

سانسور پیش‌رونده کلی

محمد بیات و حمزه ترابی

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۹/۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۱/۲۶

چکیده: امروزه استفاده از روش‌های مختلف سانسور در آزمون‌های قابلیت اعتماد در صنعت و آزمون‌های زمان - بقا در آزمایشات کلینیکی فراگیر شده است. یکی از این روش‌های سانسور، سانسور پیش‌رونده نوع I و II است. استفاده از این نوع سانسورها، معایبی نیز به همراه دارد. در این مقاله تلاش می‌شود با ایجاد تغییراتی در سانسور پیش‌رونده نوع I، معایب آن کاهش یابد و همچنین یک طرح کلی ارائه گردد که سانسور پیش‌رونده نوع II را نیز شامل گردد. این کار از این طریق صورت می‌پذیرد که برخلاف قبل، تعداد برداشت و زمان برداشت متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند. ابتدا به معرفی سانسورهای پیش‌رونده نوع I، II و دو نوع از تعمیم‌های آن‌ها پرداخته می‌شود، سپس روش سانسور جدید بر پایه سانسور پیش‌رونده نوع I توضیح داده و تابع چگالی احتمال آن بیان می‌گردد. چند حالت خاص آن نیز معرفی می‌شود و در پایان، پیرامون پارامترهای مدل استنباط آماری انجام می‌شود و در ادامه الگوریتم شبیه‌سازی سانسور جدید ارائه و برای مقایسه این طرح سانسور تعمیم‌یافته با روش‌های سانسور رایج، از شبیه‌سازی استفاده خواهد شد. **واژه‌های کلیدی:** سانسور پیش‌رونده کلی، بردار سانسور، بردار زمان سانسور، تابع درست‌نمایی، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی.

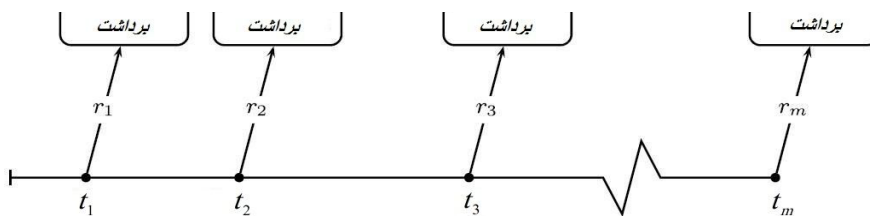
۱ مقدمه

فرض کنید در یک آزمایش طول عمر، n واحد با متغیرهای تصادفی طول عمر Y_1, \dots, Y_n به‌طور هم‌زمان تحت آزمایش قرار گرفته است به‌طوری که متغیرهای تصادفی طول عمر آن‌ها از یکدیگر مستقل

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمد بیات، bayat.stat@chmail.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N01, 62N05

و هم‌توزیع هستند و تابع توزیع احتمال تجمعی و تابع چگالی احتمال آن‌ها به ترتیب F و f و پارامتر توزیع جامعه $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ ، $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ باشد. پیش از شروع آزمایش بردار $r_m = (r_1, \dots, r_m)$ و $t_m = (t_1, \dots, t_m)$ تعیین گردیده است. همچنین برای $i = 1, \dots, m$ فرض کنید d_i برابر با تعداد مشاهدات در بازه $(t_{i-1}, t_i]$ ، $d_{(i)}$ برابر با تعداد مشاهدات در بازه $[0, t_i]$ ، \mathbf{x}_{d_i} برابر با $(x_{d_{i-1}+1}, \dots, x_{d_i})$ ، $\mathbf{x}_{d_{(i)}}$ برابر با $(x_1, \dots, x_{d_1}, \dots, x_{d_{(i)}})$ و $r_{(i)}$ برابر با $\sum_{j=1}^i r_j$ باشد. فرض کنید آزمایش به این صورت انجام شود که در زمان t_1 ، تعداد $\min\{r_1, n - d_1\}$ واحد از واحدهای زنده تحت آزمایش به تصادف انتخاب و از آزمایش کنار گذاشته شوند و به هنگام t_2 نیز، تعداد $\min\{r_2, \max\{0, n - r_1 - d_{(2)}\}\}$ واحد از واحدها زنده تحت آزمایش به طور تصادفی سانسور می‌گردند و به همین ترتیب به هنگام زمان t_i ، $(i = 3, \dots, m)$ تعداد $\min\{r_i, \max\{0, n - r_{(i-1)} - d_{(i)}\}\}$ واحد از آزمودنی‌ها به طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند؛ این طرح سانسور را طرح سانسور پیش‌رونده نوع I می‌نامند که در شکل ۱ نمایش داده شده است.



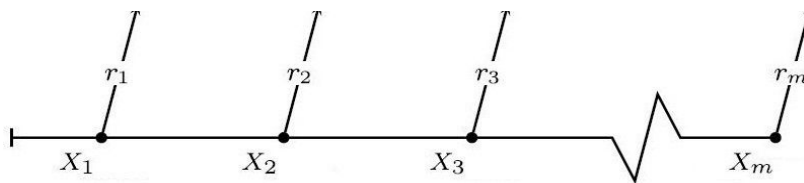
شکل ۱. سانسور پیش‌رونده نوع I

تابع درست‌نمایی سانسور پیش‌رونده نوع I به صورت

$$f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}) = \prod_{i=1}^m \binom{\eta_i}{d_i} d_i! \left\{ \prod_{j=1}^{d_i} f(x_{d_{(i-1)}+j}) \right\} \{1 - F(t_i)\}^{\xi_i} \times I(t_{i-1} < x_{d_{(i-1)}+1} \leq \dots \leq d_{d_{(i)}} \leq t_i), \quad (1)$$

است، که در آن $\eta_i = \max\{n - r_{(i-1)} - d_{(i-1)}, 0\}$ ، $\xi_i = \min\{r_i, \max\{n - r_{(i-1)} - d_{(i)}, 0\}\}$ و جزئیات $(d_1, \dots, d_m) \in D = \{(d_1, \dots, d_m) \in Z_+^m; 0 \leq d_i \leq \xi_i, i = 1, \dots, m\}$. بیشتر در افیفی (۲۰۱۱)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۰)، شن و همکاران (۲۰۱۱) ارائه شده است. از ایراداتی که به سانسور پیش‌رونده نوع I وارد است می‌توان سه مورد زیر را نام برد:

(۱) آزمایش در زمانی پیش از t_m به پایان می‌رسد و تا مرحله آخر نیز ادامه پیدا نمی‌کند؛
 (۲) وقتی تعداد رخدادها کم یا صفر باشد، برآورد پارامترها مناسب به نظر نمی‌رسد؛
 (۳) در هنگام آزمایش ممکن است امکان حذف تعدادی از پیش تعیین شده وجود نداشته باشد.
 با توجه به این که تعداد مشاهدات در سانسور پیش رونده نوع I تصادفی است، سانسور پیش رونده نوع II معرفی شد که تنها در زمان سانسور نمودن واحدها با سانسور پیش رونده نوع I تفاوت دارد. در این نوع سانسور به هنگام مشاهده یک پیشامد تعدادی واحد از پیش تعیین شده از آزمایش حذف می‌شوند. بنابراین تعداد کل سانسور شده‌های آزمایش برابر خواهد بود با تفاضل تعداد مشاهدات از کل واحدهای تحت آزمایش، بنابراین تعداد شکست‌های مشاهده شده تصادفی نبوده و از پیش از آزمایش ثابت در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲). اما این سانسور نیز با نقیصه تصادفی بودن زمان اتمام آزمایش روبه‌رو است؛ (بالاکریشان و آگاروالا، ۲۰۰۰؛ بالاکریشان، ۲۰۰۷؛ بالاکریشان و کرامر، ۲۰۱۴).



شکل ۲. سانسور پیش‌رونده نوع II

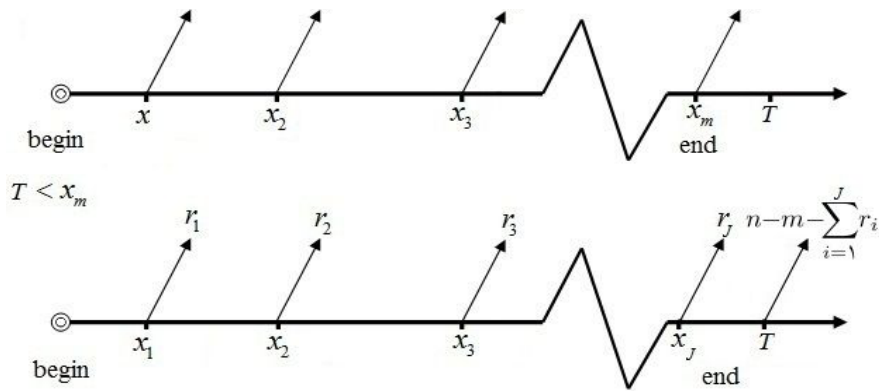
تابع درست‌نمایی سانسور پیش‌رونده نوع II به صورت

$$f(\mathbf{x}_m) = \prod_{i=1}^m \eta_i \prod_{j=1}^m f(x_i) \{1 - F(x_i)\}^{r_i}, \quad (2)$$

است. اگر در تابع درست‌نمایی سانسور پیش‌رونده نوع I برای $i = 1, \dots, m$ مقدار d_i برابر با ۱ در نظر گرفته شود و t_i برابر با x_i باشد آنگاه به تابع درست‌نمایی (۲) تبدیل خواهد شد.

پژوهشگران تلفیقی از این دو روش سانسور با نام‌های سانسور پیش رونده آمیخته نوع I و سانسور پیش رونده آمیخته نوع II را نیز ارائه دادند که به ترتیب دارای زمان پایان $\min\{T, X_m\}$ و $\max\{T, X_m\}$ هستند که در آن X_m زمان مشاهده‌ی m امین شکست و T یک زمان از پیش تعیین شده است. اما سانسور پیش رونده آمیخته نوع I با دو نقیصه در پارامترهای اصلی مانند تصادفی بودن تعداد مشاهدات

و تصادفی بودن زمان اتمام آزمایش روبه‌رو بوده و سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع II نیز با ایراد تصادفی بودن زمان اتمام آزمایش روبه‌رو است؛ (آشور و همکاران، ۲۰۱۴ و ۲۰۱۶؛ آشور و ناصر، ۲۰۱۷؛ تامر و پانوار، ۲۰۱۵). شکل ۳ فرایند انجام آزمایش با استفاده از سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I را نمایش می‌دهد.



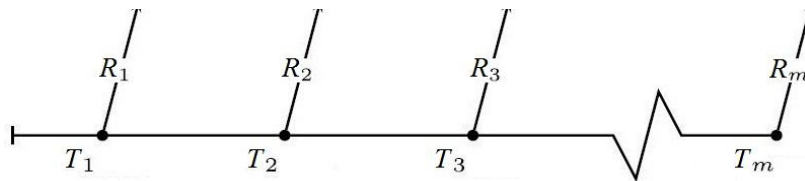
شکل ۳. سانسور پیش‌رونده آمیخته نوع I

بدیهی است که حذف همزمان تعدادی واحد در زمانی خاص باعث کاهش احتمال مشاهده شکست می‌شود، هنگامی که آزمایشگر قصد دارد در زمان t_i ، m ، $1, \dots, m$ تعداد r_i واحد را از آزمایش حذف کند اگر تعداد شکست‌های مشاهده شده کم باشد با حذف r_i واحد از واحدها در زمان t_i ، احتمال مشاهده شکست با کاهش روبه‌رو می‌گردد. برای مواجهه با این موضوع می‌توان زمان حذف واحدها را به تعویق انداخت و یا تعداد کمتری را حذف نمود. با استفاده از این دیدگاه در بخش بعدی تعمیمی از سانسور پیش‌رونده نوع I ارائه خواهد شد که در لحظه مواجهه با چنین مشکلاتی دارای انعطاف بیشتری نسبت به سانسور پیش‌رونده نوع I بوده و احتمال رخ دادن ایرادات ذکر شده را نیز کاهش دهد.

۲ سانسور پیش‌رونده کلی

فرض کنید n آزمودنی تحت یک آزمون طول عمر قرار دارند. در ابتدای آزمایش قرارداد می‌شود که در زمان T_1 تعداد R_1 عدد از واحدهای زنده از آزمایش کنار گذاشته شود که T_1 یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال h_1 و دامنه آن $[0, \infty)$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست و R_1 یک متغیر تصادفی با تابع

چگالی احتمال g_1 و دامنه $\{0, 1, \dots, n - d_1\}$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست. بعد از حذف R_1 در زمان T_1 آزمایش با η_2 واحد باقی مانده ادامه می‌یابد و تعیین می‌گردد که در زمان T_2 سانسور کردن بعدی انجام پذیرد که T_2 یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال h_2 و دامنه آن $[t_1, \infty)$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست. در زمان t_2 تعداد R_2 عدد از واحدها موجود از آزمایش حذف می‌شوند که R_2 یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال g_2 و دامنه $\{0, 1, \dots, \max\{0, n - r_1 - d_{(2)}\}\}$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست. آزمایش به همین منوال ادامه پیدا می‌کند و هنگام انجام $(i - 1)$ امین سانسور تعیین می‌شود که در زمان T_i ($i = 1, \dots, m$)، امین سانسور انجام پذیرد که در آن T_i یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال h_i با دامنه $[t_{i-1}, \infty)$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست. آزمایش با η_i واحد موجود ادامه می‌یابد و برای $i = 1, \dots, m - 1$ در زمان t_i تعداد R_i عدد از واحدها موجود از آزمایش حذف می‌شوند که R_i یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال g_i و دامنه $\{0, 1, \dots, \max\{0, n - r_{(i-1)} - d_{(i)}\}\}$ است و به پارامتر جامعه وابسته نیست. در زمان t_m تمامی واحد های زنده تحت آزمون از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. این روش انجام آزمایش ”سانسور پیش‌رونده کلی“ است که در شکل ۴ نمایش داده شده است.



شکل ۴. سانسور پیش‌رونده کلی

مثال ۵: فرض کنید آزمایشگری قصد انجام آزمایشی با سانسور پیش‌رونده نوع I را داشته باشد. او پیش از شروع آزمایش تعیین می‌کند که در زمان‌های t_1, \dots, t_m به ترتیب تعداد r_1, \dots, r_m واحد را از آزمایش کنار بگذارد. آزمایش آغاز می‌شود؛ زمان t_1 فرا می‌رسد اما هنوز شکستی مشاهده نشده است و آزمایشگر می‌بایست تعداد r_1 واحد تحت آزمایش را کنار بگذارد او می‌داند که حذف تعدادی از واحدهای تحت آزمایش احتمال مشاهدی شکست را کاهش می‌دهد و با توجه به این که هیچ شکستی مشاهده نشده است این امر می‌تواند اثر منفی بر نتیجه دهی آزمایش بگذارد. آزمایشگر در مرحله بعد باز با این مشکل روبه رو می‌شود که در بازه t_1 تا t_2 مشاهده‌ای رخ نداده است، اما باید تعداد r_2 واحد دیگر را از آزمایش حذف نماید. در برخی از مراحل بعد نیز دوباره با این اشکال رو به رو می‌شود و در زمان t_m بدون داشتن

تعداد کافی از مشاهدات آزمایش را خاتمه می‌دهد. اما در صورتی که آزمایشگر از طرح سانسور پیش‌رونده کلی استفاده کند برای افزایش تعداد شکست‌های مشاهده شده تعداد راه‌های بسیار زیادی برای انتخاب وجود می‌داشت. برای مثال او می‌توانست تعداد برداشت در هر مرحله را یک متغیر تصادفی مشروط به مشاهده حداقل یک شکست در بازه زمانی مورد نظر در نظر گیرد، بدین صورت که اگر در بازه زمانی t_{i-1} تا t_i ، $i = 1, \dots, m$ حداقل یک شکست مشاهده شد تعداد r_i واحد در زمان t_i سانسور شود، در غیر این صورت تعدادی کمتر از r_i واحد از آزمایش حذف شود یا این که زمان سانسور را تابعی از تعداد مشاهدات در نظر می‌گرفت. با انجام این روش تعداد شکست‌های بیشتری را می‌توان مشاهده نمود.

تابع درست‌نمایی سانسور پیش‌رونده کلی را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) &= f(r_m | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \\
 &= f(r_m | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \\
 &\quad \times f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)} | \mathbf{d}_{m-1}, \mathbf{x}_{d(m-1)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \\
 &\quad \times f(\mathbf{d}_{(m-1)}, \mathbf{x}_{d(m-1)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \\
 &\quad \vdots \\
 &= \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^m h_i(t_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}), \tag{۳}
 \end{aligned}$$

در نظر گرفت، که در آن

$$g_1(r_1 | \mathbf{d}_1, \mathbf{x}_{d(1)}, \mathbf{t}_1, \mathbf{r}_0) = g_1(r_1 | \mathbf{d}_1, \mathbf{x}_{d(1)}, \mathbf{t}_1),$$

$$f(d_1, \mathbf{x}_{d_1} | \mathbf{d}_0, \mathbf{x}_{d(0)}, \mathbf{t}_1, \mathbf{r}_0) = f(d_1, \mathbf{x}_{d_1} | \mathbf{t}_1),$$

$$h_1(t_1 | \mathbf{d}_0, \mathbf{x}_{d(0)}, \mathbf{t}_0, \mathbf{r}_0) = h_1(t_1).$$

برای $i = 1, \dots, m$ داریم:

$$\sum_{r_i=0}^{\eta_i-d_i} g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) = 1, \quad \int_{t_{i-1}}^{\infty} h_i(t_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) dt_i = 1,$$

که در آن $t_0 = 0$.

۳ چند حالت خاص

در این بخش به چند حالت خاص از سانسور پیش‌رونده کلی اشاره می‌شود. توجه شود که هرکدام از این زیر مدل‌ها خود نیز دارای زیرمدل‌های خاص خود است. برای مثال سانسور پیش‌رونده نوع II شامل سانسور نوع II و سانسور پیش‌رونده نوع I شامل سانسور نوع I نیز هستند.

۱.۳ سانسور پیش‌رونده نوع I

اگر برای $i = 1, \dots, m$ ، T_i متغیر تصادفی تباهیده در t_i^* و R_i متغیر تصادفی تباهیده در r_i^* باشند، یعنی با قرار دادن $h_i(t_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) = g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) = I_{\{r_i^*\}}(r_i)$ و $I_{\{t_i^*\}}(t_i)$ در رابطه (۳) داریم:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) &= \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m h_i(t_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &= \prod_{i=1}^m I_{\{r_i^*\}}(r_i) \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m I_{\{t_i^*\}}(t_i), \\ &= I_{\{r_1^*, \dots, r_m^*\}}(r_1, \dots, r_m) I_{\{t_1^*, \dots, t_m^*\}}(t_1, \dots, t_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d_{(i-1)}}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}), \\
 & = \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d_{(i-1)}}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) I_{\{\mathbf{l}_m\}}(\mathbf{r}_m) I_{\{\mathbf{t}_m^*\}}(\mathbf{t}_m) \\
 & = f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(i)}} | \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) I_{\{\mathbf{r}_m^*\}}(\mathbf{r}_m) I_{\{\mathbf{t}_m^*\}}(\mathbf{t}_m) \\
 & = f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(i)}} | \mathbf{t}_m^*, \mathbf{r}_{m-1}^*),
 \end{aligned}$$

آنگاه تابع درستنمایی منتج شده، تابع درستنمایی سانسور پیش‌رونده نوع I با بردار زمان سانسور کردن $\mathbf{t}_m^* = (t_1^*, \dots, t_m^*)$ و بردار سانسور کردن $\mathbf{r}_m^* = (r_1^*, \dots, r_m^*)$ است.

۲.۳ سانسور پیش‌رونده نوع I با برداشت تصادفی

اگر برای $i = 1, \dots, m$ متغیر تصادفی تباهیده در t_i^* باشد و اگر متغیر تصادفی R_i مستقل از T_i و $\mathbf{X}_{d_{(i)}}$ باشد، یعنی $g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d_{(i)}}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) = g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{r}_{i-1})$ آنگاه با جایگذاری در رابطه (۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) & = f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(i)}} | \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{r}_{i-1}) I_{\{\mathbf{t}_m^*\}}(\mathbf{t}_m) \\
 & = f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(i)}} | \mathbf{t}_m^*, \mathbf{r}_{m-1}) \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{r}_{i-1})
 \end{aligned}$$

که همان تابع درستنمایی سانسور پیش‌رونده نوع I با برداشت تصادفی است.

۳.۳ سانسور پیش‌رونده تطبیقی نوع I

اگر برای $i = 1, \dots, m$ متغیر تصادفی تباهیده در t_i^* باشد، آنگاه تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) & = f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}} | \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}) \\
 & \times \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d_{(i)}}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) I_{\{\mathbf{t}_m^*\}}(\mathbf{t}_m)
 \end{aligned}$$

$$= f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)} | \mathbf{t}_m^*, \mathbf{r}_{m-1}) \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i^*, \mathbf{r}_{i-1}),$$

تغییر می‌کند که به آن سانسور پیش‌رونده تطبیقی نوع I می‌گویند.

۴.۳ سانسور پیش‌رونده تطبیقی نوع II

اگر برای $i = 1, \dots, m$ ، T_i متغیر تصادفی تباهیده در $x_{d_{(i-1)+1}}$ باشد، آنگاه زمان سانسور واحدها برابر با زمان مشاهده شکست ها است. تابع درست‌نمایی آن به صورت

$$f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) = \prod_{i=1}^m \binom{\eta_i}{d_i} d_i! \left\{ \prod_{j=1}^{d_i} f(x_{d_{(i-1)+j}}) \right\} \{1 - F(t_i)\}^{r_i} \\ \times \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \prod_{i=1}^m I_{\{x_{d_{(i-1)+1}}\}}(t_i),$$

خواهد شد. چون در این حالت d_i ، $(i = 1, \dots, m)$ برابر با ۱ است بنابراین $d_{(i)}$ برابر با I خواهد شد. تابع درست‌نمایی

$$f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) = \prod_{i=1}^m \{\eta_i f(x_i) \{1 - F(x_i)\}^{r_i}\} \prod_{i=1}^m g_i(r_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{r}_{i-1}),$$

همان تابع درست‌نمایی سانسور پیش‌رونده تطبیقی نوع II معرفی شده توسط کرامر و ایلویپلوس (۲۰۰۹) است. توجه شود که سانسور پیش‌رونده نوع II، سانسور هیبرید پیش‌رونده نوع II، سانسور پیش‌رونده نوع II طرح نگ و همکاران (۲۰۰۹)، سانسور پیش‌رونده نوع II طرح بایراموف و پارسی (۲۰۰۹)، زیر مدلی از سانسور پیش‌رونده تطبیقی نوع II هستند؛ (نگ و همکاران، ۲۰۰۹؛ کرامر و ایلویپلوس، ۲۰۰۹).

۴ استنباط آماری

قضیه ۱: برای $a = 1, \dots, m-1$ توزیع حاشیه‌ای $\mathbf{D}_a, \mathbf{X}_{d(a)}, \mathbf{T}_a, \mathbf{R}_a$ دارای چگالی حاشیه‌ای $f(\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_{d(a)}, \mathbf{t}_a, \mathbf{r}_a)$ دقیقاً با g_1, \dots, g_{a-1} و h_1, \dots, h_a که در $f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)$

استفاده شده است.

قضیه ۲: فرض کنید \mathbf{d}_m و $\mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m$ مقادیر مشاهده شده به ترتیب برای $\mathbf{X}_{d(m)}, \mathbf{T}_m, \mathbf{R}_m$ باشند، این که به چه طریقی R_i ها و T_i ها انتخاب شده‌اند (یعنی این که g_i ها و h_i ها هر تابع چگالی احتمالی باشند) تاثیری بر روی برآوردگرهای درستنمایی ندارد و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی سانسور پیش‌رونده کلی همانند برآوردگر ماکسیمم درستنمایی سانسور پیش‌رونده نوع I است، که در آن از طرح سانسور کردن $\mathbf{r}_m = (r_1, \dots, r_m)$ و زمان سانسور کردن $\mathbf{t}_m = (t_1, \dots, t_m)$ استفاده شده باشد. **برهان:** تابع درستنمایی برای داده‌های سانسور شده پیش‌رونده کلی با استفاده از رابطه (۳) به صورت

$$\begin{aligned} L(\theta|\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) &= \prod_{i=1}^m g_i(r_i|\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &\times \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i}|\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d_{(i-1)}}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1}) \\ &\times \prod_{i=1}^m h_i(t_i|\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d_{(i-1)}}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1}), \end{aligned}$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} \log(L(\theta|\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)) &= \log\left(\prod_{i=1}^m g_i(r_i|\mathbf{d}_i, \mathbf{x}_{d(i)}, \mathbf{t}_i, \mathbf{r}_{i-1})\right) \\ &+ \log(f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}|\mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1})) \\ &+ \log\left(\prod_{i=1}^m h_i(t_i|\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d_{(i-1)}}, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})\right). \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\frac{\partial \log(L(\theta|\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m))}{\partial \theta} = \frac{\partial f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}|\mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1})}{\partial \theta}.$$

پس

$$L(\theta|\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) \propto f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}|\mathbf{t}_m, \mathbf{r}_{m-1}).$$

قضیه ۲ برای آزمون درستنمایی فرضیه‌های مربوط به پارامتر جامعه و اطلاع فیشر نیز صادق است.

مثال ۶: فرض کنید متغیرهای طول عمر از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ پیروی کنند؛ یعنی

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F_\theta(x),$$

و

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x}.$$

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ برابر است با

$$\hat{\theta} = \frac{d_{(m)}}{TTT_m},$$

که در آن $TTT_m = \sum_{i=1}^m \{ \sum_{j=1}^{d_i} (x_{d_{(i-1)}+j}) + (r_i \times t_i) \}$ که برابر با مجموع زمان تحت آزمایش بودن همه واحدها است و در آن

$$\sum_{j=1}^{\circ} (x_{d_{(i-1)}+j}) = \circ.$$

فرض کنید

$$I(\theta) = -E \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)}{\partial \theta^2} \right],$$

اطلاع فیشر برای پارامتر θ باشد. اگر به جای θ از $\hat{\theta}$ استفاده شود برآورد اطلاع فیشر به صورت

$$I(\hat{\theta}) = -E \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)}{\partial \theta^2} \right] \Bigg|_{\theta=\hat{\theta}},$$

حاصل می‌شود. اگر در اطلاع فیشر عملگر امید ریاضی نادیده گرفته شود، آنگاه عدد اطلاع فیشر به صورت

$$\hat{I}(\theta) = - \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d_{(m)}}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)}{\partial \theta^2} \right],$$

به دست می‌آید. بنابراین برآورد عدد اطلاع فیشر برابر است با

$$\hat{I}(\hat{\theta}) = - \left[\frac{\partial^2 \log L(\theta | \mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m)}{\partial \theta^2} \right] \Big|_{\theta = \hat{\theta}}.$$

مقدار برآورد عدد اطلاع فیشر برای این مثال برابر است با

$$\hat{I}(\hat{\theta}) = \frac{d_{(m)}}{\hat{\theta}^2}.$$

با توجه به خاصیت نرمال بودن مجانبی برآوردگرهای ماکسیم درست‌نمایی در توزیع‌هایی که در شرایط نظم صدق می‌کنند، داریم:

$$(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0, \hat{I}^{-1}(\hat{\theta})).$$

بازه اطمینان $(1 - \alpha)\%$ برای پارامتر θ در توزیع نمایی یک پارامتره برابر است با

$$\hat{\theta} \left(1 \pm \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{d_{(m)}}} \right),$$

که در آن $Z_{1-\alpha/2}$ برابر صدک $(1 - \alpha/2)$ 100 بالا در توزیع نرمال استاندارد است.

با توجه به تعریف $\gamma_i, i = 1, \dots, m$ ، داریم:

$$\begin{aligned} r_1 &= \gamma_1 - d_1 - \gamma_2 \\ &\vdots \\ r_{m-1} &= \gamma_{m-1} - d_{m-1} - \gamma_m \\ r_m &= \gamma_m - d_m; \end{aligned}$$

لذا برای $i = 1, \dots, m$ ، r_i ها و γ_i ها دارای رابطه یک به یک هستند. بنابراین در رابطه (۳) به جای استفاده از r_i ها می‌توان از γ_i ها استفاده کرد. فرض کنید تابع جرم احتمال Γ_i برابر با \tilde{g}_i باشد. بنابراین

رابطه (۳) به صورت

$$f(\mathbf{d}_m, \mathbf{x}_{d(m)}, \mathbf{t}_m, \mathbf{r}_m) = \prod_{i=1}^m \tilde{g}_i(\gamma_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \gamma_{i-1}) \\ \times \prod_{i=1}^m f(d_i, \mathbf{x}_{d_i} | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_i, \gamma_i) \\ \times \prod_{i=1}^m h_i(t_i | \mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{x}_{d(i-1)}, \mathbf{t}_{i-1}, \gamma_i),$$

تغییر خواهد کرد، که در آن

$$\tilde{g}_1(\gamma_1 | \mathbf{d}_0, \mathbf{x}_{d(0)}, \mathbf{t}_0, \gamma_0) = I_{\{\gamma_1\}}(\gamma_1), \\ f(d_1, \mathbf{x}_{d_1} | \mathbf{d}_0, \mathbf{x}_{d(0)}, \mathbf{t}_1, \gamma_1) = f(d_1, \mathbf{x}_{d_1} | \mathbf{t}_1, \gamma_1), \\ h_1(t_1 | \mathbf{d}_0, \mathbf{x}_{d(0)}, \mathbf{t}_0, \gamma_1) = h_1(t_1 | \gamma_1).$$

قضیه ۳: تابع چگالی احتمال شرطی $\mathbf{X}_{d(a+1)}, \mathbf{T}_{a+1}, \Gamma_{a+1}$ و D_{a+1} به شرط $\mathbf{X}_{d(a)}, \mathbf{T}_a, \Gamma_a$ برای $a = 1, \dots, m-1$ در سانسور پیش‌رونده کلی برابر است با تابع چگالی سانسور پیش‌رونده کلی برای نمونه‌ای با حجم‌های γ_{a+1} که متغیرهای طول عمر آن‌ها دارای توزیعی با تابع چگالی f بریده شده از چپ در نقطه t_a با g_{a+1} ها و h_{a+1} هایی که به $\mathbf{d}_a, \mathbf{x}_{d(a)}, \mathbf{t}_a, \gamma_a$ وابسته است.

در حالت کلی سانسور پیش‌رونده کلی دارای ویژگی مارکوفی نیست اما با ایجاد تغییراتی می‌توان این خاصیت را برای آن ایجاد نمود.

قضیه ۴: اگر تابع توزیع شرطی $\Gamma_{a+1}, \Gamma_a = \gamma_a, \mathbf{X}_{d(a)} = \mathbf{x}_{d(a)}$ به شرط $a = 1, \dots, m-1$ ، $D_a = d_a, \mathbf{T}_a = \mathbf{t}_a$ تنها به $d_a, \mathbf{t}_a, \gamma_a, \mathbf{x}_{d_a}$ و تابع توزیع شرطی \mathbf{T}_{a+1} ، شرط $\mathbf{X}_{d(a)} = \mathbf{x}_{d(a)}$ ، $D_a = d_a, \mathbf{T}_a = \mathbf{t}_a, \Gamma_{a+1} = \gamma_{a+1}$ تنها به $d_a, \mathbf{t}_a, \gamma_a, \gamma_{a+1}, \mathbf{x}_{d_a}$ وابسته باشد، آنگاه دنباله‌ی متغیرهای تصادفی $Z_j = (D_a, \mathbf{T}_a, \Gamma_a, \mathbf{X}_{d_a})$ یک زنجیره مارکوف را تشکیل می‌دهند.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش ابتدا الگوریتم شبیه‌سازی ارائه می‌شود سپس به شبیه‌سازی آزمایش طول عمر پرداخته خواهد شده است.

۱.۵ الگوریتم شبیه‌سازی

داده‌های سانسور پیش‌رونده کلی از تابع توزیع $F(\cdot)$ و با توابع احتمال تعداد سانسور کردن و زمان سانسور کردن به ترتیب g_i و h_i ($i = 1, \dots, m$) با گام‌های زیر تولید می‌شوند:

گام ۱: n داده از توزیع F تولید شود؛

گام ۲: j برابر با ۱ قرار داده شود؛

گام ۳: T_j از تابع چگالی احتمال h_j تولید شود؛

گام ۴: تمامی داده‌های کوچکتر از T_j به عنوان مشاهدات ثبت شود؛

گام ۵: تعداد مشاهدات گام ۴ به عنوان d_j ثبت گردد؛

گام ۶: در زمان T_j مقدار R_j از تابع جرم احتمال g_j به دست آید؛

گام ۷: در زمان T_j تعداد R_j داده به تصادف از مجموعه داده‌های موجود حذف شود؛

گام ۸: عدد ۱ به مقدار j اضافه شود؛

گام ۹: اگر $j \leq m$ به گام ۳ برگرد؛

گام ۱۰: مقدار d_m ، $x_{d(m)}$ و t_m را نمایش بده.

۲.۵ شبیه‌سازی

سه طرح سانسور پیش‌رونده کلی و سانسور پیش‌رونده نوع I و II برای انجام این شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است. برای سانسور پیش‌رونده کلی و نوع I، تمامی فواصل برداشت از قبل تعیین شده و برابر $\frac{t_m}{m}$

است. تعداد سانسور کردن، یعنی r_i ها، برای سانسور پیش‌رونده نوع I و II ثابت در نظر گرفته شده است. برای سانسور پیش‌رونده کلی یک متغیر تصادفی از توزیع دوجمله‌ای

$$R_i \sim B(\eta_i - d_i, \frac{d_i}{\eta_i - d_i}),$$

در نظر گرفته شده است. برای داشتن یک درک شهودی از تاثیر روش سانسور پیش‌رونده کلی و نوع I بر روی یک نمونه، در آزمایشی با $m = 10$ و $t_m = 2$ به ترتیب سانسور پیش‌رونده نوع I و سانسور پیش‌رونده کلی با یک نمونه 20 تایی از توزیع نمایی با میانگین 10 شبیه‌سازی شده است و نتایج آن در جدول ۱ آورده شده است، که در آن چهار ستون سمت چپ مربوط به سانسور پیش‌رونده کلی و چهار ستون سمت راست مربوط به سانسور پیش‌رونده نوع I است.

جدول ۱. مقایسه دو طرح سانسور پیش‌رونده کلی و نوع I به ازای $n = 20$ و $m = 10$.

سانسور پیش‌رونده							
کلی				نوع I			
d	R	t	r	d	R	t	r
۰	۰	۰٫۲	۱	۰	۱	۰٫۲	۱
۱	۲	۰٫۴	۱	۰	۱	۰٫۴	۱
۱	۳	۰٫۶	۱	۱	۱	۰٫۶	۱
۰	۰	۰٫۸	۱	۰	۱	۰٫۸	۱
۰	۰	۱٫۰	۱	۰	۱	۱٫۰	۱
۰	۰	۱٫۲	۱	۰	۱	۱٫۲	۱
۰	۰	۱٫۴	۱	۰	۱	۱٫۴	۱
۰	۰	۱٫۶	۱	۰	۱	۱٫۶	۱
۰	۰	۱٫۸	۱	۰	۱	۱٫۸	۱
۲	۱۱	۲٫۰	۱	۱	۹	۲٫۰	۱

همانگونه که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود با توجه به این که سانسور پیش‌رونده کلی در صورت عدم وجود شکست در بازه $[t_{i-1}, t_i]$ هیچ واحدی را سانسور نمی‌کند و تعداد سانسور شده‌های آن از توزیع دوجمله‌ای پیروی می‌کند تعداد سانسور شده‌های هر مرحله سانسور را تغییر داده و باعث شده است که بدون افزایش زمان اتمام آزمایش به جای ۲ شکست در سانسور پیش‌رونده نوع I تعداد ۴ شکست در سانسور پیش‌رونده کلی مشاهده گردد.

شبیه‌سازی مونت‌کارلو با $10,000$ مرتبه تکرار برای توزیع نمایی با میانگین‌های 10° و 50° با m و n ‌های متفاوت و با t_m ‌های 1 و 10 صورت پذیرفته و هربار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی محاسبه به همراه اربیی تجربی و میانگین توان‌های دوم خطای تجربی برآوردها در جدول‌های 2 و 3 نشان داده شده است که در آن

$$b_k = \text{اربیی تجربی برآوردها،}$$

$$\text{MSE}_k = \text{میانگین توان‌های دوم خطای تجربی برآوردها،}$$

$$d_{(m)_k} = \text{میانگین تعداد مشاهدات،}$$

$t_{m_k} =$ زمان اتمام آزمایش، هستند به طوری که سانسورهای پیش‌رونده کلی، نوع I و نوع II به ترتیب با مقادیر $1, 2, 3$ برای اندیس k در نظر گرفته شده است. در جدول‌های 2 و 3 برای خلاصه نویسی بردار (a, a, a, b, b, b, b) به صورت (a_3, b_4) نوشته شده است.

جدول ۲. نتایج شبیه‌سازی توزیع نمایی با میانگین 10°

no.	n	m	r	t_1	t_2	t_3	$d_{(m)_1}$	$d_{(m)_2}$	$d_{(m)_3}$
۱	۲۰	۵	(۳ _۵)	۱	۱	۵/۷۲	۱/۸۳	۱/۳۲	۵
۲	۲۰	۵	(۰ _۲ , ۵ _۳)	۱	۱	۴/۰۹	۱/۸۳	۱/۶۲	۵
۳	۲۰	۱۰	(۱ _{۱۰})	۱	۱	۱۴/۶۱	۱/۸	۱/۴۴	۱۰
۴	۲۰	۱۰	(۲ _۵ , ۰ _۵)	۱	۱	۲۶/۸	۱/۸۴	۱/۲۵	۱۰
۵	۳۰	۵	(۶ _۵)	۱	۱	۷/۵۴	۲/۷۵	۱/۶۹	۵
۶	۳۰	۱۰	(۲ _{۱۰})	۱	۱	۹/۷۸	۲/۷۳	۱/۹۹	۱۰
۷	۴۰	۵	(۷ _۵)	۱	۱	۲/۸۷	۳/۶۶	۲/۴۶	۵
۸	۴۰	۱۰	(۳ _{۱۰})	۱	۱	۷/۳۱	۳/۶۴	۲/۵۱	۱۰
۹	۴۰	۱۵	(۳ _۵ , ۱ _{۱۰})	۱	۱	۱۶/۲۶	۳/۶۳	۲/۳۸	۱۵
۱۰	۵۰	۵	(۹ _۵)	۱	۱	۲/۳	۴/۵۹	۳/۰۳	۵
۱۱	۵۰	۱۰	(۴ _{۱۰})	۱	۱	۵/۸۵	۴/۵۸	۳/۰۴	۱۰
۱۲	۵۰	۱۵	(۳ _{۱۰} , ۱ _۵)	۱	۱	۱۴/۹۸	۴/۵۴	۲/۸۵	۱۵
۱۳	۵۰	۲۰	(۱ _{۱۰} , ۲ _{۱۰})	۱	۱	۱۲/۲۲	۴/۵۵	۳/۶۲	۲۰
۱۴	۷۰	۱۰	(۶ _{۱۰})	۱	۱	۴/۲	۶/۴۲	۴/۰۸	۱۰
۱۵	۷۰	۲۰	(۱ _{۱۰} , ۴ _{۱۰})	۱	۱	۷/۵۲	۶/۳۶	۵/۰۷	۲۰
۱۶	۷۰	۳۰	(۱ _{۲۰} , ۲ _{۱۰})	۱	۱	۱۳/۸۶	۶/۳۳	۵/۰۹	۳۰
۱۷	۱۰۰	۱۰	(۹ _{۱۰})	۱	۱	۲/۹۲	۹/۰۸	۵/۵۷	۱۰
۱۸	۱۰۰	۲۰	(۴ _{۲۰})	۱	۱	۷/۱۶	۹/۰۷	۵/۸۳	۲۰
۱۹	۱۰۰	۳۰	(۱ _{۱۰} , ۳ _{۲۰})	۱	۱	۱۰/۱۲	۹/۰۸	۶/۸۹	۳۰
۲۰	۱۰۰	۵۰	(۱ _{۵۰})	۱	۱	۲۲/۴۶	۹/۰۳	۷/۱۱	۵۰

ادامه جدول ۲: نتایج شبیه‌سازی توزیع نمایی با میانگین ۱۰

no.	b_1	b_2	b_3	MSE ₁	MSE ₂	MSE ₃
۱	۰/۰۰۵۰۶	۰/۰۰۴۸۹	۰/۰۲۴۷۸	۰/۰۰۶۰۹	۰/۰۰۸۴۰	۰/۰۰۵۶۶
۲	۰/۰۰۵۵۸	۰/۰۰۴۳۴	۰/۰۲۵۰۰	۰/۰۰۶۲۸	۰/۰۰۶۸۸	۰/۰۰۶۰۰
۳	۰/۰۰۴۴۶	۰/۰۰۲۲۵	۰/۰۱۱۰۴	۰/۰۰۶۲۰	۰/۰۰۷۳۰	۰/۰۰۱۶۵
۴	۰/۰۰۶۷۶	۰/۰۰۶۸۸	۰/۰۱۱۰۴	۰/۰۰۶۳۵	۰/۰۰۹۲۵	۰/۰۰۱۶۹
۵	۰/۰۰۳۵۴	۰/۰۰۳۹۳	۰/۰۲۴۵۲	۰/۰۰۳۹۹	۰/۰۰۶۵۱	۰/۰۰۵۵۱
۶	۰/۰۰۳۴۳	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۱۰۹۴	۰/۰۰۴۰۰	۰/۰۰۵۴۴	۰/۰۰۱۶۹
۷	۰/۰۰۲۴۷	۰/۰۰۲۹۱	۰/۰۲۴۵۱	۰/۰۰۲۹۳	۰/۰۰۴۴۲	۰/۰۰۵۷۶
۸	۰/۰۰۲۶۹	۰/۰۰۲۹۹	۰/۰۱۱۴۳	۰/۰۰۲۹۰	۰/۰۰۴۲۳	۰/۰۰۱۷۶
۹	۰/۰۰۲۶۸	۰/۰۰۳۲۶	۰/۰۰۷۰۶	۰/۰۰۲۹۴	۰/۰۰۴۵۶	۰/۰۰۰۹۳
۱۰	۰/۰۰۲۴۷	۰/۰۰۲۶۸	۰/۰۲۵۲۲	۰/۰۰۲۲۵	۰/۰۰۳۴۳	۰/۰۰۶۱۷
۱۱	۰/۰۰۲۶۹	۰/۰۰۲۹۳	۰/۰۱۱۴۱	۰/۰۰۲۳۰	۰/۰۰۳۵۲	۰/۰۰۱۶۵
۱۲	۰/۰۰۱۹۹	۰/۰۰۱۹۰	۰/۰۰۷۰۴	۰/۰۰۲۳۵	۰/۰۰۳۷۷	۰/۰۰۰۹۱
۱۳	۰/۰۰۲۴۲	۰/۰۰۱۵۰	۰/۰۰۵۳۲	۰/۰۰۲۳۰	۰/۰۰۲۸۰	۰/۰۰۰۶۴
۱۴	۰/۰۰۲۳۶	۰/۰۰۲۳۷	۰/۰۱۱۳۸	۰/۰۰۱۶۲	۰/۰۰۲۵۱	۰/۰۰۱۶۹
۱۵	۰/۰۰۱۵۰	۰/۰۰۰۹۹	۰/۰۰۵۳۳	۰/۰۰۱۶۵	۰/۰۰۲۰۶	۰/۰۰۰۶۶
۱۶	۰/۰۰۱۱۱	۰/۰۰۰۶۶	۰/۰۰۳۶۳	۰/۰۰۱۶۱	۰/۰۰۲۰۰	۰/۰۰۰۴۰
۱۷	۰/۰۰۰۷۸	۰/۰۰۰۶۴	۰/۰۱۱۳۶	۰/۰۰۱۱۳	۰/۰۰۱۸۲	۰/۰۰۱۷۱
۱۸	۰/۰۰۰۹۱	۰/۰۰۰۸۵	۰/۰۰۵۶۱	۰/۰۰۱۱۱	۰/۰۰۱۷۵	۰/۰۰۰۶۲
۱۹	۰/۰۰۱۱۰	۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۳۴۱	۰/۰۰۱۱۰	۰/۰۰۱۴۷	۰/۰۰۰۳۸
۲۰	۰/۰۰۰۴۷	۰/۰۰۰۲۰	۰/۰۰۱۸۸	۰/۰۰۱۱۰	۰/۰۰۱۳۷	۰/۰۰۰۲۲

همان طور که در جدول‌های ۲ و ۳ دیده می‌شود شبیه‌سازی سانسورهای پیش رونده کلی، نوع I و نوع II برای داده‌های توزیع نمایی با میانگین ۱۰ و با استفاده از نمونه‌ای به حجم ۲۰، $m = 5$ بردار زمان سانسور $t = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1)$ و بردار سانسور کردن $r = (3, 3, 3, 3)$ انجام شده است. زمان اتمام آزمایش برای سانسورهای پیش رونده کلی، نوع I و نوع II به ترتیب برابر با ۱، ۱ و ۵/۷۲ شده است. میانگین تعداد شکست‌های مشاهده شده در آزمایش برای سانسورهای پیش رونده کلی، نوع I و نوع II به ترتیب برابر با ۱۸۳، ۱۳۲ و ۵ بوده است. در این طرح مقدار آریبی برآورد برای سانسورهای پیش رونده کلی، نوع I و نوع II به ترتیب برابر با ۰/۰۰۵۰۶، ۰/۰۰۴۸۹ و ۰/۰۲۴۷۸ است.

میانگین توان‌های دوم خطا برای آن‌ها نیز به ترتیب $۰/۰۰۶۰۹$ ، $۰/۰۰۸۴$ و $۰/۰۰۵۶۶$ است. همان‌طور که در جدول‌های ۲ و ۳ دیده می‌شود، سانسور پیش‌رونده کلی نسبت به سانسور پیش‌رونده نوع I با حفظ زمان اتمام آزمایش تعداد مشاهدات را بیشتر می‌کند و دارای ارببی تجربی بیشتری است، اما MSE آن کمتر است. لذا برآوردهای بهتری را ارائه می‌کند. سانسور پیش‌رونده نوع II نسبت به سانسور پیش‌رونده کلی دارای برآورد بهتری است، اما زمان اتمام آزمایش در آن تا ۲۲ برابر زمان اتمام آزمایش با استفاده از سانسور پیش‌رونده کلی است. با توجه به اختلاف بسیار زیاد زمان اتمام آزمایش در این دو سانسور از مزیت برتری نسبی برآورد در سانسور پیش‌رونده نوع II می‌توان صرف نظر کرد.

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی توزیع نمایی با میانگین ۵۰

no.	n	m	r	t_1	t_2	t_3	$d_{(m)_1}$	$d_{(m)_2}$	$d_{(m)_3}$
۱	۲۰	۵	(۳۵)	۱۰	۱۰	۲۸۹۷	۳۲۲	۲۳۶	۵
۲	۲۰	۵	(۰۲, ۵۳)	۱۰	۱۰	۲۰۴۶	۳۳۴	۳۰۴	۵
۳	۲۰	۱۰	(۱۱۰)	۱۰	۱۰	۷۲۸۳	۳۳۳	۲۷۸	۱۰
۴	۲۰	۱۰	(۲۵, ۰۵)	۱۰	۱۰	۱۳۴۱۹	۳۳۷	۲۳۵	۱۰
۵	۳۰	۵	(۶۵)	۱۰	۱۰	۳۸۱۸	۵۰۲	۳۱۷	۵
۶	۳۰	۱۰	(۲۱۰)	۱۰	۱۰	۴۸۵۶	۴۹۹	۳۷۴	۱۰
۷	۴۰	۵	(۷۵)	۱۰	۱۰	۱۴۱۷	۶۷	۴۶۲	۵
۸	۴۰	۱۰	(۳۱۰)	۱۰	۱۰	۳۶۶۲	۶۶۷	۴۷۳	۱۰
۹	۴۰	۱۵	(۳۵, ۱۱۰)	۱۰	۱۰	۸۱۳۴	۶۶	۴۴۳	۱۵
۱۰	۵۰	۵	(۹۵)	۱۰	۱۰	۱۱۴۴	۸۳۷	۵۶۷	۵
۱۱	۵۰	۱۰	(۴۱۰)	۱۰	۱۰	۲۹۴۳	۸۳	۵۶۷	۱۰
۱۲	۵۰	۱۵	(۳۱۰, ۱۵)	۱۰	۱۰	۷۵۱۴	۸۳۳	۵۴۴	۱۵
۱۳	۵۰	۲۰	(۱۱۰, ۲۱۰)	۱۰	۱۰	۶۱۳۷	۸۲۶	۶۸۵	۲۰
۱۴	۷۰	۱۰	(۶۱۰)	۱۰	۱۰	۲۰۸۵	۱۱۶۲	۷۶۱	۱۰
۱۵	۷۰	۲۰	(۱۱۰, ۴۱۰)	۱۰	۱۰	۳۷۵	۱۱۶	۹۶۳	۲۰
۱۶	۷۰	۳۰	(۱۲۰, ۲۱۰)	۱۰	۱۰	۶۹۴۳	۱۱۵۸	۹۶۷	۳۰
۱۷	۱۰۰	۱۰	(۹۱۰)	۱۰	۱۰	۱۴۶۷	۱۶۶۴	۱۰۵۵	۱۰
۱۸	۱۰۰	۲۰	(۴۲۰)	۱۰	۱۰	۳۵۹۸	۱۶۵۶	۱۱	۲۰
۱۹	۱۰۰	۳۰	(۱۱۰, ۳۲۰)	۱۰	۱۰	۵۰۳۷	۱۶۵۴	۱۳	۳۰
۲۰	۱۰۰	۵۰	(۱۵۰)	۱۰	۱۰	۱۱۲۴	۱۶۵	۱۳۵۱۷	۵۰

ادامه جدول ۳: نتایج شبیه‌سازی توزیع نمایی با میانگین ۵۰

no.	b_1	b_2	b_3	MSE ₁	MSE ₂	MSE ₃
۱	۰/۰۰۰۱۱۲	-۰/۰۰۰۲۵	۰/۰۰۳۹۷۷	۰/۰۰۰۱۲۹	۰/۰۰۰۱۶۲	۰/۰۰۰۱۷۹
۲	۰/۰۰۱۰۷۴	۰/۰۰۰۷۰۵	۰/۰۰۴۸۷۲	۰/۰۰۰۱۳۶	۰/۰۰۰۱۴۰	۰/۰۰۰۲۲۹
۳	۰/۰۰۱۲۸۰	۰/۰۰۰۸۸۴	۰/۰۰۲۳۳۰	۰/۰۰۰۱۴۲	۰/۰۰۰۱۶۰	۰/۰۰۰۰۶۶
۴	۰/۰۰۱۵۹۱	۰/۰۰۱۳۸۷	۰/۰۰۲۳۴۱	۰/۰۰۰۱۵۲	۰/۰۰۰۲۰۵	۰/۰۰۰۰۶۷
۵	۰/۰۰۰۷۰۵	۰/۰۰۰۷۴۳	۰/۰۰۴۷۸۴	۰/۰۰۰۰۸۸	۰/۰۰۰۱۳۶	۰/۰۰۰۰۲۱۲
۶	۰/۰۰۰۸۱۰	۰/۰۰۰۶۲۶	۰/۰۰۲۳۰۵	۰/۰۰۰۰۹۱	۰/۰۰۰۱۱۵	۰/۰۰۰۰۶۸
۷	۰/۰۰۰۵۴۲	۰/۰۰۰۶۱۳	۰/۰۰۵۳۷۵	۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۹۴	۰/۰۰۰۰۲۵۵
۸	۰/۰۰۰۶۶۴	۰/۰۰۰۶۲۳	۰/۰۰۲۳۰۱	۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۹۰	۰/۰۰۰۰۶۷
۹	۰/۰۰۰۴۶۲	۰/۰۰۰۳۷۶	۰/۰۰۱۳۷۱	۰/۰۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۹۵	۰/۰۰۰۰۳۶
۱۰	۰/۰۰۰۴۰۰	۰/۰۰۰۴۷۴	۰/۰۰۵۰۰۹	۰/۰۰۰۰۴۹	۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۰۲۱۹
۱۱	۰/۰۰۰۴۳۰	۰/۰۰۰۳۹۲	۰/۰۰۲۰۹۵	۰/۰۰۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰۷۵	۰/۰۰۰۰۶۵
۱۲	۰/۰۰۰۶۱۰	۰/۰۰۰۷۲۸	۰/۰۰۱۵۳۵	۰/۰۰۰۰۵۲	۰/۰۰۰۰۷۹	۰/۰۰۰۰۳۹
۱۳	۰/۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۰۳۵۲	۰/۰۰۱۰۳۲	۰/۰۰۰۰۵۱	۰/۰۰۰۰۶۱	۰/۰۰۰۰۲۶
۱۴	۰/۰۰۰۳۰۰	۰/۰۰۰۳۳۸	۰/۰۰۲۲۸۶	۰/۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۰۶۸
۱۵	۰/۰۰۰۳۶۸	۰/۰۰۰۳۲۰	۰/۰۰۱۰۸۴	۰/۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۰۲۶
۱۶	۰/۰۰۰۳۶۲	۰/۰۰۰۲۴۱	۰/۰۰۰۷۴۰	۰/۰۰۰۰۳۷	۰/۰۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۰۱۶
۱۷	۰/۰۰۰۲۶۴	۰/۰۰۰۳۱۳	۰/۰۰۲۲۷۳	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳۹	۰/۰۰۰۰۶۸
۱۸	۰/۰۰۰۲۳۶	۰/۰۰۰۲۳۱	۰/۰۰۱۰۹۵	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳۸	۰/۰۰۰۰۲۷
۱۹	۰/۰۰۰۲۵۶	۰/۰۰۰۲۲۲	۰/۰۰۰۷۲۵	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳۱	۰/۰۰۰۰۱۶
۲۰	۰/۰۰۰۲۱۴	۰/۰۰۰۱۳۱	۰/۰۰۰۴۰۵	۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۰۰۰۰۳۰	۰/۰۰۰۰۰۹

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برای از بین بردن نواقص سانسور پیش‌رونده نوع I تعمیمی از آن با عنوان «سانسور پیش‌رونده کلی» ارائه شد. از برتری‌های سانسور پیش‌رونده کلی، انعطاف بسیار زیاد آن است که به آزمایشگر این اجازه را می‌دهد که با استفاده از تغییر دادن زمان و تعداد سانسور شونده طول زمان انجام آزمایش را کنترل نماید تا بتواند تعداد شکست مورد نظر را کسب نماید لذا این روش در آزمایشاتی که محدودیت زمانی دارند می‌تواند پرکاربرد واقع شود. همچنین باید توجه نمود که سانسورهای پیش‌رونده نوع I و II یک حالت خاص از سانسور پیش‌رونده کلی هستند. در آزمایشاتی که پیش از شروع آزمایش از توانایمان در تعداد سانسور و زمان سانسور کردن اطلاعی وجود ندارد، استفاده از سانسور پیش‌رونده کلی می‌تواند بسیار سودمند باشد. در برخی از آزمایشات مشکلاتی پیش می‌آید که نمی‌توان تعداد از پیش تعیین شده‌ای از واحدها تحت آزمایش را از آن حذف کرد، در این گونه موارد، سانسور پیش‌رونده کلی می‌تواند یاری‌گر

آزمایشگر باشد. به طور کلی سانسور معرفی شده این توانایی را دارد که نسبت به سانسور پیش‌رونده نوع I با حفظ زمان اتمام آزمایش تعداد مشاهده بیشتری را ارائه نماید. با توجه به تنوع زیر مدل‌های سانسور پیش‌رونده کلی، انعطاف زیاد آن و نتایج جدول‌های ۲ و ۳ این سانسور را می‌توان جهت انجام آزمایش‌های طول عمر به آزمایشگران توصیه نمود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از سردبیر محترم و داوران گرامی مجله علوم آماری که با نظرات ارزنده خود باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شدند کمال سپاس را دارند.

مراجع

- Affify, W. M. (2011), Classical Estimation of Mixed Rayleigh Distribution in Type I Progressive Censored, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **10**, 619-632.
- Ashour, S .K. and Abu El Azm, W. S. (2016), Maximum Likelihood Estimation Based on Type-I Hybrid Progressive Censored Competing Risks Data, *International Journal of Advanced Statistics and Probability*, **4**, 20-26.
- Ashour, S. K. and Nassar, M. M. A. (2014), Analysis of Exponential Distribution Under Adaptive Type-I Progressive Hybrid Censored Competing Risks Data, *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, **10**, 229-245.
- Ashour, S. K. and Nassar, M. M. A. (2017), Inference for Weibull Distribution Under Adaptive Type-I Progressive Hybrid Censored Competing Risks Data, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **46**, 229-245.
- Balakrishnan, N. (2007), Progressive Censoring Methodology: an Appraisal (with discussions), *Test*, **16**, 211-296.
- Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*, Birkhäuser, Boston.
- Balakrishnan, N. and Bordes, L. and Zhao, X. (2010), Minimum-Distance Parametric Estimation Under Progressive Type-I Censoring, *Ieee transactions on reliability*, 59.

- Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The Art of Progressive Censoring*, Springer, New York.
- Cramer, E. and Iliopoulos, G. (2009), Adaptive Progressive Type-II Censoring, *Test*, **19**, 342-358.
- Ng, H. K. T. and Kundu, D. and Chan, P. S. (2009), Statistical of Analysis of Exponential Lifetimes under an Adaptive Type-II Progressive Censoring Scheme, *Naval Research Logistics*, **56**, 687-698.
- Shen, K. F. and Shen, Y. J. and Leu, L. Y. (2011), Design of Optimal Step-Stress Accelerated Life Tests Under Progressive Type I Censoring With Random Removals, *Quality & Quantity*, **45**, 587-597.
- Tomer, S. K. and Panwar, M. S. (2015), Estimation Procedures for Maxwell Distribution Under Type-I Progressive Hybrid Censoring Scheme, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**, 339-356.