

مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

صبا آقادوست^۱، کامل عبدالله‌نژاد^۱، فرهاد یغمایی^۱، علی اکبر جعفری^۲

^۱ گروه آمار، دانشگاه گلستان

^۲ گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۲۳

چکیده: توزیع لگنرمال برای توصیف داده‌های مشبت و دارای توزیع چوله به راست با میانگین کم و واریانس زیاد به کار می‌رود. این توزیع در بسیاری از علوم نظریه پزشکی، اقتصاد، زیست‌شناسی، علوم غذایی دارای کاربرد است. مقایسه میانگین‌های چند جامعه لگنرمال همواره مورد توجه محققان بوده است ولی ارائه یک آماره آزمون کارآمد برای این مقایسه بسیار مشکل است. در اینجا روش‌های مختلفی برای آزمون برابری میانگین‌ها در چند جامعه لگنرمال مورد مطالعه قرار می‌گیرند که عبارتند از آزمون F، آزمون‌های نسبت درستنامایی، روش‌های مقدار احتمال تعمیم‌یافته و روش آزمون محاسباتی. اندازه و توان این آزمون‌ها در مطالعه‌های شبیه‌سازی مقایسه خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: توزیع لگنرمال، آزمون فرض، اندازه آزمون، توان آزمون، برآورده ماکسیمم درستنامایی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: کامل عبدالله‌نژاد، k.abdollahnezhad@gu.ac.ir

کد موضوع بنای ریاضی (۶۲F۰۳): (۲۰۱۰)

۱ مقدمه

یکی از مسایل مهم در توزیع لگنرمال، آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال است که مورد توجه بسیاری از آماردانان می‌باشد. دو روش کلاسیک برای این مساله، آزمون F و آزمون نسبت درستنمایی هستند. گیل (۲۰۰۴) آزمون نسبت درستنمایی اصلاح شده^۱ را برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال به کار برد و با مقایسه این روش‌ها به این نتیجه رسید که آزمون نسبت درستنمایی تصحیح شده نسبت به آزمون F و آزمون نسبت درستنمایی از توان بالاتری برخوردار است.

روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته^۲، که توسط تسوی و ویراهندی (۱۹۸۹) مطرح شد، هنگامی استفاده می‌شود که در مساله مورد بررسی پارامتر مزاحم وجود داشته باشد. این روش توسط بهبودیان و جعفری (۲۰۰۶)، لین و همکاران (۲۰۰۷)، تیان و وو (۲۰۰۷)، لین و ونگ (۲۰۰۹) و جعفری (۲۰۱۲) مورد استفاده قرار گرفته است. کریشنامورتی و متیو (۲۰۰۳) و عبداله‌نژاد و همکاران (۲۰۱۲) این روش را برای آزمون تساوی میانگین‌های دو جامعه لگنرمال به کار بردند. لی (۲۰۰۹) نیز برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال، این روش را به کار برد. لین و وانگ (۲۰۱۲) ادعا کردند که به طور کلی روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته برای توزیع‌های نامتقارن نظیر لگنرمال چندان مناسب نیست و روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته اصلاح شده را برای این مساله ارائه دادند و نشان دادند که این روش برای توزیع‌های متقاضی نامتقارن از توان بهتری برخوردار است.

پال و همکاران (۲۰۰۷) یک روش خودگردان پارامتری^۳ بر اساس برآورده ماکسیمم درستنمایی مطرح کردند که به روش آزمون محاسباتی^۴ معروف است. این روش نیازی به توزیع دقیق آماره آزمون ندارد و در مواردی که توزیع آماره آزمون به آسانی به دست نمی‌آید یا بسیار پیچیده است می‌توان آنرا به کار برد. این روش

^۱ Modified likelihood ratio test

^۲ Generalized p-value

^۳ Parameteric bootstrap

^۴ Computational approach test

۳ صبا آقادوست و همکاران

توسط چانگ و پال (۲۰۰۸) برای مساله بهرنس-فیشر، چانگ و همکاران (۲۰۱۰) برای تحلیل واریانس یک طرفه تحت برابری واریانس‌های خطابه کار برده شد و نتیجه‌گیری کردند که نسبت به روش‌های دیگر از لحاظ خطای نوع اول، عملکرد بهتری دارند. همچنین سلطانی و عبداله‌نژاد (۲۰۱۳) این روش را برای استنباط درباره میانگین یک جامعه لگنرمال به کار بردن و آن را با سه روش دیگر مقایسه کردند. در اینجا، روش آزمون محاسباتی را برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال به کار می‌بریم.

فرض کنید X_{ij} , $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n_i$ نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه n_i از k جامعه‌ی لگنرمال باشند. بنابراین $\varphi_i = \exp(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2)$ میانگین جامعه‌ی آن خواهد بود. می‌دانیم که

$$Y_{ij} = \log(X_{ij}) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n_i$$

بنابراین برآورده‌گر ماکسیمم درستنما می‌باشد، معادل با آزمون فرضیه‌های داده می‌شوند، عبارتند از

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

انجام آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \varphi_1 = \dots = \varphi_k \quad H_1 : \varphi_i \neq \varphi_j \quad \text{در مقابل} \quad i \neq j,$$

اگر $\eta_i = \log(\varphi_i) = \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2$ باشد، معادل با آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \eta_i = \eta \quad (i = 1, \dots, k) \quad H_1 : \eta_i \neq \eta \quad \text{در مقابل} \quad i \neq j, \quad (1)$$

است، که در آن η مقداری نامعلوم است. برآورده‌گر ماکسیمم درستنما می‌باشد $\hat{\eta}_i = \hat{\mu}_i + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2$ است که به طور تقریبی دارای توزیع نرمال با میانگین η_i و واریانس $\nu_i = \frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{(n_i-1)\sigma_i^4}{2n_i^2}$ است (ژو و همکاران، ۱۹۹۷).

در بخش ۲، روش‌های آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال شامل آزمون F، آزمون نسبت درستنما و اصلاح شده آن، روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته

۴ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

و اصلاح شده آن بیان می‌شوند. همچنین یک روش آزمون محاسباتی را برای این مساله ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، اندازه و توان آزمون هر یک از روش‌ها به کمک شبیه‌سازی مورد مقایسه قرار می‌گیرند و نقاط ضعف و قوت هر یک بیان می‌شوند.

۲ روش‌های آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگنرمال

۱.۲ آزمون F

با فرض برابری σ_i^2 ها، آزمون فرضیه‌های (۱) با آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k, \quad H_1 : \mu_i \neq \mu_j, \quad i \neq j,$$

معادل است که همان آزمون تساوی میانگین‌ها تحت برابری واریانس‌ها است. در این حالت از آزمون F با آماره

$$F = \left(\frac{S}{N-k} \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \frac{n_i(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2}{k-1}$$

استفاده می‌شود، که در آن $S = \sum_{i=1}^k (n_i - 1)S_i^2$ و $\bar{Y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i \bar{Y}_i$. فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $F > F_\alpha(k-1, N-k)$ که در آن $N = \sum_{i=1}^k n_i$ صدک $(1-\alpha) \cdot 100$ ٪ توزیع فیشر با درجات آزادی $k-1$ و $N-k$ است.

۲.۲ آزمون نسبت درستنما

قرار دهید $\Psi' = (\mu_1, \dots, \mu_k, \sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$. لگاریتم تابع درستنما می‌باشد مشاهدات تبدیل یافته Y_{ij} به صورت

$$\ell(\Psi) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

است. بنابراین $\hat{\Psi}' = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, s_1^2, \dots, s_k^2)$ برآورد ماکسیمم درستنما می‌باشد. تحقیق مشاهده شده \bar{Y}_i و s_i^2 هستند. تحت فرضیه (۱) بود، که \bar{y}_i و s_i^2 به ترتیب مقادیر مشاهده شده \bar{Y}_i و s_i^2 هستند.

تابع لگاریتم درستنمایی به صورت

$$\ell(\Psi_0) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k n_i \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - \eta + \frac{1}{2}\sigma_i^2)^2}{\sigma_i^2}$$

خواهد بود که در آن $(\eta, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2) = \Psi_0$. برآورد ماکسیمم درستنمایی Ψ که برآورد ماکسیمم درستنمایی مقید^۵ (RMLE) نامیده می‌شود، از حل دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{RML} &= \left(\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\hat{\sigma}_{i(RML)}^2} \right)^{-1} \left(\frac{N}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{n_i \bar{Y}_i}{\hat{\sigma}_{i(RML)}^2} \right), \\ \hat{\sigma}_{i(RML)}^2 &= -2 + 2 \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \hat{\eta}_{RML})^2}{n_i} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (2)$$

به دست می‌آید. گیل (۲۰۰۴) یک روش عددی برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مقید بر اساس این معادلات ارائه کرد. بنابراین $\tilde{\Psi} = (\hat{\eta}_{RML}, \hat{\sigma}_{1(RML)}^2, \dots, \hat{\sigma}_{k(RML)}^2)'$ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی Ψ است و منهای دو برابر لگاریتم آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت

$$\omega = 2l(\hat{\Psi}) - 2l(\tilde{\Psi}_0)$$

خواهد بود. برای آزمون فرضیه (۱)، H_0 رد می‌شود اگر $\chi_{\alpha}^2(k-1) < \omega$ که در آن $\chi_{\alpha}^2(k-1)$ صدک $(1-\alpha)100$ درجه آزادی است.

۳.۲ آزمون نسبت درستنمایی اصلاح شده

گیل (۲۰۰۴) روش آزمون نسبت درستنمایی اصلاح شده را برای آزمون فرضیه (۱) با آماره

$$\omega^* = \omega(1 - \omega^{-1} \log(\gamma))^2$$

ارائه داد، که در آن γ مطابق با اسکووارد (۲۰۰۱) به صورت

$$\gamma = \frac{(t - \tilde{\tau})' \tilde{\Sigma}^{-1} (t - \tilde{\tau})^{\frac{k}{2}}}{\omega^{\frac{k}{2}-1} (\hat{\lambda} - \tilde{\lambda})' (t - \tilde{\tau})} \left(\frac{|\tilde{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

^۵ Restricted maximum likelihood estimation

۶ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

در نظر گرفته می‌شود به طوری که

$$\begin{aligned}\lambda &= \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{\mu_k}{\sigma_k^2}, \frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k^2} \right)' \\ t &= (n_1 \bar{y}_1, \dots, n_k \bar{y}_k, -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}', \dots, -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_k} y_{kj}')' \\ \tau &= (n_1 \mu_1, \dots, n_k \mu_k, -\frac{n_1}{2} (\mu_1 + \sigma_1^2), \dots, -\frac{n_k}{2} (\mu_k + \sigma_k^2))' \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} \text{diag} \{n_i \sigma_i^2\}_{i=1,\dots,k} & \text{diag} \{-n_i \mu_i \sigma_i^2\}_{i=1,\dots,k} \\ \text{diag} \{-n_i \mu_i \sigma_i^2\}_{i=1,\dots,k} & \text{diag} \{n_i \sigma_i^2 (\mu_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2)\}_{i=1,\dots,k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات در (۲)، $\hat{\mu}_{i(RML)} = \hat{\eta}_{RML} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i(RML)}^2$ حاصل می‌شود.
 $\tilde{\lambda}$ و $\tilde{\Sigma}$ از جایگذاری $\hat{\mu}_{i(RML)}$ و $\hat{\sigma}_{i(RML)}$ به ترتیب به جای μ_i و σ_i^2 در λ و Σ به دست می‌آیند. همچنین $\hat{\lambda}$ و $\hat{\Sigma}$ از جایگذاری $\hat{\mu}_i$ و $\hat{\sigma}_i$ به ترتیب به جای μ_i و σ_i^2 در λ و Σ به دست می‌آیند. بنابراین برای آزمون فرض (۱)، H_0 رد می‌شود اگر

$$\omega^* > \chi_{\alpha}^2(k-1)$$

۴.۲ روش‌های مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح شده

مفهوم متغیر آزمون تعمیم‌یافته^۱ و مقدار احتمال تعمیم‌یافته توسط تسو و ویراهاندی (۱۹۸۹) معرفی شدند و برای انجام آزمون در مواردی که پارامتر مزاحم وجود دارد، به کار می‌رود. همچنین، مفهوم کمیت تعمیم‌یافته توسط ویراهاندی (۱۹۹۳) معرفی شد. در اینجا، این مفاهیم برای آزمون فرضیه (۱) به کار برده می‌شوند. یک کمیت تعمیم‌یافته برای η_i توسط کریشنامورتی و متیو (۲۰۰۳) به صورت

$$T_i = \bar{y}_i - \frac{Z_i s_i}{U_i} + \frac{1}{2} \frac{n_i s_i^2}{U_i^2}, \quad i = 1, \dots, k$$

ارائه شده که در آن

$$Z_i = \sqrt{n_i} \frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0, 1), \quad U_i^2 = \frac{n_i s_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(n_i - 1)$$

^۱ Generalized test variable

۷. صبا آقادوست و همکاران

با در نظر گرفتن بردار $\boldsymbol{\Upsilon} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)'$ و ماتریس $(k-1) \times k$ به صورت

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

آزمون فرضیه (۱) با آزمون فرضیه‌های

$$H_{\circ} : H\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : H\boldsymbol{\Upsilon} \neq \mathbf{0}, \quad (3)$$

معادل است، که در آن $\mathbf{0}$ بردار صفر مرتبه $k-1$ است. بنابرین بردار کمیت تعمیم‌یافته برای $H\boldsymbol{\Upsilon}$ به صورت $\mathbf{T} = H(T_1, \dots, T_k)'$ خواهد بود. فرض کنید μ_T و Σ_T به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس \mathbf{T} باشد. فرم استاندارد شده $\tilde{\mathbf{T}}$ به صورت $\tilde{\mathbf{T}} = \Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{T} - \mu_T)$ است. اگر \tilde{t} مقدار مشاهده شده $\tilde{\mathbf{T}}$ باشد مقدار احتمال تعمیم‌یافته برای آزمون فرضیه (۳) به صورت

$$\begin{aligned} p &= P(\|\tilde{\mathbf{T}}\|^2 \geq \|\tilde{t}\|^2 | H_{\circ}) \\ &= P((\mathbf{T} - \mu_T)' \Sigma_T^{-1} (\mathbf{T} - \mu_T) \geq \mu_T' \Sigma_T^{-1} \mu_T) \end{aligned}$$

است. برای بیان روش اصلاح شده لین و وانگ (۲۰۱۳)، فرض کنید \tilde{e} یک نقطه دلخواه در دامنه $\tilde{\mathbf{T}}$ و e نقطه متناظر با \tilde{e} در دامنه \mathbf{T} باشد و برای آزمون فرضیه (۳) مقدار احتمال تعمیم‌یافته به صورت

$$p = P\{d_e \geq E_{\tilde{\mathbf{T}}}(\|\Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{T} - \boldsymbol{\Upsilon}_{\circ})\|) | \bar{\mathbf{y}}, s^{\circ}, \boldsymbol{\Upsilon}_{\circ} = \mathbf{0}\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $s^{\circ} = (s_1^{\circ}, s_2^{\circ}, \dots, s_k^{\circ})'$ و $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_k)'$ و

۵.۲ روش آزمون محاسباتی

نخست لازم است که این فرض به صورت تابعی از یک اسکالر مناسب بیان شود. بدین منظور θ را به صورت

$$\theta = h(\mu_i; \sigma_i^{\circ}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\nu_i} (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^k \frac{\eta_i^2}{\nu_i} - \frac{(\sum_{i=1}^k \frac{\eta_i}{\nu_i})^2}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{\nu_i}}$$

۸ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

تعریف می‌کنیم، که در آن $\nu_i = \frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{(n_i - 1)\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{\nu_i}}$ و $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^k \frac{\eta_i}{\nu_i}$ بنا برای این آزمون فرضیه (۱) با آزمون فرضیه

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \theta > 0 \quad (4)$$

معادل است. روش آزمون محاسباتی بر اساس گام‌های زیر است:

گام ۱: برآوردهای ماکسیمم درستنمازی پارامترهای μ_i و σ_i^2 یعنی $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i$ و $\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2$ را به دست آورده و برآوردهای ماکسیمم درستنمازی θ یعنی $\hat{\theta} = h(\hat{\mu}_i; \hat{\sigma}_i^2)$ به دست آید.

گام ۲: تحت فرض H_0 ، برآوردهای ماکسیمم درستنمازی $\sigma_k^2, \dots, \sigma_2^2, \sigma_1^2$ و η که به ترتیب با $\hat{\eta}_{RML}, \dots, \hat{\sigma}_{k(RML)}^2$ نشان داده می‌شود، از حل دستگاه معادلات (۲) به دست آید. بنا برای

$$\hat{\mu}_{i(RML)} = \hat{\eta}_{RML} - \frac{1}{2} \hat{\sigma}_{i(RML)}^2, \quad i = 1, \dots, k$$

گام ۳: برای $i = 1, \dots, k$ نمونه مصنوعی Y_{in_i}, \dots, Y_{i1} از توزیع درستنمازی $N(\hat{\mu}_{i(RML)}, \hat{\sigma}_{i(RML)}^2)$ تولید شود. برای هر کدام از این نمونه‌ها برآوردهای ماکسیمم درستنمازی μ_i و σ_i^2 به دست آورده شود تا برآوردهای ماکسیمم درستنمازی θ به دست آید.

گام ۴: گام ۳ به تعداد دفعات زیاد (M بار) انجام شود و برآوردهای به دست آمده θ از کوچک به بزرگ مرتب گردد:

$$\hat{\theta}_{(1)} \leq \hat{\theta}_{(2)} \leq \dots \leq \hat{\theta}_{(M)}$$

برای آزمون فرضیه (۴) نقطه بحرانی $\hat{\theta}_{((1-\alpha)M)}$ در نظر گرفته می‌شود و با $\hat{\theta}$ در گام اول مقایسه می‌شود. اگر $\hat{\theta}_U > \hat{\theta}$ فرض H_0 رد می‌شود، در غیر این صورت فرض H_0 پذیرفته می‌شود. مقدار احتمال هم برابر با $\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M I(\hat{\theta}_{(l)} > \hat{\theta})$ است.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت برای مقایسه اندازه و توان روش‌های معروفی شده در بخش ۲ از شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده می‌شود که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. بدین

سبا آقادوست و همکاران ۹

منظور نمونه تصادفی به حجم n از جامعه لگنرمال با پارامترهای μ_i و σ_i^2 تولید شده است. تعداد تکرارها 50000 و برای روش آزمون محاسباتی $M = 10000$ در نظر گرفته شد. برای محاسبه اندازه و توان آزمون، طرح هایی در جدول ۱ در نظر گرفته شد. توجه شود که برای محاسبه اندازه آزمون، پارامترهای μ_i و σ_i^2 طوری در نظر گرفته شد که میانگین های k جامعه برابر باشند (طرح های ۱ تا ۸) و برای محاسبه توان آزمون، طرح های ۹ تا ۱۲ در نظر گرفته شد. در جدول ۲، LRT، CAT، MGPV، GPV، MLRT و F به ترتیب نمایانگر روش آزمون محاسباتی، آزمون نسبت درستنمایی، آزمون نسبت درستنمایی اصلاح شده، روش مقدار احتمال تعمیم یافته، روش مقدار احتمال تعمیم یافته اصلاح شده و آزمون F هستند.

جدول ۱: طرح های شبیه سازی

$(\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2)$	(μ_1, \dots, μ_k)	طرح
(۴,۴)	(-۰/۵, -۰/۵)	۱
(۳,۱)	(-۱,۰)	۲
(۱,۱,۱)	(۰/۵,۰/۵,۰/۵)	۳
(۲,۱,۳)	(۱,۱/۵,۰/۵)	۴
(۴,۴,۴,۴)	(-۱/۵,-۱/۵,-۱/۵,-۱/۵)	۵
(۱,۲,۳,۴)	(۰/۵,۰,-۰/۵,-۱)	۶
(۲/۵,۲/۵,۲/۵,۲/۵,۲/۵)	(۰,۰,۰,۰,۰)	۷
(۴,۶,۸,۲,۵)	(۱,۰,-۱,۲,۰/۵)	۸
(۰/۵,۱)	(۱/۵,۱/۵)	۹
(۱/۵,۱,۲)	(۲,۱,۲)	۱۰
(۱,۱,۱,۱)	(۲/۵,۱/۵,۱/۵,۱/۵)	۱۱
(۱/۵,۱,۱/۷۵,۱/۲۵,۲)	(۳,۳/۵,۳/۵,۳,۴)	۱۲

۱- اندازه آزمون روش آزمون محاسباتی معمولاً نزدیک به سطح معنی داری است. در مواردی که حجم نمونه بسیار کوچک است این روش محافظه کار^۷ است یعنی اندازه آزمون کمتر از سطح معنی داری است و با افزایش حجم نمونه، به سطح معنی داری نزدیک می شود.

^۷ Conservative

۱۰ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

جدول ۲: اندازه و توان آزمون‌ها در سطح معناداری ۰/۰۵

F	MGPV	GPV	MLRT	LRT	CAT	(n_1, \dots, n_k)	طرح
۰/۰۵۴۸	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۵۵۴	۰/۰۸۷۶	۰/۰۱۶۶	(۰,۰)	۱
۰/۰۵۱۰	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۹۶	۰/۰۴۴۴	۰/۰۶۲۴	۰/۰۳۹۶	(۱,۰,۱۵)	
۰/۰۵۳۰	۰/۰۲۸۰	۰/۰۳۰۲	۰/۰۴۹۲	۰/۰۵۲۶	۰/۰۴۸۴	(۳,۰,۳۰)	
۰/۱۷۷۰	۰/۰۰۹۸	۰/۰۱۱۰	۰/۰۵۶۰	۰/۰۹۱۰	۰/۰۳۸۲	(۰,۰)	۲
۰/۳۳۹۴	۰/۰۲۱۴	۰/۰۲۲۲	۰/۰۴۵۴	۰/۰۵۸۸	۰/۰۴۴۴	(۱۰,۰,۱۵)	
۰/۷۶۸۶	۰/۰۳۶۲	۰/۰۳۶۸	۰/۰۴۹۸	۰/۰۵۴۴	۰/۰۴۷۴	(۳۰,۰,۳۰)	
۰/۰۵۰۲	۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۳۶	۰/۰۵۱۴	۰/۱۰۲۶	۰/۰۲۴۸	(۰,۰,۰)	۳
۰/۰۴۸۸	۰/۰۱۸۸	۰/۰۲۰۲	۰/۰۵۰۰	۰/۰۶۹۰	۰/۰۴۵۰	(۱۰,۰,۱۵,۱۰)	
۰/۰۴۷۰	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۵۶	۰/۰۵۱۲	۰/۰۵۷۶	۰/۰۴۷۸	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۱۳۱۴	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۵۴	۰/۰۵۳۶	۰/۰۵۲۶	۰/۰۲۷۸	(۰,۰,۰)	۴
۰/۳۳۹۲	۰/۰۲۸۲	۰/۰۳۰۰	۰/۰۵۷۰	۰/۰۷۷۲	۰/۰۵۱۰	(۱۰,۰,۱۵,۰)	
۰/۵۷۳۴	۰/۰۳۰۲	۰/۰۳۱۲	۰/۰۴۷۴	۰/۰۵۳۰	۰/۰۴۵۸	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۰۴۴۴	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۸	۰/۰۴۶۰	۰/۱۱۱۶	۰/۰۲۰۲	(۰,۰,۰,۰)	۵
۰/۰۴۸۴	۰/۰۲۲۶	۰/۰۲۲۲	۰/۰۵۳۴	۰/۰۷۷۴	۰/۰۴۶۶	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۵)	
۰/۰۵۱۶	۰/۰۳۷۴	۰/۰۳۸۲	۰/۰۵۰۴	۰/۰۵۸۶	۰/۰۴۷۸	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۱۸۹۰	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۶	۰/۰۴۳۸	۰/۱۰۹۶	۰/۰۲۴۶	(۰,۰,۰,۰)	۶
۰/۴۶۳۶	۰/۰۲۳۴	۰/۰۲۳۸	۰/۰۵۴۲	۰/۰۷۹۰	۰/۰۴۹۴	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۵)	
۰/۹۱۰۲	۰/۰۳۴۰	۰/۰۳۴۴	۰/۰۵۱۰	۰/۰۵۸۸	۰/۰۴۸۶	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۰۴۴۰	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۴۸۶	۰/۱۳۳۲	۰/۰۱۴۸	(۰,۰,۰,۰,۰)	۷
۰/۰۵۰۰	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۵۰۶	۰/۰۷۷۴	۰/۰۳۶۴	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۰,۰)	
۰/۰۴۴۴	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۷۶	۰/۰۴۸۶	۰/۰۵۸۲	۰/۰۴۵۰	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۳۱۹۶	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۶	۰/۰۴۹۸	۰/۱۴۱۲	۰/۰۲۱۶	(۰,۰,۰,۰,۰)	۸
۰/۰۰۶۶	۰/۰۲۱۲	۰/۰۲۲۲	۰/۰۵۲۰	۰/۰۸۲۴	۰/۰۴۹۲	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۰,۰)	
۰/۹۹۸۲	۰/۰۳۱۸	۰/۰۳۲۴	۰/۰۵۱۸	۰/۰۶۲۴	۰/۰۴۹۴	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۰۳۲	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۶۲	۰/۰۵۰۸	۰/۰۹۵۶	۰/۰۳۵۶	(۰,۰)	۹
۰/۰۷۱۲	۰/۰۲۷۸	۰/۰۲۹۴	۰/۰۸۷۶	۰/۱۱۰۴	۰/۰۵۱۶	(۱۰,۰)	
۰/۰۵۳۶	۰/۱۲۱۶	۰/۱۲۳۰	۰/۱۵۷۴	۰/۱۶۸۸	۰/۱۳۱۸	(۳۰,۰)	
۰/۲۰۴۲	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۷۲	۰/۱۸۴۰	۰/۳۰۹۴	۰/۱۲۰۴	(۰,۰,۰)	۱۰
۰/۰۶۰۸	۰/۳۳۴۰	۰/۳۵۴۴	۰/۵۹۸۸	۰/۶۲۹۲	۰/۵۴۴۰	(۱۰,۰,۱۵,۰)	
۰/۹۲۵۶	۰/۹۳۸۸	۰/۹۳۹۶	۰/۹۴۶۸	۰/۹۴۶۴	۰/۹۶۰۸	(۳۰,۰)	
۰/۰۴۴۰	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۴۸۶	۰/۱۳۳۲	۰/۰۱۴۸	(۰,۰,۰,۰,۰)	۱۱
۰/۶۰۴۰	۰/۱۹۱۸	۰/۱۹۴۲	۰/۴۴۸۸	۰/۰۹۲۶	۰/۴۰۸۸	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۵)	
۰/۹۸۹۶	۰/۸۹۹۶	۰/۸۹۸۴	۰/۹۲۸۸	۰/۹۰۳۰	۰/۹۳۲۸	(۳۰,۰,۳۰,۰)	
۰/۱۶۸۸	۰/۰۰۶۰	۰/۰۰۶۸	۰/۱۰۴۲	۰/۳۰۸۸	۰/۰۵۲۸	(۰,۰,۰,۰,۰)	۱۲
۰/۴۱۱۴	۰/۰۸۰۲	۰/۰۸۲۲	۰/۳۱۳۰	۰/۴۵۳۲	۰/۱۹۸۴	(۱۰,۰,۱۵,۰,۱۵,۰)	
۰/۸۴۴۴	۰/۶۹۳۶	۰/۶۹۴۰	۰/۸۰۰۲	۰/۸۵۰۶	۰/۷۶۶۶	(۳۰,۰,۳۰,۰)	

صبا آقادوست و همکاران ۱۱

۲- اندازه آزمون روش مقدار احتمال تعمیم یافته و اصلاح شده آن کوچک‌تر از اندازه آزمون سایر روش‌ها هستند، این دو روش خصوصاً برای حجم نمونه‌های کوچک بسیار محافظه‌کار هستند. با افزایش حجم نمونه اندازه آزمون این دو روش به سطح معنی‌داری نزدیک می‌شوند. البته برخلاف آنچه که لین و وانگ (۲۰۱۳) ادعا کردند روش مقدار احتمال تعمیم یافته و اصلاح شده آن در آزمون برابری میانگین‌های لگنرمال تفاوت چندانی با هم ندارند.

۳- آزمون F تنها زمانی مناسب عمل می‌کند که $\frac{2}{5}$ ها برابر باشند. در مواردی که $\frac{2}{5}$ ها نابرابرند اندازه این آزمون بیشتر از سطح معنی‌داری است.

۴- اندازه آزمون روش نسبت درستنمایی در تمامی موارد بیشتر از سطح معنی‌داری است، در حالی که اصلاح شده آن نزدیک به سطح معنی‌داری و در مواردی بالاتر از آن است.

۵- همان‌طور که ملاحظه می‌شود توان آزمون مقدار احتمال تعمیم یافته و اصلاح شده آن از توان آزمون‌های دیگر کمتر است. توان آزمون محاسباتی از توان دو آزمون مذکور بیشتر اما از توان آزمون‌های دیگر کمتر است و با افزایش حجم نمونه، توان همه آزمون‌ها افزایش می‌یابد. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که هر چه آزمون محافظه‌کارتر باشد، توانش کمتر و هر چه لیبرال‌تر باشد توانش بیشتر است. بنابراین مقایسه توان این آزمون‌ها منطقی به نظر نمی‌آید. در واقع مقایسه توان دو آزمون وقتی مسیر است که دارای اندازه آزمون برابر باشند.

بحث و نتیجه‌گیری

مطالعه شبیه‌سازی نشان داد که روش‌های آزمون محاسباتی، مقدار احتمال تعمیم یافته و اصلاح شده دارای اندازه کمتر از سطح معنی‌داری هستند و در بین آنها روش آزمون محاسباتی به سطح معنی‌داری نزدیک‌تر بوده و به همین دلیل از اهمیت بیشتری برخوردار است. چون آزمون F در اکثر موارد بسیار لیبرال و آزمون نسبت درستنمایی هم در همه موارد لیبرال است این دو آزمون برای فرضیه مورد نظر در مقایسه با روش‌های دیگر مناسب نیستند. در آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته،

۱۲ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

اندازه آزمون در همه موارد به سطح معنی‌داری نزدیک است هر چند که در مواردی لیبرال است.

مراجع

- Abdollahnezhad, K., Babanezhad, M. and Jafari A. A. (2012), Inference on Difference of Means of Two Lognormal Distributions a Generalized Approach, *Journal of Statistical and Econometric Methods*, **1**, 125-131.
- Behboodian, J. and Jafari, A. A. (2006), Generalized Inference for the Common Mean of Several Lognormal Populations, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **5**, 240-259.
- Chang, C. and Pal, N. (2008), A Revisit to the Behrens-Fisher Problem: Comparison of Five Test Methods, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1064-1085.
- Chang, C., Pal, N., Lim, W. K. and Lin, J. J. (2010), Comparing Several Population Means: A Parametric Bootstrap Method and Its Comparison with Usual ANOVA F test as Well as ANOM, *Computational Statistics*, **25**, 71-95.
- Gill, P. S. (2004), Small-Sample Inference for the Comparison of Means of Log-Normal Distributions, *Biometrics* **60**, 525-527.
- Jafari, A. A. (2012), Inferences on the Ratio of Two Generalized Variances: Independent and Correlated Cases, *Statistical Methods and Applications*, **21**, 297-314.
- Krishnamoorthy, K. and Mathew, T. (2003), Inference on the Means of Log-Normal Distributions Using Generalized P-Value and General-

- ized Confidence Intervals, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **115**, 103-121.
- Li, X. (2009), A Generalized P-Value Approach for Comparing the Means of Several Log-Normal Populations, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1404-1408.
- Lin, S. H., Lee, J. C. and Wang, R. S. (2007), Generalized Inferences on the Common Mean Vector of Several Multivariate Normal Populations, *Journal of Statistical Planning and Infernce*, **137**, 2240-2249.
- Lin, S. H. and Wang, R. S. (2009), Inferences on a Linear Combination of K Multivariate Normal Mean Vector, *Journal of Applied Statistics*, **36**, 415-428.
- Lin, S. H. and Wang, R. S. (2013), Modified Method on the Means for Several Log-Normal Distributions, *Biometrics*, **60**, 525-527.
- Pal, N., Lim, W. K. and Ling, C. H. (2007), A Computational Approach to Statistical Inferences, *Journal of Applied Probability and Statistics*, **2**, 13-35.
- Scovgaard, I. M. (2001), Likelihood Asymptotics, *Scandinavian Journal of Statistics*, **28**, 3-32.
- Soltani, A. R. and Abdollahnezhad, K. (2013), Testing the Log-Normal Mean: Comparison of Four Test Methods, *Journal of Applied Probability and Statistics*, **8**, 1-10.
- Tian, L. and Wu, J. (2007), Inferences on the Common Mean of Several Log-Normal Populations: The Generalized Variable Approach, *Biometrical Journal*, **49**, 944-951.

۱۴ مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگنرمال

Tsui, K. W. and Weerahandi, S. (1989), Generalized P-Value in Significance Testing of Hypothesis in the Presence of Nuisance Parameters, *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 602-607.

Weerahandi, S. (1993), Generalized Confidence Intervals. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 899-905.

Zhou, X. H., Gao, S. and Hui, S. L. (1997), Methods for Comparing the Means of Two Independent Lognormal Samples, *Biometrics*, **53**, 1129-1135.