مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۳
جلد ۸، شماره ۲، ص ۲۰۷-۲۲۲

طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی

سحر مهرمنصور، مهرداد نیاپرست
گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱/۱۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۸/۱۴

چکیده : عمده تحقیقات بهینه‌سازی طرح برای مدل‌های با اثرات آمیخته روی طرح‌های بهینه موضعی متمرکز شده است. این طرح‌ها بر اساس حدس اولیه‌ای از پارامترهای مدل صورت می‌گیرد. بنابراین ممکن است بهترین طرح اما بر اساس فرضیات اشتباه به‌دست آید. استفاده از دیدگاه بیزی در حالاتی که اطلاعاتی راجع به پارامترهای مدل موجود است در سال‌های اخیر مورد توجه محققان بوده است. در این مقاله بهینه‌سازی طرح برای مدل رگرسیون پواسون با اثرات آمیخته بر اساس برخی توزیع‌های پیشین پارامتر بررسی خواهد شد و برای دو حالت خاص از این مدل طرح D-بهینه بیزی برای برخی مقادیر مختلف واریانس اثر تصادفی به‌دست آورده می‌شود. نتایج حاصل از این تحقیق با نتایج مربوط به مدل رگرسیونی پواسون بدون اثرات تصادفی مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی : ا ثر تصادفی، تابع مطلوبیت، طرح آزمایش ، مدل رگرسیونی پواسون، D-بهینه بیزی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: سحر مهرمنصور، s.mehrmansour@pgs.razi.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲K۰۵

۱ مقدمه

بهینه‌سازی مسائل مختلف از دیرباز تا کنون سهم عمده‌ای از تحقیقات پژوهشگران را به خود اختصاص داده است. با توجه به اینکه بسیاری از این مسائل برپایه مدل‌های آماری بیان می‌شوند بنابراین بهینه‌سازی طرح آزمایش‌ها مطرح شد.

مسئله بهینه‌سازی طرح آزمایش‌ها ابتدا برای مدل‌های خطی بیان شد (اسمیت، ۱۹۱۸)، اما موقعیت‌های بی‌شماری وجود دارند که فرضیات معمول مدل‌های خطی از جمله نرمال بودن برای آن‌ها برقرار نیست، مانند تعداد سلول‌های سرطانی و.... برای تجزیه و تحلیل چنین داده‌هایی مدل‌های خطی تعمیم‌یافته استفاده شده‌اند (مک‌کولاق و نلدر، ۱۹۹۸). مشکل عمده بهینه‌سازی این مدل‌ها به وابستگی ماتریس اطلاع فیشر به پارامترها مرتبط می‌شود، که چرنوف (۱۹۵۳) طرح بهینه موضعی را برای برطرف کردن این مشکل پیشنهاد داد که در آن یک مقدار اولیه برای پارامترها در نظر گرفته می‌شود و بر اساس آن طرح‌های بهینه به‌دست می‌آید.

طرح‌های بهینه موضعی روی یک مقدار حدس زده شده از پارامترها متمرکز می‌شوند. اما زمانی‌که این مقدار به مقدار واقعی پارامتر نزدیک نباشد، ممکن است طرح به‌دست آمده از این مقادیر بهینه نباشد. بدین جهت طرح‌های بهینه بیزی معرفی شد که در آن از اطلاعات قبلی پارامترها استفاده و یک توزیع پیشین برای پارامترها در نظر می‌گیرد، سپس طرح آزمایش را بهینه می‌کند. لیندلی (۱۹۷۲) روش نظریه تصمیم را ارائه داد و یک اساس ریاضی برای انتخاب طرح‌های بهینه بیزی فراهم آورد. چالونر و لارنتز (۱۹۸۹) یک نظریه متحد را برای طرح بهینه بیزی در مدل‌های غیرخطی ارائه دادند. در ادامه چالونر و وردینلی (۱۹۹۵) یک بازبینی کلی از طرح‌های بهینه بیزی را انجام دادند.

ژانگ و ایی (۲۰۱۴) طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون را ارائه داند. اما در به‌دست آوردن طرح بهینه برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی، عمده مشکل عدم دسترسی به فرم بسته‌ای برای تابع درستنمایی و در نتیجه برای ماتریس اطلاع است که نیاپرست (۲۰۰۹) استفاده از روش شبه‌درستنمایی[۱] را

[۱] Quasi-Likelihood

پیشنهاد داد. نیاپرست و مهرمنصور (۱۳۸۹) طرح D-بهینه موضعی را برای حالت خاصی از مدل رگرسیون پواسون با عرض از مبدأ تصادفی ارائه دادند و نیاپرست و شوابه (۲۰۱۳) طرح D-بهینه موضعی را برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی بررسی کردند.

در این مقاله ابتدا در بخش ۲ به معرفی مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی و ارائه ساختار بردار میانگین و ماتریس کواریانس این مدل خواهیم پرداخت. طرح‌های D-بهینه بیزی در بخش ۳ ارائه می‌گردد. در بخش ۴ طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی بررسی شده است و برای دو حالت خاص از این مدل، مدل رگرسیون پواسون با عرض از مبدأ تصادفی و مدل رگرسیون پواسون با شیب تصادفی برای برخی مقادیر واریانس اثر تصادفی طرح D-بهینه بیزی را به‌دست خواهیم آورد. در بخش آخر کارایی طرح‌های به‌دست آمده نسبت به طرح‌های متناظر بدون اثرات تصادفی بررسی می‌شود.

۲ مدل

مدل

$$Y_{ij}|\boldsymbol{b}_i \overset{ind}{\sim} P(\mu_{ij}^{(\boldsymbol{b}_i)}) \qquad \begin{cases} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, m_i \end{cases} \tag{1}$$

را در نظر بگیرید، که در آن Y_{ij} بیان‌گر jامین مشاهده برای iامین واحد[۲] در نقطهٔ x_{ij} از ناحیهٔ طرح است. این مدل حالت خاصی از مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته است که از فرضیات زیر پیروی می‌کند:

- $\log(\mu_{ij}^{(\boldsymbol{b}_i)}) = \mathbf{f}^T(x_{ij})\mathbf{b}_i$ مشخص‌کننده تابع پیوند کانونی است.
- $\mathbf{f}^T = (f_1, ..., f_p)$ بردار رگرسیونی که شامل توابعی معلوم از x است.
- $\mathbf{b}_i$ بردار اثر تصادفی که دارای توزیع نرمال با بردار p-بعدی میانگین β و ماتریس واریانس-کواریانس Σ است و برای واحدهای مختلف از هم مستقلند.

[۲] Individual

با توجه به استقلال $\mathbf{b}_i$ها مشاهداتی که درون یک واحد قرار می‌گیرند دارای ساختار بردار میانگین و ماتریس کواریانس به‌صورت

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= E(Y_{ij}) = e^{\boldsymbol{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{f}(x_{ij})} \\ Var(Y_{ij}) &= \mu_{ij}^2(e^{\boldsymbol{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{f}(x_{ij})}-1)+\mu_{ij} \\ Cov(Y_{ij},Y_{ij'}) &= \mu_{ij}\mu_{ij'}(e^{\boldsymbol{f}^T(x_{ij})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{f}(x_{ij})}-1) \\ &= \mu_{ij}\mu_{ij'}(c(x_{ij},x_{ij'})) \quad j\neq j' \end{aligned}$$

هستند، که در آن $c(x,x')=e^{\boldsymbol{f}^T(x)\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{f}(x')}-1$ و برای $i\neq i'$، $Cov(Y_{ij},Y_{i'j'})=0$.

بنابراین ماتریس کواریانس $\mathbf{Y}_i=(Y_{i1},\ldots,Y_{im_i})^T$ به‌صورت

$$\boldsymbol{V}_i = var(\boldsymbol{Y}_i) = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{A}_i$$

است، که در آن $\boldsymbol{A}_i = diag(\mu(x_{i1})\boldsymbol{I}_{m_{i1}},\ldots,\mu(x_{it_i})\boldsymbol{I}_{m_{it_i}})$ و $\boldsymbol{C}_i=(c(x_{ij},x_{ij'})\mathbf{1}_{m_{ij}}\mathbf{1}^T_{m_{ij'}})_{j,j'=1,\ldots,t_i}$ (نیاپرست و شوابه، ۲۰۱۳).

اگر $\mathbf{Y}=(\mathbf{Y}_1^T,\ldots,\mathbf{Y}_n^T)^T$ بردار کل مشاهدات باشد با توجه به ناهمبستگی واحدهای مختلف داریم:

$$\boldsymbol{V} = Var(\boldsymbol{Y}) = diag(\boldsymbol{V}_1,\ldots,\boldsymbol{V}_n).$$

یک مدل، یک ساختار ریاضی از یک آزمایش یا یک پدیده تجربی است که ارتباط بین متغیرها و میزان تأثیرپذیری آن‌ها از یکدیگر را نشان می‌دهد که تحت فرض معلوم بودن سطوح متغیر کنترل، تأثیر آن‌ها را روی متغیر پاسخ اندازه‌گیری می‌کند. مسئله هزینه‌های یک آزمایش و میزان اعتماد به نتیجه‌آزمایش پژوهشگران را به این سمت سوق داد که قبل از انجام آزمایش، طرح آزمایش را برای رسیدن به بهترین پاسخ به‌دست آورند.

فرض کنید ξ_i یک طرح تقریبی[۳] برای iامین واحد باشد که می‌تواند بر حسب k_i نقطه مختلف آزمایش به‌صورت

$$\xi_i = \left\{ \begin{array}{c} x_{i1},\ldots,x_{ik_i} \\ p_{i1},\ldots,p_{ik_i} \end{array} \right\}$$

[۳] Approximate design

بیان شود، که در آن x_{ij}ها نقاط تکیه‌گاه طرح و $p_{ij} = \frac{n_{ij}}{m_i}$ نسبتی از نمونه است که در نقطه x_{ij} مشاهده می‌شود. بدیهی است که $\sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} = 1$. هم چنین n_{ij} تعداد تکرارهای نقطه x_{ij} در m_i تکرار از واحد i ام آزمایش می‌باشد.

نیاپرست (۲۰۰۹) نشان داد که اگر ξ_i طرح بهینه برای i امین واحد باشد، آنگاه همه واحدهای مختلف تحت این طرح بهینه هستند. پس کافی است برای یک واحد طرح بهینه به‌دست آورده شود. به‌عبارت دیگر می‌توان اندیس i را از طرح آزمایش ξ_i حذف نمود. روش‌هایی که تاکنون برای پیدا کردن طرح بهینه برای مدل (۱) استفاده شده است همگی مبتنی بر ماکسیمم کردن ماتریس اطلاع فیشر بر اساس ملاک‌های بهینگی است. از آن‌جایی‌که ماتریس اطلاع به پارامترهای مجهول جامعه وابسته است از طرح بهینه موضعی برای به‌دست آوردن طرح بهینه استفاده شده است که در آن یک حدس اولیه برای پارامترهای مجهول در نظر گرفته می‌شود (چرنوف، ۱۹۵۳).

در این مقاله به‌جای این‌که روی یک مقدار اولیه برای پارامترها متمرکز شود با استفاده از دانش قبلی از پارامترها یک توزیع پیشین برای پارامترها در نظر گرفته و با رهیافت بیزی به جستجوی طرح بهینه پرداخته می‌شود.

۳ طرح D-بهینه بیزی

فرض کنید ξ یک طرح آزمایش از مجموعه طرح‌های ممکن Ξ، S فضای نمونه‌ای y و d تصمیم انتخاب شده از مجموعه D باشد. اگر β دارای توزیع پیشین $\pi(\beta)$ باشد، در رهیافت بیز، هدف پیدا کردن طرحی است که مطلوبیت مورد انتظار از بهترین تصمیم، یعنی

$$U(\xi) = \int_S \max_d \int_\Theta u(d, \xi, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y}; \xi) d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{y}$$

را ماکسیمم کند، که در آن $u(d, \xi, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{y})$ تابع مطلوبیت است.

انتخاب تابع مطلوبیتی که مناسب با اهداف آزمایش تحت بررسی باشد از اهمیت زیادی برخوردار است. بیشتر متداول است که مطلوبیت بر حسب اندازه‌ای از اطلاع شانون بیان شود، به‌گونه‌ای‌که ξ^* طرحی است که سود مورد انتظار از اطلاع

شانون را ماکسیمم کند (چالونر و وردینلی، ۱۹۹۵). این تعریف معادل این است که فاصله کولبک لیبلر مورد انتظار بین توزیع پیشین و توزیع پسین ماکسیمم شود، یعنی

$$U(\xi^*) = \max_{\xi} \int_S \int_\Theta \log \frac{p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\xi)}{p(\boldsymbol{\beta})} p(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y};\xi) d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{y}.$$

از آن‌جایی‌که توزیع پیشین به طرح ξ وابسته نیست پس ξ^* طرحی است که تابع مطلوبیت مورد انتظار

$$U_1(\xi) = \int_S \int_\Theta \log p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\xi) p(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y};\xi) d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{y} \tag{۲}$$

را ماکسیمم کند. تحت توزیع پیشین $\pi(\boldsymbol{\beta})$، از آن‌جایی‌که اغلب محاسبه دقیق توزیع پسین ممکن نیست، از توزیع‌های مجانبی استفاده می‌شود (چالونر و لارنتز، ۱۹۸۹). یکی از تقریب‌های متداول، تقریب نرمال به‌صورت

$$\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\xi \sim N(\hat{\boldsymbol{\beta}}, [\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi)]^{-1})$$

است، که در آن $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi)$ ماتریس اطلاع فیشر است (برگر، ۱۹۸۵). در این صورت معادله (۲) به‌صورت

$$U_1(\xi) = -\frac{p}{2}\log 2\pi - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\int \log\det(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi))\pi(\boldsymbol{\beta})d\boldsymbol{\beta}$$

بیان می‌شود. ماکسیمم کردن $U_1(\xi)$ معادل ماکسیمم کردن تابع

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \int \log\det(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi))\pi(\boldsymbol{\beta})d\boldsymbol{\beta} \\ &= E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\log\det(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi)))\end{aligned}$$

است که ملاک D-بهینه بیزی نامیده می‌شود.

تعریف ۱ : طرح ξ^*، D-بهینه بیزی است اگر

$$\xi^* = arg\max_{\xi} E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\log\det(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta},\xi))).$$

۴ طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی

برای یافتن طرح D-بهینه بیزی ابتدا باید ماتریس اطلاع فیشر محاسبه شود. برای مدل (۱) ماتریس اطلاع فیشر به‌صورت

$$\boldsymbol{I}(\beta,\xi) = -E(\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta^T}\log\prod_{i=1}^{n}\int\prod_{j=1}^{m_i}\frac{e^{-\mu_{ij}^{\boldsymbol{b}_i}}(\mu_{ij}^{\boldsymbol{b}_i})^{y_{ij}}}{y_{ij}!}P_{N(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\Sigma})}d\boldsymbol{b}_i)$$

محاسبه می‌شود، که دارای فرم صریحی نیست. برای رفع این مشکل، نیاپرست (۲۰۰۹) روش شبه‌درستنمایی را برای به‌دست آوردن تقریبی از ماتریس اطلاع به‌کار برد. اگر $\xi = \left\{\begin{array}{c} x_1,\ldots,x_k \\ p_1,\ldots,p_k \end{array}\right\}$ طرح تقریبی برای یک واحد از جامعه باشد، آن‌گاه ماتریس شبه اطلاع برای طرح ξ به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi) = \boldsymbol{F}_\xi^T(\boldsymbol{A}_\xi^{-1}+\boldsymbol{C}_\xi)^{-1}\boldsymbol{F}_\xi \qquad (۳)$$

است، که در آن $\boldsymbol{F}_\xi^T = (\boldsymbol{f}(x_1),\ldots,\boldsymbol{f}(x_k))$، $\boldsymbol{A}_\xi = diag(m_j\mu(x_j))_{j=1,\ldots,k}$ و $\boldsymbol{C}_\xi = (c(x_j,x_{j'}))_{j'=1,\ldots,k}^{j=1,\ldots,k}$ (نیاپرست و شوابه، ۲۰۱۳). پس طرح ξ^* برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی یک طرح D-بهینه بیزی است اگر ξ^* عبارت

$$\phi(\xi) = E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi))) \qquad (۴)$$

را ماکسیمم کند. از آن‌جایی‌که برای به‌دست آوردن طرح‌های بهینه باید از روش‌های عددی استفاده کرد، نمی‌توان اطمینان داشت که طرح به‌دست آمده به‌صورت نظری هم بهینه است. قضیه هم‌ارزی یک ابزار مفید برای بررسی بهینگی طرح به‌دست آمده را در اختیار محقق قرار می‌دهد.

قضیه ۱ : طرح ξ^* برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی D-بهینه بیزی است، اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$، $E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(d(x;\xi^*)) \leq p$ و برای $x \in supp(\xi^*)$، $E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(d(x;\xi^*)) = p$. که در آن

$$\begin{aligned} d(x;\xi) &= m\mu(x)(f(x) - \boldsymbol{F}_\xi^T(\boldsymbol{A}_\xi^{-1}+\boldsymbol{C}_\xi)^{-1}c_{\xi,x})^T \\ &\times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi)^{-1}(f(x) - \boldsymbol{F}_\xi^T(\boldsymbol{A}_\xi^{-1}+\boldsymbol{C}_\xi)^{-1}c_{\xi,x}) \\ &- tr(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi)^{-1}\boldsymbol{F}_\xi^T(\boldsymbol{A}_\xi^{-1}+\boldsymbol{C}_\xi)^{-1}\boldsymbol{C}_\xi(\boldsymbol{A}_\xi^{-1}+\boldsymbol{C}_\xi)^{-1}\boldsymbol{F}_\xi) \end{aligned}$$

و $c_{\xi,x} = (c(x_j, x))_{j=۱,\dots,k}$ است.

برهان : با توجه به تعریف طرح D-بهینه بیزی برای مدل (۱)، اگر ξ_x طرح تک نقطه‌ای در نقطه x باشد، آن‌گاه مشتق جهتی فره‌شه به‌صورت

$$\begin{aligned} F_\phi(\xi,\xi_x) &= \lim_{\epsilon \longrightarrow ۰^+} \frac{۱}{\epsilon}(E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}[\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}, (۱-\epsilon)\xi + \epsilon\xi_x)) \\ &- E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}[\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi))]]) \\ &= E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\lim_{\epsilon \longrightarrow ۰^+} \frac{۱}{\epsilon}[\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}, (۱-\epsilon)\xi + \epsilon\xi_x)) \\ &+ \log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi))]) \end{aligned}$$

است، که عبارت داخل امید همان مشتق جهتی فره‌شه است که توسط نیاپرست و شوابه (۲۰۱۳) به‌دست آمده است. □

در این مقاله دو حالت خاص از مدل رگرسیون پواسون با اثر عرض از مبدأ تصادفی و اثر شیب تصادفی بررسی می‌شود.

۱.۴ مدل رگرسیون پواسون با اثر عرض از مبدأ تصادفی

این مدل با مشخصات

$$\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_۰, \beta_۱), \quad \boldsymbol{f}^T(x_j) = (۱, x_j), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

دارای تابع پیوند کانونی به‌صورت

$$\mu_j(x_j) = \exp(\beta_۰ + \beta_۱ x_j + \frac{۱}{۲}\sigma^۲)$$

است. در بسیاری از مسائل کاربردی از جمله علوم طبیعی و داروسازی متغیر تبیینی x مثبت است. اگر x متعلق به بازه [0,h]، ($h \in R$)، باشد می‌توان به کمک تبدیل‌هایی این بازه‌ها را به بازه [۰, ۱] تبدیل کرد (اتکینسون و همکاران، ۲۰۰۷؛ نیاپرست، ۲۰۰۹). بنابراین در این مقاله فرض می‌شود x_j متعلق به بازه [۰, ۱] است.

با توجه به رابطه (۳) می‌توان ماتریس شبه اطلاع را برای این مدل به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi) = ((\boldsymbol{F}_\xi^T \boldsymbol{A}_\xi \boldsymbol{F}_\xi)^{-۱} + (e^{\sigma^۲} - ۱)(۱ \ ۰)^T(۱ \ ۰))^{-۱}.$$

ارائه داد. هم‌چنین فرض می‌شود $\mu(x)$ تابعی یکنوا از x است. در اینجا می‌توان فرض کرد $\mu(x)$ نزولی است. که این حالت معادل منفی بودن مقدار β_1 است.

طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر عرض از مبدأ تصادفی با استفاده از ماکسیمم کردن $\phi(\xi)$ در رابطه (۴) در حالاتی که β_1 به ترتیب دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌های $(-۱,۰)$، $(-۳,۰)$، $(-۵,۰)$ و $(-۸,۰)$ است و هم‌چنین به ازای بعضی مقادیر اولیه برای β_0 به‌دست آورده می‌شود.

در جداول ۱ تا ۴ طرح D-بهینه بیزی برای برخی مقادیر مختلف σ^2 و به ازای $m = ۱۰۰$ و $\beta_0 = -۲$ بررسی شده است. $\sigma^2 = ۰$ نشان‌دهنده مدل بدون اثر تصادفی است که با نتایج ژانگ و ایی (۲۰۱۴) مطابقت دارد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش بازه پارامتر یعنی افزایش عدم قطعیت در پارامتر تعداد نقاط طرح D-بهینه بیزی افزایش می‌یابد که با نتایج چالونر و لارنتز (۱۹۸۹) مطابقت می‌کند. هم‌چنین افزایش σ^2 طرح‌های D-بهینه بیزی متفاوتی را نتیجه می‌دهد.

جدول ۱: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۱,۰)$

σ^2	p_1	p_2	x_1	x_2
۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۲	۰/۴۵۶۵	۰/۵۴۳۵	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۵	۰/۴۴۵۲	۰/۵۵۴۸	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۷	۰/۴۴۲۵	۰/۵۵۷۵	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱	۰/۴۴۰۶	۰/۵۵۹۴	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰

جدول ۲: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۳,۰)$

σ^2	p_1	p_2	x_1	x_2
۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۲	۰/۴۰۰۳	۰/۵۹۹۷	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۵	۰/۳۶۲۴	۰/۶۳۷۶	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۷	۰/۳۵۲۰	۰/۶۴۸۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱	۰/۳۴۳۸	۰/۶۵۶۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰

با استفاده از قضیه ۱ بهینگی طرح‌های بالا مورد آزمون قرار گرفت. به‌عنوان

جدول ۳: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۵, ۰)$

$x_۳$	$x_۲$	$x_۱$	$p_۳$	$p_۲$	$p_۱$	$\sigma^۲$
–	۰/۸۰۰	۰/۰۰۰	–	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۰۰	۰
۱/۰۰۰	۰/۸۰۴۰	۰/۰۰۰	۰/۲۰۴۱	۰/۴۱۷۰	۰/۳۷۸۹	۰/۲
۱/۰۰۰	۰/۸۰۲۶	۰/۰۰۰	۰/۳۴۷۸	۰/۳۲۹۲	۰/۳۲۳۰	۰/۵
۱/۰۰۰	۰/۸۰۱۳	۰/۰۰۰	۰/۴۰۰۸	۰/۲۹۳۸	۰/۳۰۵۴	۰/۷
۱/۰۰۰	۰/۷۹۹۸	۰/۰۰۰	۰/۴۴۹۱	۰/۲۶۰۷	۰/۲۹۰۲	۱

جدول ۴: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۸, ۰)$

$x_۳$	$x_۲$	$x_۱$	$p_۳$	$p_۲$	$p_۱$	$\sigma^۲$
۱/۰۰۰	۰/۴۴۶۲	۰/۰۰۰	۰/۰۷۷۳	۰/۴۳۱۹	۰/۴۹۰۸	۰
۱/۰۰۰	۰/۴۶۱۹	۰/۰۰۰	۰/۱۴۲۹	۰/۴۹۱۵	۰/۳۶۵۶	۰/۲
۱/۰۰۰	۰/۴۷۰۲	۰/۰۰۰	۰/۱۸۶۶	۰/۵۰۷۰	۰/۳۰۶۴	۰/۵
۱/۰۰۰	۰/۴۷۳۰	۰/۰۰۰	۰/۲۰۳۰	۰/۵۰۹۷	۰/۲۸۷۳	۰/۷
۱/۰۰۰	۰/۴۷۵۵	۰/۰۰۰	۰/۲۱۸۴	۰/۵۱۰۹	۰/۲۷۰۷	۱

نمونه در شکل ۱ برای حالتی که $\sigma^۲ = ۰/۵$ و β دارای توزیع یکنواخت روی $(-۱, ۰)$ است تابع حساسیت بر حسب نقاط تکیه‌گاه طرح رسم شده است که تأیید بهینه بودن طرح ارائه شده در جدول ۱ برای این حالت خاص است. برای این حالت مشاهده شد که

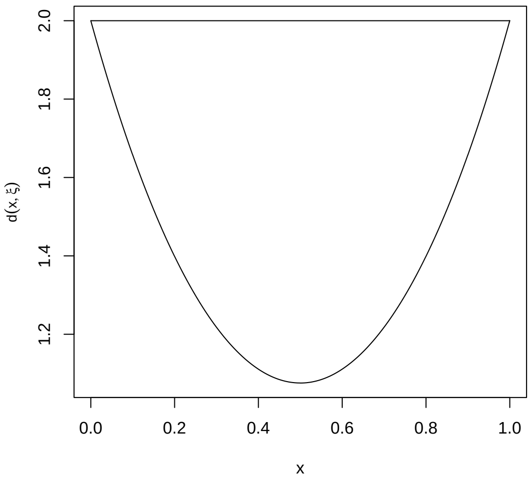
$$\xi^* = \left\{ \begin{array}{cc} ۰ & ۱ \\ ۰/۴۴۵۲ & ۰/۵۵۴۸ \end{array} \right\}$$

است. شکل ۱ نشان می‌دهد که تنها در نقاط تکیه‌گاه ξ^*، $E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(d(x;\xi^*)) = ۲$ است و در سایر نقاط $E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(d(x;\xi^*)) < ۲$.

۲.۴ مدل رگرسیون پواسون با اثر شیب تصادفی

این مدل نیز با مشخصات

$$\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_۰, \beta_۱), \quad \boldsymbol{f}^T(x_j) = (۱, x_j), \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & \sigma^۲ \end{pmatrix}$$



شکل ۱: طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر عرض از مبدأ تصادفی برای $\sigma^۲ = ۰/۵$ و $\beta_۱ \sim U(-۱, ۰)$

دارای تابع پیوند کانونی به‌صورت

$$\mu_j(x_j) = \exp(\beta_۰ + \beta_۱ x_j + \frac{۱}{۲}\sigma^۲ x_j^۲)$$

است، که در آن فرض می‌شود x_j متعلق به بازه $[۰, ۱]$ است.

با توجه به رابطه (۳) می‌توان ماتریس شبه‌اطلاع را برای این مدل به‌صورت

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}, \xi) = \boldsymbol{F}_\xi^T(\boldsymbol{A}_\xi^{-۱} + \boldsymbol{C}_\xi)^{-۱}\boldsymbol{F}_\xi$$

ارائه داد، که در آن

$$\boldsymbol{C}_\xi = \begin{pmatrix} e^{\sigma^۲ x_۱^۲} - ۱ & \dots & e^{\sigma^۲ x_۱ x_k} - ۱ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\sigma^۲ x_۱ x_k} - ۱ & \dots & e^{\sigma^۲ x_k^۲} - ۱ \end{pmatrix}$$

است. طرح D-بهینه بیزی در حالاتی که $\beta_۱$ دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌های $(-۱, ۰)$، $(-۳, ۰)$، $(-۵, ۰)$ و $(-۸, ۰)$ است و به‌ازای $m = ۱۰۰$ و $\beta_۰ = -۲$،

برای برخی مقادیر مختلف $\sigma^۲$ بررسی می‌شود. از نقطه نظر تعداد نقاط طرح و نقاط تکیه‌گاه طرح نتایج به‌دست آمده برای مدل رگرسیون پواسون با شیب تصادفی نیز مشابه نتایج به‌دست آمده برای مدل رگرسیون پواسون با عرض از مبدأ تصادفی است.

جدول ۵: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۱, ۰)$

$\sigma^۲$	$p_۱$	$p_۲$	$x_۱$	$x_۲$
۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۲	۰/۶۳۴۸	۰/۳۶۵۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۵	۰/۷۳۵۸	۰/۲۶۴۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۷	۰/۷۸۰۲	۰/۲۱۹۸	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱	۰/۷۹۰۹	۰/۲۰۹۱	۰/۰۰۰	۰/۸۵۱

جدول ۶: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۳, ۰)$

$\sigma^۲$	$p_۱$	$p_۲$	$x_۱$	$x_۲$
۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۲	۰/۵۷۷۸	۰/۴۲۲۲	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۵	۰/۶۵۳۹	۰/۳۴۶۱	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۰/۷	۰/۶۸۸۴	۰/۳۱۱۶	۰/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱	۰/۷۱۳۸	۰/۲۸۶۲	۰/۰۰۰	۰/۸۳۳

جدول ۷: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-۵, ۰)$

$\sigma^۲$	$p_۱$	$p_۲$	$x_۱$	$x_۲$
۰	۰/۵۰۰	۰/۵۰۰	۰/۰۰۰	۰/۸۰۰
۰/۲	۰/۵۴۱۴	۰/۴۵۸۶	۰/۰۰۰	۰/۷۷۶
۰/۵	۰/۵۸۴۴	۰/۴۱۵۶	۰/۰۰۰	۰/۷۴۹
۰/۷	۰/۶۰۶۹	۰/۳۹۳۱	۰/۰۰۰	۰/۷۲۸
۱	۰/۶۳۴۴	۰/۳۶۵۶	۰/۰۰۰	۰/۶۹۲

در این حالت نیز با استفاده از قضیه هم‌ارزی طرح‌های بهینه ارائه شده در جداول ۵ تا ۸ مورد آزمون قرار گرفتند.

جدول ۸: طرح D-بهینه بیزی برای توزیع پیشین $U(-8,0)$

x_3	x_2	x_1	p_3	p_2	p_1	σ^2
۱/۰۰۰	۰/۴۴۶۲	۰/۰۰۰	۰/۰۷۷۳	۰/۴۳۱۹	۰/۴۹۰۸	۰
۱/۰۰۰	۰/۴۳۷۵	۰/۰۰۰	۰/۰۷۰۸	۰/۴۱۹۲	۰/۵۱۰۰	۰/۲
۱/۰۰۰	۰/۴۳۳۳	۰/۰۰۰	۰/۰۵۸۰	۰/۴۰۸۴	۰/۵۳۳۶	۰/۵
۱/۰۰۰	۰/۴۳۵۰	۰/۰۰۰	۰/۰۴۷۰	۰/۴۰۵۶	۰/۵۴۷۶	۰/۷
۱/۰۰۰	۰/۴۴۱۵	۰/۰۰۰	۰/۰۲۹۸	۰/۷۰۳۸	۰/۵۶۶۴	۱

۵ کارایی

در بسیاری از مواقع به‌دلیل پیچیده بودن مدل‌های با اثرات تصادفی از طرح‌های آزمایش برای مدل‌های متناظر بدون اثر تصادفی استفاده می‌شود. برای مقایسه کارایی طرح‌های بهینه به‌دست آمده ملاک

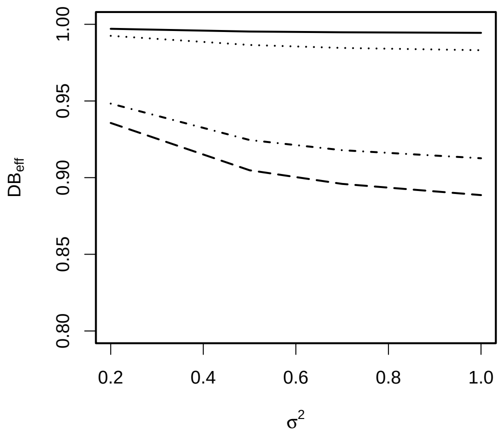
$$DB_{eff} = \left(\frac{\exp(E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\eta^*)))}{\exp(E^{\pi(\boldsymbol{\beta})}(\log\det(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi^*)))}\right)^{(1/p)}$$

استفاده می‌شود، که در آن ξ^* طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی و η^* طرح D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون بدون اثر تصادفی و $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},\xi)$ ماتریس اطلاع برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی است.

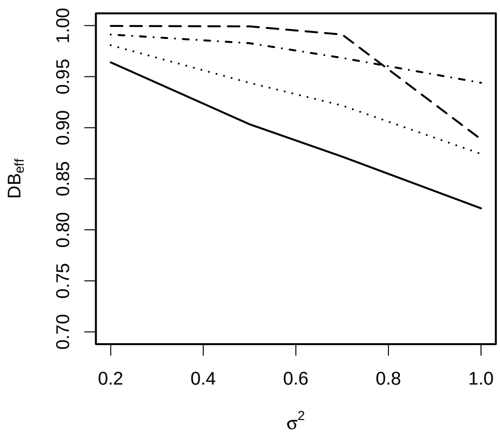
شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب بیان‌گر کارایی مدل‌های رگرسیون پواسون با عرض از مبدأ تصادفی و شیب تصادفی برای توزیع‌های مختلف پیشین β_1 است. نتایج نشان می‌دهد کارایی طرح بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی در توزیع‌های مختلف پیشین β_1 با افزایش σ^2 نسبت به طرح بدون اثر تصادفی نزول می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش شبه‌درستنمایی برای به‌دست آوردن طرح‌های D-بهینه بیزی استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد وقتی پارامترها دارای توزیع یکنواخت هستند افزایش بازه پارامتر باعث افزایش تعداد نقاط طرح بهینه می‌شود که از این نظر با



شکل ۲: کارایی طرح‌های D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با عرض از مبدا تصادفی برای توزیع‌های مختلف پیشین $U(-1, 0)$ (خط)، $U(-3, 0)$ (نقطه‌چین)، $U(-5, 0)$ (نقطه خط‌چین)، $U(-8, 0)$ (خط‌چین)



شکل ۳: کارایی طرح‌های D-بهینه بیزی برای مدل رگرسیون پواسون با اثر شیب تصادفی برای توزیع‌های مختلف پیشین $U(-1, 0)$ (خط)، $U(-3, 0)$ (نقطه‌چین)، $U(-5, 0)$ (نقطه خط‌چین)، $U(-8, 0)$ (خط‌چین)

نتایجی که ژانگ و ایی (۲۰۱۴) برای مدل رگرسیون پواسون بدون اثر تصادفی به‌دست آورد یکی است اما طرح به‌دست آمده از مدل رگرسیون پواسون با اثر تصادفی برای $\sigma^۲$های مختلف از طرح به‌دست آمده برای مدل رگرسیون پواسون بدون اثر تصادفی متفاوت است. بررسی کارایی نشان داد در صورتی‌که اثر تصادفی در نظر گرفته شود با افزایش $\sigma^۲$ کارایی مدل کاهش می‌یابد. انجام تحقیق مشابه برای سایر معیارها و مقایسه آن‌ها با نتایج این مقاله می‌تواند به‌عنوان یک موضوع برای ادامه این کار درنظر گرفته شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود موجب ارتقاء سطح کیفی این مقاله شدند، کمال تشکر و سپاسگزاری را ابراز می‌نمایند.

مراجع

نیاپرست، م.، مهرمنصور، س. (۱۳۸۹)، D-کارایی طرح‌های D-بهینه برای مدل پواسن با عرض از مبدأ تصادفی، مجله علوم آماری، **۴**، ۱۰۴-۸۹.

Atkinson, A. C., Donev, A. N. and Tobias, R. D. (2007), *Optimum Experimental Design, With SAS*, Oxford University Press, New York.

Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Springer, New York.

Chaloner, K. and Larntz, K. (1989), Optimal Bayesian Design Applied to Logistic Regression Experiments, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **21**, 191-208.

Chaloner, K. and Verdinelli, I. (1995), Bayesian Experimental Design: A Review, *Statistical Science*, **10**, 273-304.

Chernoff, H. (1953), Locally Optimal Designs for Estimating Parameters, *The Annals of Mathematical Statistics*, **26**, 586-602.

Lindley, D. V. (1972), *Bayesian Statistics-A Review*, SIAM, Philadelphia.

McCullagh, P. and Nelder J. A. (1998), *Generalized Linear Models*, Chapman and Hall, London.

Niaparast, M. (2009), On Optimal Design for a Poisson Regression Model with Random Intercept, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 741-747.

Niaparast, M. and Schowabe, R. (2013), Optimal Design for Quasi-likelihood Estimation in Poisson Regression with Random Coefficient, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **143**, 293-306.

Smith, K. (1918), On the Standard Deviations of Adjusted and Interpolated Values of an Observed Polynomial Function and Its Constants and the Guidance They Give Towards a Proper Choice of the Distribution of Observations, *Biometrika*, **12**, 1-85.

Zhang, Y. and Ye, K. (2014), Bayesian D-Optimal Design for Poisson Regression Models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **43**, 1234-1247.