

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۴

جلد ۹، شماره ۲، ص ۲۴۱-۲۵۱

## توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره، خواص و کاربرد آن

حمید لرستانی، عبدالرضا سیاره

گروه آمار، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۳/۱۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۱۲/۲۷

**چکیده:** برای مدل‌بندی بسیاری از پدیده‌های طبیعی از توزیع‌های نرمال یک یا چند متغیره و مشتقات آن استفاده می‌شود. متغیرهای نرمال تاخوردۀ دو به صورت قدر مطلق متغیرهای تصادفی نرمال تعریف می‌شوند. توزیع نرمال تاخوردۀ دو متغیره، دو متغیره، خواص و کاربرد آن‌ها توسط پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً توزیع نرمال تاخوردۀ دو متغیره و توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی وابسته که دارای توزیع بیضوی تراز هستند نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیره تصادفی دارای توزیع نرمال تاخوردۀ دو متغیره که توزیع توأم آن‌ها متعلق به خانواده بیضوی تراز نیست را به دست آورده و میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور آن مورد بررسی قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع بیضوی تراز، توزیع نرمال تاخوردۀ دو متغیره، توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عبدالرضا سیاره ، asayyareh@razi.ac.ir  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲E۱۵

۱ مقدمه

خانواده توزیع های بیضوی تراز یک خانواده از توزیع های متقارن مانند توزیع نرمال، توزیع  $t$ ، توزیع لاپلاس، توزیع کوشی و توزیع لوژستیک است.

تعریف ۱: بردار تصادفی  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  با میانگین  $\mu$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  و مولد چگالی  $(\cdot) h^{(n)}$  دارای توزیع بیضوی تراز است هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_n(x; \mu, \Sigma, h^{(n)}) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} h^{(n)}[(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)], \quad x \in R^n$$

باشد. توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی که دارای توزیع بیضوی تراز<sup>۱</sup> هستند توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) به دست آمده است. در این مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ<sup>۲</sup> دو متغیره که توزیع توأم آنها عضو خانواده توزیع بیضوی تراز نیست، به دست می آید. فرض کنید  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  باشد. متغیر  $Y = |X|$  دارای توزیع نرمال تاخوردۀ با تابع چگالی

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} [\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y - \mu)^2) + \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y + \mu)^2)], \quad y > 0$$

و میانگین و واریانس

$$\begin{aligned} \mu_f &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}) + \mu[1 - 2\Phi(-\frac{\mu}{\sigma})] \\ \sigma_f^2 &= \mu^2 + \sigma^2 - \{ \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}) + \mu[1 - 2\Phi(-\frac{\mu}{\sigma})] \}^2 \end{aligned}$$

است، که در آن  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع نرمال استاندارد است.

این توزیع در مسایل کاربردی نیز مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال مهدیان و علامت ساز (۱۳۸۴) از توزیع نرمال تاخوردۀ برای بهبود سطح سرویس مطلوب استفاده کرده و نشان دادند داده های تغییرات ۲۴ ساعته ماکسیمم بار از

<sup>۱</sup> Elliptically contoured

<sup>۲</sup> Folded normal distribution

سیستم انتقال نیرو استان اصفهان در سال‌های ۱۳۸۱ و ۱۳۸۲ از توزیع نرمال تاخورده پیروی می‌کنند. همچنین جمشیدی چناری و علوی دودران (۱۳۹۰) از این توزیع در مطالعات ژئوتکنیک در نهشته‌های طبیعی استفاده کرده و نشان دادند که داده‌های تغییرات مقاومت نوک مخروط بر حسب کیلو پاسکال در راستای افقی دارای توزیع نرمال تاخورده هستند.

لئون و همکاران (۱۹۶۱)، ساراکیس و پانارتوس (۲۰۰۱) و چاکرابورتی و چاترجی (۲۰۱۳)، توزیع نرمال تاخورده یک و چند متغیره، خواص و کاربرد آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. برآورد پارامترها و آزمون فرضیه در مورد پارامترهای توزیع نرمال تاخورده توسط الاند (۱۹۶۱) و ساندبیرگ (۱۹۷۴) و همچنین آنتروپی، بررسی معیار کولبک-لیبلر، تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور برای این توزیع توسط ساگریس و همکاران (۲۰۱۴) انجام شده است. تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد تاخورده یک متغیره به صورت

$$\begin{aligned} f_{|Z|}(t) &= \phi(t) + \phi(-t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

است (لئون و همکاران، ۱۹۶۱)، که در آن  $\phi(\cdot)$  تابع چگالی نرمال استاندارد است. براساس نتایج ساراکیس و پانارتوس (۲۰۰۱)، تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره به صورت

$$\begin{aligned} f_{T_1, T_2}(t_1, t_2) &= \sum_{\substack{u=t_1, -t_1 \\ v=t_2, -t_2}} f_{Z_1, Z_2}(u, v) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left\{ e^{-\frac{t_1^2+t_2^2-2\rho t_1 t_2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{t_1^2+t_2^2+2\rho t_1 t_2}{2(1-\rho^2)}} \right\}, \quad t_1, t_2 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، که در آن  $T_i = |Z_i|$ ،  $-1 < \rho < 1$  و  $f_{Z_1, Z_2}(\cdot, \cdot)$  تابع چگالی نرمال استاندارد دو متغیره است. براساس نتایج چاکرابورتی و چاترجی (۲۰۱۳)، توزیع نرمال تاخورده چند متغیره از رابطه

$$f_{T_1, \dots, T_k}(t_1, \dots, t_k) = \sum_{(s_1, \dots, s_k) \in S(k)} f_{Z_1, \dots, Z_k}(s_1 t_1, \dots, s_k t_k)$$

به دست می آید که در آن

$$S(k) = \{s : s = (s_1, \dots, s_k), s_i = \pm 1, 1 \leq i \leq k\}$$

برای مطالعه بیشتر در رابطه با این توزیع می توان به جانسون (۱۹۶۲، ۱۹۶۳)، لین (۲۰۰۴)، کیم (۲۰۰۶) و لیاو (۲۰۱۰) مراجعه نمود. توزیع ماکسیمم دو متغیره تصادفی دارای توزیع نرمال تاخوردۀ دو متغیره توسط هیچکدام از پژوهشگران به دست نیامده است. در این مقاله علاوه بر توزیع ماکسیمم، گشتاورهای مراتب اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به دست آورده می شوند.

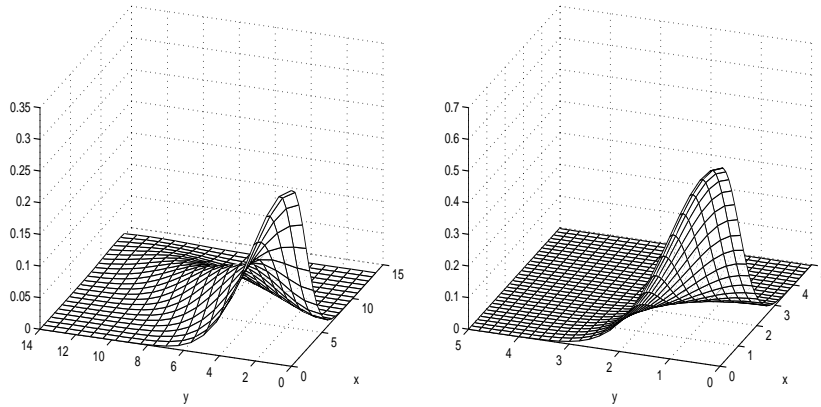
در بخش ۲ توزیع ماکسیمم دو متغیره تصادفی از توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره با تابع چگالی توأم (۱) و گشتاورهای مراتب اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به دست آورده می شوند. در بخش ۳ کاربرد این توزیع در تحلیل سیستم های موازی و آزمون فرضیه پارامترها ارائه می شود.

## ۲ توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره

فرض کنید بردار  $T = (T_1, T_2)$  دارای توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره با تابع چگالی (۱) و  $Y = \max(T_1, T_2)$  باشد. همان طور که در شکل ۱ ملاحظه می شود توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره متقارن نیست. لذا تابع چگالی  $Y$  براساس روش ارائه شده توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) قابل حصول نیست. با توجه به این که برای هر استنباطی در مورد جامعه باید تابع چگالی متغیره تحت مطالعه معین و یا برآورد شود، لذا در قضیه ۱ تابع چگالی  $Y$  به دست آورده می شود.

**قضیه ۱:** فرض کنید بردار  $T = (T_1, T_2)$  دارای توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره با تابع چگالی (۱) باشد در این صورت  $Y = \max(T_1, T_2)$  دارای تابع چگالی به صورت زیر است.

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[ \Phi\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \Phi\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \right] \quad y \geq 0 \quad (2)$$



(ب)

(الف)

شکل ۱: منحنی چگالی نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره به ازای الف:  $\rho = 0/2$  و ب:  $\rho = 0/9$

برهان: تابع توزیع متغیر تصادفی  $Y$  عبارت است از

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(T_1 \leq y, T_2 \leq y) \\
 &= \frac{1}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^y e^{-\frac{t_1^2}{2}} \int_0^y (e^{-\frac{(t_1-t_2\rho)^2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{(t_1+t_2\rho)^2}{2(1-\rho^2)}}) dt_1 dt_2 \\
 &\quad \text{که با تغییر متغیرهای } z = \frac{t_1+t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \text{ و } z = \frac{t_1-t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \text{ به صورت} \\
 F_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^y e^{-\frac{t_1^2}{2}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y+t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y-t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] dt_2 \quad (3)
 \end{aligned}$$

حاصل می شود، که در آن

$$\operatorname{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt, \quad a > 0$$

با مشتق گیری از (۳) تابع چگالی متغیر تصادفی  $Y$  به صورت

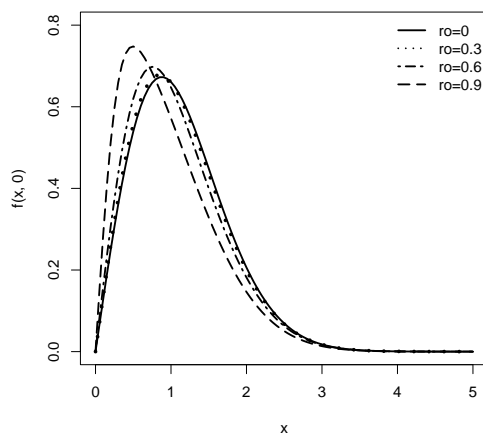
$$\begin{aligned}
 \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_0^y (e^{-\frac{(t_2-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{(t_2+\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}) dt_2
 \end{aligned}$$

۲۴۶ ..... توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره

حاصل می شود. با تغییر متغیرهای  $z = \frac{t_2 - \rho y}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$  و  $z = \frac{t_2 + \rho y}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$  داریم

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right]$$

با توجه به این که  $\operatorname{erf}(a) = 2[\Phi(\sqrt{2}a) - \frac{1}{4}]$  تابع چگالی (۲) حاصل می شود. در شکل ۲ منحنی چگالی ماکسیمم به ازای مقادیر مختلف  $\rho$  بیانگر آن است که این چگالی متقارن نبوده و کشیدگی آن با افزایش  $\rho$  زیاد می شود.



شکل ۲: منحنی چگالی ماکسیمم به ازای  $\rho = 0, 0/3, 0/6, 0/9$

قضیه ۲: میانگین و واریانس متغیر تصادفی  $Y$  به ترتیب عبارتند از

$$\mu_f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left[ \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) + \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) \right] \quad (4)$$

$$\sigma_f^2 = \frac{2}{\pi} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] + \frac{1}{\pi} \left[ \sin\left(2 \tan^{-1}\left(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) + \sin\left(2 \tan^{-1}\left(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\right) \right] - \mu_f^2 \quad (5)$$

برهان : با قرار دادن  $a_1 = \frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$  و  $a_2 = \frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$  داریم

$$\begin{aligned} \mu_f &= E(Y) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_1 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_2 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

سه جمله سمت راست  $\mu_f$  به ترتیب با A، B و C نشان داده می شود. به راحتی می توان نشان داد که

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{a_1 y} y e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم :

$$\begin{aligned} A &= \frac{C}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{\tan^{-1}(a_1)} \cos(\theta) r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr \\ &= \frac{C}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(\tan^{-1}(a_1)) \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(\tan^{-1}(a_1)) \end{aligned}$$

و به طور مشابه

$$B = \frac{C}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sin(\tan^{-1}(a_2)).$$

که از جمع A و B و C رابطه (۴) حاصل می شود. همچنین

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_1 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_2 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

۲۴۸ ..... توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تاخورد دو متغیره

سه جمله سمت راست  $E(Y^2)$  به ترتیب با  $D$ ,  $E$  و  $F$  نشان داده می شود. مشابه اثبات  $A$ ، داریم:

$$\begin{aligned} D &= \frac{F}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{\tan^{-1}(a_1)} \cos^2(\theta) r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} d\theta dr \\ &= \frac{F}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \tan^{-1}(a_1) + \frac{1}{4} \sin(2 \tan^{-1}(a_1)) \right] \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \end{aligned}$$

که با استفاده از تغییر متغیر  $t = r^2$

$$D = \frac{F}{2} + \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(a_1) + \frac{1}{\pi} \sin(2 \tan^{-1}(a_1))$$

همچنین

$$E = \frac{F}{2} + \frac{2}{\pi} \tan^{-1}(a_2) + \frac{1}{\pi} \sin(2 \tan^{-1}(a_2))$$

که از جمع  $D$ ,  $E$  و  $F$  رابطه (۵) حاصل می شود.

قضیه ۳: تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $Y$  با تابع چگالی (۲) عبارت است از

$$M_Y(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{(y-t)^2}{2}} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] dy \quad (۶)$$

برهان:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_1 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + yt} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{a_2 y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + yt} e^{-\frac{x^2}{2}} dx dy \\ &- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} + ytdy \end{aligned}$$

سه جمله سمت راست  $M_Y(t)$  به ترتیب با  $G$ ,  $H$  و  $I$  نشان داده می شود. لذا

$$G = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2} + ty} dy + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{a_1 y} e^{-\frac{x^2}{2} + ty} dx dy$$

به راحتی می توان نشان داد که:

$$G = \frac{I}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^\infty \operatorname{erf}\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) e^{-\frac{(y-t)^2}{2}} dy$$

$$H = \frac{I}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \int_0^\infty \operatorname{erf}\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1+\rho^2)}}\right) e^{-\frac{(y-t)^2}{2}} dy$$



که از جمع  $G, H$  و  $I$  رابطه (۹) حاصل می شود.

### ۳ کاربرد توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره

در مباحث قابلیت اطمینان، یکی از سیستم‌های رایج، سیستم موازی است که در آن اگر حداقل یکی از مؤلفه‌ها کار کند کل سیستم کار خواهد کرد. بنابراین طول عمر سیستم برابر ماکسیمم طول عمر مؤلفه‌ها خواهد بود. فرض کنید در سیستمی دو مؤلفه‌ای و موازی طول عمر سیستم‌ها از توزیع نرمال استاندارد دو متغیره تاخوردۀ پیروی کند. در نتیجه می توان از نتایج این مقاله برای بررسی خواص طول عمر سیستم استفاده نمود. به عنوان مثال تابع چگالی و میانگین طول عمر سیستم به ترتیب از رابطه‌های (۲) و (۴) به دست می آیند. توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره به عنوان توزیع آماره آزمون اجتماع- اشتراک کاربرد دارد. اگر ناحیه رد برای آزمون فرضیه  $H_0: \theta \in \Theta_i$  در مقابل  $H_1: \theta \in \Theta_i^c$  به شکل  $\{x : |T_i(x)| > c\}$  باشد، آنگاه ناحیه رد برای آزمون  $H_0: \theta \in \bigcap_{i=1}^2 \Theta_i$  به صورت

$$\bigcup_{i=1}^2 \{x : |T_i(x)| > c\} = \{x : \max_{i=1,2} |T_i(x)| > c\}$$

خواهد بود. بنابراین آماره آزمون به صورت  $T = \max_{i=1,2} |T_i(x)|$  است. چنانچه هر  $T_i$  دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آماره  $T$  دارای توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره خواهد بود.

### بحث و نتیجه گیری

چون توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره یک توزیع متقارن نیست، تابع چگالی  $Y$  با روش ارائه شده توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) به دست نمی آید. در این مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیره تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره و همچنین گشتاورهای مرتبه اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به دست آورده شد. در مطالعات آتی خواص دیگر این توزیع، توزیع ماکسیمم نرمال

۲۵۰ ..... توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تاخوردۀ دو متغیره

تاخوردۀ چند متغیره، توزیع ماکسیمم  $t$  تاخوردۀ چند متغیره، خواص و کاربرد آنها می‌توانند مورد بررسی قرار بگیرند.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند.

### مراجع

جمشیدی چناری، ر.، علمومی دودران، ر. (۱۳۹۰)، محاسبیه مقایس نوسان ژئوتکنیکی در نهشته‌های طبیعی با کمک تئوری فضای تصادفی، مجله عمران مدرس، ۴، ۱۷-۲۷.

مهیدیان، ن.، علامت ساز، م. ح. (۱۳۸۴)، توزیع نرمال بریده شده و کاربرد در بهبود سطح سرویس مطلوب، مجله دانشکده علوم اداری و اقتصاد اصفهان، ۷، ۸۷-۱۲۲.

Arellano-Valle, R. B. and Genton, M. G. (2008), On the Exact Distribution of the Maximum of Absolutely Continuous Dependent Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, **78**, 27-35.

Chakraborty, A. K. and Chatterjee, M. (2013), On Multivariate Folded Normal Distribution, *Indian Statistical Institute*, **75**, Series B, 1-15.

Elandt, R. C. (1961), The Folded Normal Distribution: Two Methods of Estimating Parameters from Moments, *Technometrics*, **3**, 551-562.

Johnson, N. L. (1962), The Folded Normal Distribution: Accuracy of Estimation by Maximum Likelihood, *Technometrics*, **4**, 249-256.

- Johnson, N. L. (1963), Cumulative Sum Control Charts for the Folded Normal Distribution, *Technometrics*, **5**, 451-458.
- Kim, H. J. (2006), On the Ratio of Two Folded Normal Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **35**, 965-977.
- Lin, H. C. (2004), The Measurement of a Process Capability for Folded Normal Process Data, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **24**, 223-228.
- Liao, M. Y. (2010), Economic Tolerance Design for Folded Normal Data, *International Journal of Production Research*, **48**, 4123-4137.
- Leone, F. C, Nelson, L. S. and Nottingham, R. B. (1961), The Folded Normal Distribution, *Technometrics*, **3**, 543-550.
- Psarakis, S. and Panaretos, J. (2001), On Some Bivariate Extensions of the Folded Normal and the Folded t Distribution, *Journal of Applied Statistical Science*, **10**, 119-136.
- Sundberg, R. (1974), On Estimation and Testing for the Folded Normal Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **3**, 55-72.
- Tsagris, M., Beneki, C. and Hassani, H. (2014), On the Folded Normal Distribution, *Mathematics*, **2**, 12-18.