis Using An Additive Weibull Model white Bathtub-Shaped Failure Rate Function Modified Weibull Distribution, *Applied Sciences*, Vol, **11**, 123-136.
- Silva, G.O., Edwin, M. M. O. and Gauss, M. C. (2010), The Beta Modified Weibull Distribution, *Lifetime Data Analysis*, **16**, 409-430.

تعميم جديد توزيع وايبول..... ٩٤

Schwarz, G. (1978), Estimating the Dimension of a Model, *Annals of Statistics*, **6**, 461-464.

Stollmack, S, Harris, C. M. (1974), Failure-Rate Analysis Applied to Recidivism Data, *Operation Research*, **22**, 1192-1205.

Xie, M. and Lai, C.D. (1995), A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **52**, 87-93.

Xie, M., Tang, Y. and Goh, T.N.(2002), A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **76**, 279-285.