

نمایش فضای حالت مدل‌های خودبازگشت آمیخته

محمدرضا یگانگی، رحیم چینی‌پرداز

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

چکیده: این مقاله به بررسی مدل سری زمانی خود بازگشت آمیخته با وزن‌های ثابت در قالب فضای حالت و تعمیم آن به مدل‌های خودبازگشت - میانگین متحرک آمیخته می‌پردازد. توابع چگالی پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی با استفاده از یک روش مونت کارلوی دنباله‌ای تقریب زده شده‌اند. همچنین الگوریتم EM برای برآورد پارامترهای مدل در فضای حالت ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد در قالب فضای حالت، ابعاد بردار پارامترهای مدل کاهش می‌یابد. علاوه بر این رفتار الگوریتم‌های پالایش و هموارسازی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل‌های ایستا مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد الگوریتم پالایش در مدت زمان کوتاهی به یک حالت پایا نزدیک می‌شود. همچنین پس از گذشت زمان کوتاهی میانگین توزیع‌های پالایش و هموارسازی به مقادیر واقعی بردار حالت نزدیک می‌شوند. **واژه‌های کلیدی:** الگوریتم EM ، پالایه کالمن آمیخته، مدل پویای خطی شرطی، مدل خود بازگشت آمیخته، مدل خود $ARMA$ آمیخته، مدل فضای حالت غیرخطی.

۱ مقدمه

یک مدل فضای حالت عمومی به شکل

$$\mathbf{x}_t \sim F(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}), \quad y_t \sim F(y_t | \mathbf{x}_t), \quad (1)$$

تعریف می‌شود (کیتاگوا و گرش، ۱۹۹۶) که در آن سری زمانی مشاهده شده و $\mathbf{x}_t = (x_{t,1}, \dots, x_{t,p})$ بردار حالت (معمولا غیر قابل مشاهده) است. فرض اساسی در مدل‌های فضای حالت، خاصیت مارکوفی بردار حالت است. در مدل (۱) توزیع اول را توزیع حالت و توزیع دوم را توزیع اندازه می‌نامند. با استفاده از امید ریاضی شرطی می‌توان مقادیر بردار حالت و سری زمانی y_t را به صورت

$$\mathbf{x}_t = E(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\omega}_t = k(\mathbf{x}_{t-1}) + \boldsymbol{\omega}_t, \quad y_t = E(y_t | \mathbf{x}_t) + \varepsilon_t = h(\mathbf{x}_t) + \varepsilon_t, \quad (2)$$

پیش‌بینی نمود، که در آن $k(\mathbf{x}_{t-1})$ و $h(\mathbf{x}_t)$ به ترتیب امید ریاضی شرطی توزیع \mathbf{x}_t به شرط \mathbf{x}_{t-1} و توزیع شرطی y_t به شرط \mathbf{x}_t هستند. معادلات رابطه (۲) را به ترتیب معادلات حالت اندازه می‌نامند. در حالت خاصی که توزیع‌های حالت و اندازه نرمال باشند و وابستگی آنها به متغیر شرط تنها در میانگین باشد، مدل فضای حالت به یک مدل فضای حالت خطی به شکل کلی

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_{t-1} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad y_t = \mathbf{F}'\mathbf{x}_t + \varepsilon_t,$$

تبدیل خواهد شد، که در آن $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, R)$ و $\boldsymbol{\omega}_t \stackrel{iid}{\sim} N_p(\mathbf{o}, \mathbf{Q})$ و بردار صفر است. ماتریس‌های $\mathbf{H}_{p \times p}$ ، $\mathbf{F}_{p \times 1}$ و $\mathbf{Q}_{p \times p}$ و مقدار اسکالر R را پارامترهای سیستم یا ماتریس‌های سیستم می‌نامند. مسئله مهم در مدل‌های فضای حالت، برآورد بردار حالت با استفاده از مشاهدات سری زمانی است. با استفاده از مدل (۱) می‌توان توزیع بردار حالت در لحظه t را به شرط مشاهدات قبل از t ، تا لحظه t و بعد از آن به دست آورد. تابع $F(\mathbf{x}_t | y_1, \dots, y_s)$ به ازای $s < t$ را توزیع پیش‌بینی^۱، $F(\mathbf{x}_t | y_1, \dots, y_t)$ را توزیع پالایش^۲ و $F(\mathbf{x}_t | y_1, \dots, y_n)$ به ازای $n > t$ را توزیع هموارسازی^۳ می‌نامند. با استفاده از توزیع‌های پیش‌بین، پالایش و هموارسازی می‌توان معادلات بازگشتی را برای پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی مقادیر بردار حالت نوشت. به این ترتیب، به ازای یک بردار مشاهدات برآوردی برای بردار حالت در زمان‌های مختلف به دست می‌آید. کالمن (۱۹۶۰) یک دستگاه معادلات بازگشتی برای پیش‌بینی و پالایش بردار حالت در مدل فضای حالت خطی گوسی با خطاهای سیستم و مشاهداتی مستقل ارائه نموده است. برای مدل‌های فضای حالت غیرخطی نیز می‌توان معادلات پیش‌بینی، پالایش و به‌هنگام‌سازی را با استفاده از نمونه‌گیری مونت کارلوی دنباله‌ای به دست آورد (گودسیل و همکاران، ۲۰۰۴). برای اینکه بردار حالت

¹Forecasting distribution

²Filtering distribution

³Smoothing distribution

قابل برآورد باشد، مدل فضای حالت باید کنترل‌پذیر باشد. یک مدل فضای حالت را کنترل‌پذیر^۴ گویند اگر از هر وضعیت بردار حالت، در تعداد گام محدود بتوان به یک وضعیت بردار حالت دیگر رسید. به بیان دیگر هر دو وضعیت بردار حالت باید در یک زمان متناهی در دسترس هم قرار داشته باشند. کنترل‌پذیری یک مدل فضای حالت، تضمین می‌کند که اگر تغییری در بردار حالت رخ دهد، می‌توان با استفاده از پالایه مناسب تغییر را شناسایی نمود و مدل را با شرایط جدید تطبیق داد (هاروی، ۱۹۹۱). یکی دیگر از ویژگی‌هایی که در برآورد بردار حالت بسیار مهم است، همگرایی ماتریس کوواریانس خطای برآورد بردار حالت است. اگر ماتریس خطای برآورد در یک پالایه به سمت یک عدد ثابت میل کند، می‌توان نشان داد که خطای برآورد در پالایه مورد استفاده به مقادیر آغازین وابسته نیست. در این شرایط گفته می‌شود پالایه دارای یک وضعیت پایا^۵ است (کمندر و کوپمن، ۲۰۰۷). به این ترتیب در مدل‌های فضای حالت کنترل‌پذیر با استفاده از پالایه‌ای که دارای وضعیت پایا است، می‌توان از برآورد بردار حالت برای برآورد پارامترهای سیستم استفاده نمود. جزییات بیشتر در مورد مفاهیم مربوط به مدل‌های فضای حالت در کمندر و کوپمن (۲۰۰۷) و گروال و اندروز (۲۰۰۸) آمده است. استفاده از نمایش فضای حالت در مدل‌های سری زمانی به عنوان روشی برای برآورد، پیش‌بینی، هموارسازی و محاسبه درستی‌مندی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بعضی موارد استفاده از نمایش فضای حالت به کاهش پیچیدگی‌های مدل مورد بررسی کمک می‌کند. به عنوان نمونه مدل دوخطی^۶ را می‌توان به صورت یک مدل فضای حالت خطی نمایش داد (فام، ۱۹۸۵). همچنین با استفاده از نمایش فضای حالت به سادگی می‌توان به مدل‌سازی سری‌های زمانی با خطای اندازه‌گیری (خطای مشاهداتی) پرداخت (شاموی و استوفر، ۲۰۱۱).

مدل AR خطی را می‌توان به شیوه‌های مختلفی در قالب فضای حالت نمایش داد. یکی از نمایش‌های

مدل $AR(p)$ خطی در فضای حالت به صورت

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{T}\mathbf{x}_t + \mathbf{h}\varepsilon_t, \quad y_t = \phi_0 + \mathbf{F}'\mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \quad (3)$$

است (پیرلمن، ۱۹۸۰) که در آن $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ، $\mathbf{h} = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ ، $\mathbf{F}' = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times p}$

⁴Controllable

⁵Steady state

⁶Bilinear

و T به صورت

$$T = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{p-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \phi_p & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

تعریف می‌شود. از آنجا که در مدل (۳) خطای معادله اندازه و خطای معادله حالت مشترک هستند؛ برای بدست آوردن توابع چگالی پالایش و هموارسازی می‌توان از معدلات بازگشتی کالمن با خطاهای همبسته استفاده نمود (شاموی و استوفر، ۲۰۱۱). شرایط کنترل‌پذیری این مدل را می‌توان به سادگی به دست آورد (دجانگ و پنزر، ۲۰۰۴). همچنین می‌توان نشان داد تحت شرایط کنترل‌پذیری مدل (۳)، پالایه کالمن به یک حالت پایا همگرا می‌شود (دجانگ و پنزر، ۲۰۰۴). اگر ماتریس‌های سیستمی مدل (۳) به صورت زیر باز تعریف شوند، می‌توان یک نمایش فضای حالت برای مدل $ARMA(p, q)$ به صورت $F' = (1, 0, \dots, 0)_{1 \times l}$ و $h = (\phi_1 + \theta_1, \dots, \phi_l + \theta_l)'$

$$T = \begin{pmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{l-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \phi_l & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نوشت، که در آن $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ و $l = \max(p, q)$. استفاده از فضای حالت برای نمایش مدل‌های سری زمانی منحصر به مدل‌های خطی نیست. در مدل‌های غیرخطی نیز به طور گسترده‌ای از نمایش فضای حالت برای برازش مدل و هموارسازی استفاده شده است. به عنوان مثال، پریستلی (۱۹۸۰) خانواده مدل‌های وابسته به حالت را به صورت مدل فضای حالت نمایش داده و برازش مدل را در فضای حالت انجام داده است. اگرچه مدل‌های فضای حالت آمیخته طی دهه اخیر بسیار توسعه یافته‌اند (لمکه، ۲۰۰۶)، استفاده از نمایش فضای حالت برای مدل‌های سری زمانی آمیخته کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

در این مقاله مدل MAR در قالب فضای حالت نمایش داده شده و شکل دقیق توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش ارائه شده. با توجه به مشکلات عملی استفاده از شکل دقیق توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش، یک نسخه جدید از پالایه کالمن آمیخته و هموارسازی کالمن آمیخته برای تقریب زدن توابع چگالی پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی ارائه شده است. با استفاده از توابع چگالی پالایش و هموارسازی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل MAR در فضای حالت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین رفتار الگوریتم‌های پالایش و هموارسازی در مدل‌های ایستا با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۲ یک نمایش فضای حالت برای مدل MAR ارائه شده است. توابع چگالی پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی در بخش ۳ محاسبه شده‌اند. بخش ۴ به برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل ارائه شده در بخش دوم می‌پردازد و یک الگوریتم EM برای برآورد پارامترهای مدل پیشنهاد می‌کند. بخش ۵ به ارائه نتایج مطالعه شبیه‌سازی روی رفتار الگوریتم‌های پالایش و هموارسازی ارائه شده در بخش ۳ اختصاص یافته است.

۲ نمایش فضای حالت برای مدل MAR

یک مدل سری زمانی آمیخته^۷، $MAR(m; p)$ ، با m مولفه و گام‌های یکسان به صورت

$$f(y_t | \mathbf{y}_{t-1}) = \sum_{i=1}^m \pi_i n(y_t; \phi_i' \mathbf{y}_{t-1}^*, \sigma_i^2), \quad (4)$$

تعریف می‌شود (وونگ و لی، ۲۰۰۰) که در آن $\phi_i = (\phi_{i,0}, \dots, \phi_{i,p})'$ ، $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p})'$ ، $\mathbf{y}_t^* = (1, y_t, \dots, y_{t-p})'$ و $n(\cdot; \mu, \sigma^2)$ تابع چگالی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است. با توجه به این‌که مدل (۴) از مدل AR خطی تشکیل شده است، می‌توان مدل (۴) را به صورت

$$\begin{aligned} f(y_t | \mathbf{y}_{t-1}, \Lambda_t = i) &= n(y_t; \phi_i' \mathbf{y}_{t-1}^*, \sigma_i^2), \\ P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}_{t-1}) &= \pi_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (5)$$

⁷Mixture Autoregressive

بازنویسی کرد، که در آن Λ_t متغیر پنهان اندیس‌گذار است. برای بازنویسی مدل (۴) در فضای حالت، کافی است هر یک از مولفه‌های مدل به صورت فضای حالت بازنویسی شوند. با استفاده از روابط (۵) و (۳) یک نمایش فضای حالت برای مدل MAR عبارت است از:

$$P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}_{t-1}) = \pi_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\text{Given } \Lambda_t = i : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{h}_i \varepsilon_t, \\ y_t = \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \end{cases} \quad (۶)$$

یا به طور معادل:

$$f(x_{t+1,j} | \mathbf{x}_t, \Lambda_t = i) = n(x_{t+1,j}; \mathbf{T}_{i,j} \mathbf{x}_t, \phi_{i,j}^\dagger \sigma_i^\dagger), \quad j = 1, \dots, p,$$

$$f(y_t | \mathbf{x}_t, \Lambda_t = i) = n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mathbf{x}_t, \sigma_i^\dagger),$$

$$P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}_{t-1}) = \pi_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (۷)$$

که در آن $\mathbf{h}_i = (\phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p})'$ ، $\mathbf{F}' = (1, \circ, \dots, \circ)_{1 \times p}$ ، $\varepsilon_t | \Lambda_t = i \sim N(\circ, \sigma_i^\dagger)$ ، $\mathbf{T}_{i,j}$ سطر j ام ماتریس \mathbf{T}_i هستند و ماتریس \mathbf{T}_i به صورت

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \phi_{i,2} & \circ & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \circ \\ \phi_{i,p-1} & \circ & \dots & \circ & 1 \\ \phi_{i,p} & \circ & \dots & \circ & \circ \end{pmatrix},$$

تعریف می‌شود. به شرط معلوم بودن متغیر اندیس Λ_t ، مدل (۶) یک مدل فضای حالت خطی است. از این رو، می‌توان مدل (۶) را یک مدل پویای خطی شرطی^۸ در نظر گرفت و از ویژگی‌های مربوط به این خانواده از مدل‌ها استفاده نمود. همچنین با حذف متغیر اندیس Λ_t می‌توان مدل (۶) را به صورت یک

^۸Conditional Dynamic Linear Model (CDLM)

مدل فضای حالت کلی^۹ به صورت

$$f(x_{t+1,j}|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^m \pi_i n(x_{t+1,j}; \mathbf{T}_{i,j}\mathbf{x}_t, \phi_{i,j}^\top \sigma_i^\top), \quad j = 1, \dots, p,$$

$$f(y_t|\mathbf{x}_t) = \sum_{i=1}^m \pi_i n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}'\mathbf{x}_t, \sigma_i^\top),$$

بازنویسی کرد. همچنان که پیشتر اشاره شد، نمایش فضای حالت مدل AR خطی یکتا نیست. بنابراین با استفاده از نمایش‌های مختلف مدل AR در فضای حالت، می‌توان مدل MAR را نیز به صورت‌های مختلفی در فضای حالت نمایش داد.

۱.۲ تعمیم به مدل $ARMA$ آمیخته

برای تعمیم (۶) به مدل آمیخته $ARMA$ ، که با نماد $MARMA$ نشان داده می‌شود، کافی است مولفه‌های مدل به صورت $ARMA(p, q)$ تعریف شوند. به این ترتیب، بازنویسی پارامترهای مدل (۶) به صورت

$$P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}_{t-1}) = \pi_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\text{Given } \Lambda_t = i : \begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{T}_i \mathbf{x}_t + \mathbf{h}_i \varepsilon_t, \\ y_t = \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mathbf{x}_t + \varepsilon_t, \end{cases} \quad (۸)$$

نمایش فضای حالت یک مدل $MARMA(m; p, q)$ را ارائه می‌نماید که در آن $\varepsilon_t | \Lambda_t = i \sim N(\phi_{i,\circ} + \mathbf{F}'\mathbf{x}_t, \sigma_i^\top)$ ، $\mathbf{h}_i = (\phi_{i,1} + \theta_{i,1}, \dots, \phi_{i,l} + \theta_{i,l})'$ ، $\mathbf{F}' = (1, \circ, \dots, \circ)_{1 \times l}$

^۹General State Space

q مرتبه میانگین متحرک، m تعداد مولفه‌ها و $l = \max(p, q)$ است. ماتریس T_i نیز عبارت است از

$$T_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_{i,2} & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \phi_{i,l-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \phi_{i,l} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

۳ پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی

با فرض $\mathbf{x}_1 \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ ، برای استفاده از نمایش فضای حالت مدل MAR توابع چگالی پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی بردار حالت مورد نیاز هستند. برای یافتن این توابع چگالی، ابتدا پیش‌بینی و پالایش مورد بررسی قرار می‌گیرند. تابع چگالی هموارساز را می‌توان از روی تابع چگالی پالایش بدست آورد.

۱.۳ توابع چگالی دقیق پیش‌بینی و پالایش

فرض کنید Ω_t سیگما میدان متشکل از تمام اطلاعات موجود تا لحظه t باشد. همچنین فرض کنید تابع چگالی پیش‌بینی بردار حالات، تابع چگالی پیش‌بینی مشاهدات و تابع چگالی پالایش بردار حالات در لحظه t به ترتیب با $f(\mathbf{x}_t | \Omega_{t-1})$ ، $f(y_t | \Omega_{t-1})$ و $f(\mathbf{x}_t | \Omega_t)$ نشان داده شوند. قضیه زیر شکل دقیق این توابع را ارائه می‌نماید.

قضیه ۱: فرض کنید تابع چگالی پیش‌بینی بردار حالت \mathbf{x}_t به صورت

$$f(\mathbf{x}_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{i=1}^{m_t^{t-1}} \pi_{i,t}^{t-1} n_p(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_{i,t}^{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{i,t}^{t-1}),$$

باشد، که در آن $n_p(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ تابع چگالی نرمال p متغیره با بردار میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$

است. توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش مدل (۸) عبارتند از:

$$f(\mathbf{x}_{t+1}|\Omega_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_{ij,t} n_p(\mathbf{x}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{ij,t+1}^t, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t+1}^t), \quad (9)$$

$$f(y_t|\Omega_{t-1}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}), \quad (10)$$

$$f(\mathbf{x}_t|\Omega_t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_{ij,t} n_p(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_{ij,t}^t, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t), \quad (11)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{ij,t+1}^t &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1} + \frac{y_t - \phi_{i,\circ} - \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}}{\sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}} (\sigma_i^\gamma \mathbf{h}_i + \mathbf{T}_i \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}), \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t+1}^t &= \mathbf{T}_i \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{T}_i' - \frac{(\sigma_i^\gamma \mathbf{h}_i + \mathbf{T}_i \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F})(\sigma_i^\gamma \mathbf{h}_i + \mathbf{T}_i \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F})'}{\sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}}, \\ \boldsymbol{\mu}_{ij,t}^t &= \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1} + \frac{y_t - \phi_{i,\circ} - \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}}{\sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}} \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t &= \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} - \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F} \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1}}{\sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}}, \\ \pi_{ij,t} &= \frac{\pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F})}{\sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^{m_t^{t-1}} \pi_l \pi_{k,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{l,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{k,t}^{t-1}, \sigma_l^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{k,t}^{t-1} \mathbf{F})}. \end{aligned}$$

برهان: با توجه به مدل (۸) و مفروضات قضیه می‌توان نشان داد که روابط

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{t+1}, y_t|\Omega_{t-1}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} \\ &\times n_{p+1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t+1} \\ y_t - \phi_{i,\circ} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t \right), \\ f(\mathbf{x}_t, y_t|\Omega_{t-1}) &= f(y_t|\mathbf{x}_t) f(\mathbf{x}_t|\Omega_{t-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mathbf{x}_t, \sigma_i^\gamma) n_p(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_{i,t}^{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{i,t}^{t-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} \\
 &\times n_{p+1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t - \phi_{i,\circ} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t \right),
 \end{aligned}$$

برقرار است، که در آن ماتریس همبندی $p \times p$ است و

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t} &= \sigma_i^\gamma \begin{pmatrix} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i' & \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_i' & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix}', \\
 \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} & \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}' \\ \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} & \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}' \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توان توابع چگالی پیش‌بینی را به صورت

$$\begin{aligned}
 f(y_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}') \\
 f(\mathbf{x}_{t+1} | \boldsymbol{\Omega}_t) &= \frac{f(\mathbf{x}_{t+1}, y_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1})}{f(y_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1})} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \frac{\pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}')}{f(y_t | \boldsymbol{\Omega}_{t-1})} \\
 &\times \frac{n_{p+1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t+1} \\ y_t - \phi_{i,\circ} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t}^t \right)}{n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^\gamma + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}')} \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_{ij,t} n_p(\mathbf{x}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{ij,t+1}^t, \boldsymbol{\Sigma}_{ij,t+1}^t),
 \end{aligned}$$

به دست آورد که $\pi_{ij,t}$ ، $\mu_{ij,t+1}^t$ و $\Sigma_{ij,t+1}^t$ در رابطه (۹) تعریف شده‌اند.

با استفاده از رابطه (۱۲) تابع چگالی پالایش به صورت

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_t | \Omega_t) &= \frac{f(y_t, \mathbf{x}_t | \Omega_{t-1})}{f(y_t | \Omega_{t-1})} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \frac{\pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mu_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^2 + \mathbf{F}' \Sigma_{j,t}^{t-1} \mathbf{F})}{f(y_t | \Omega_{t-1})} \\ &\quad \times \frac{n_{p+1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t - \phi_{i,\circ} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{F}' \end{pmatrix} \mu_{j,t}^{t-1}, \Sigma_{ij,t}^t \right)}{n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \mu_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^2 + \mathbf{F}' \Sigma_{j,t}^{t-1} \mathbf{F})}, \end{aligned}$$

بدست می‌آید. با توجه به اینکه آخرین جمله در رابطه فوق، تابع چگالی نرمال شرطی \mathbf{x}_t به شرط y_t ، Ω_{t-1} و $i = \Lambda_t$ است، رابطه (۱۱) به دست می‌آید.

به سادگی با استفاده از قضیه ۱ می‌توان نتیجه گرفت که اگر مقدار اولیه بردار حالت دارای توزیع نرمال باشد، چگالی‌های پیش‌بینی و پالایش، توابع چگالی نرمال آمیخته هستند با تعداد مولفه‌هایی که به صورت نمایی زیاد می‌شوند. بنابراین استفاده از توابع چگالی دقیق برای پیش‌بینی و پالایش در عمل ممکن نیست. برای رفع این مشکل می‌توان به دو روش عمل نمود. لمکه (۲۰۰۶) در مدل‌های فضای حالت آمیخته با خطاهای مستقل، پس از چند گام پیش‌بینی و پالایش، توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش را با تابع چگالی نرمال تقریب می‌زند و چگالی نرمال را به جای چگالی نرمال آمیخته مورد استفاده قرار می‌دهد. اگر این تقریب زدن در زمان‌های $t = \tau$ ، $t = 2\tau$ و ... انجام شود، توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش حداکثر دارای m^τ مولفه خواهند بود. این روش با وجود سادگی از دقت پایینی برخوردار است. چن و لیو (۲۰۰۰) برای تقریب زدن توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش در خانواده مدل‌های *CDLM* با خطاهای مستقل، روش پالایه کاملن آمیخته^{۱۰}، *MKF*، را معرفی کردند که یک روش مونت کارلوی دنباله‌ای^{۱۱} است. از آنجایی که مدل (۷) را می‌توان به صورت *CDLM* نمایش داد، برای تقریب زدن توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش می‌توان از نسخه‌ای از *MKF* استفاده نمود.

¹⁰Mixture Kalman Filter

¹¹Sequential Monte Carlo

۲.۳ پالایه کالمن آمیخته برای مدل‌هایی با خطای مشترک

ایده اولیه در MKF استفاده از نمونه وزنی $\{(\lambda_t^{(1)}, w_t^{(1)}), \dots, (\lambda_t^{(k)}, w_t^{(k)})\}$ برای برآورد توزیع $P(\Lambda_t | \Omega_t)$ است. به این ترتیب توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش را می‌توان به صورت

$$f(y_t | \Omega_{t-1}) = \sum_{j=1}^k \frac{w_t^{(j)}}{W_t} n(y_t; \xi_t(\lambda_t^{(j)}), \eta_t(\lambda_t^{(j)})), \quad (12)$$

$$f(\mathbf{x}_t | \Omega_t) = \sum_{j=1}^k \frac{\gamma_t^{(j)}}{\gamma_t} n_p(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_t^t(\lambda_t^{(j)}), \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)})), \quad (13)$$

$$f(\mathbf{x}_{t+1} | \Omega_t) = \sum_{j=1}^k \frac{\gamma_t^{(j)}}{\gamma_t} n_p(\mathbf{x}_{t+1}; \boldsymbol{\mu}_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)}), \boldsymbol{\Sigma}_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)})), \quad (14)$$

تقریب زد، که $\xi_t(\cdot)$ ، $\eta_t(\cdot)$ ، W_t ، $\eta_t^{(j)}$ و γ_t به صورت

$$\begin{aligned} \xi_t(\lambda_t^{(j)}) &= \phi_{\lambda_t^{(j)}} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}), \quad \eta_t(\lambda_t^{(j)}) = \sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F} \\ W_t &= \sum_{j=1}^k w_t^{(j)}, \quad \gamma_t^{(j)} = w_t^{(j)} n(y_t; \xi_t(\lambda_t^{(j)}), \eta_t(\lambda_t^{(j)})), \quad \gamma_t = \sum_{j=1}^k \gamma_t^{(j)}, \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. از آنجا که به شرط $\Lambda_t = \lambda_t^{(j)}$ مدل (۷) یک سیستم خطی گوسی است، می‌توان از پالایه کالمن برای محاسبه $\boldsymbol{\mu}_t^t(\lambda_t^{(j)})$ ، $\boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)})$ ، $\boldsymbol{\mu}_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)})$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)})$ استفاده نمود. به این ترتیب، MKF برای بدست آوردن چگالی‌های پیش‌بینی و پالایش مدل (۷) به صورت زیر است:
فرض کنید $\boldsymbol{\mu}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)})$ و $\boldsymbol{\Sigma}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)})$ میانگین و واریانس توابع چگالی پیش‌بینی در لحظه $t-1$ به ازای $\Lambda_{t-1} = \lambda_{t-1}^{(j)}$ و $j = 1, 2, \dots, k$ باشند. با استفاده از مشاهده جدید y_t مراحل زیر را دنبال کنید:

۱. به ازای i و $\Lambda_t = i$ ، $i = 1, \dots, m$ ، $u_i^{(j)}$ به صورت

$$\begin{aligned} u_i^{(j)} &= f(y_t, \Lambda_t = i | \boldsymbol{\mu}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}), \boldsymbol{\Sigma}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)})) \\ &= f(y_t | \boldsymbol{\mu}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}), \boldsymbol{\Sigma}_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}), \Lambda_t = i) P(\Lambda_t = i) \end{aligned}$$

$$= \pi_i n(y_t; \xi_t(i), \eta_t(i)),$$

محاسبه نمایید، که $\xi_t(i)$ و $\eta_t(i)$ در رابطه (۱۲) تعریف شده‌اند.

۲. نمونه $\lambda_t^{(j)}$ را از $\{1, \dots, m\}$ با احتمال متناسب با $u_i^{(j)}$ تولید نمایید.

۳. یک گام از پالایه کالمن را برای محاسبه $\mu_t^t(\lambda_t^{(j)})$ ، $\Sigma_t^t(\lambda_t^{(j)})$ و $\mu_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)})$ و $\Sigma_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)})$ به صورت

$$\begin{aligned} \mu_t^t(\lambda_t^{(j)}) &= \mu_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) + \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}' \frac{y_t - \phi_{\lambda_t^{(j)}}, - \mathbf{F}' \mu_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)})}{\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 + \mathbf{F}' \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}}, \\ \Sigma_t^t(\lambda_t^{(j)}) &= \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) - \frac{\Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}' \mathbf{F}' \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)})}{\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 + \mathbf{F}' \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}}, \\ \mu_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)}) &= \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \mu_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) + \frac{\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}} + \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \Sigma_{t-1}^t(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}}{\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 + \mathbf{F}' \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}} \\ &\quad \times \left(y_t - \phi_{\lambda_t^{(j)}}, - \mathbf{F}' \mu_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \right), \\ \Sigma_{t+1}^t(\lambda_t^{(j)}) &= \sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}} \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}}' + \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \Sigma_{t-1}^t(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}}' \\ &\quad - \frac{\left(\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}} + \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \Sigma_{t-1}^t(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F} \right)}{\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 + \mathbf{F}' \Sigma_t^{t-1}(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F}} \\ &\quad \times \left(\sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}} + \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \Sigma_{t-1}^t(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F} \right)', \end{aligned}$$

اجرا کنید.

۴. وزن‌ها را به صورت $w_t^{(j)} = w_{t-1}^{(j)} \sum_{i=1}^m u_i^{(j)}$ به‌روزرسانی کنید.

۵. با استفاده از روابط (۱۲-۱۴) توابع چگالی پیش‌بینی و پالایش را در لحظه t بدست آورید.

۳.۳ هموارساز کالمن آمیخته

فرض کنید بردار $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ مشاهده شده باشد. با استفاده از ایده‌ای مشابه MKF ، تابع چگالی هموارسازی، $f(\mathbf{x}_t | \Omega_n)$ ، را می‌توان به صورت

$$f(\mathbf{x}_t | \Omega_n) = \sum_{j=1}^k \frac{w_{t|n}^{(j)}}{W_{t|n}} n_p(\mathbf{x}_t; \boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}), \boldsymbol{\Sigma}_t^n(\lambda_t^{(j)})), \quad (15)$$

تقریب زد، که در آن $W_{t|n} = \sum_{j=1}^k w_{t|n}^{(j)}$ و $w_{t|n}^{(j)}$ هستند و $\boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)})$ و $\boldsymbol{\Sigma}_t^n(\lambda_t^{(j)})$ با استفاده از الگوریتم زیر محاسبه می‌شوند. فرض کنید MKF تا زمان n اجرا شده است و $\boldsymbol{\mu}_t(\lambda_t^{(j)})$ ، $\lambda_t^{(j)}$ ، $w_{t|n}^{(j)}$ و $\boldsymbol{\Sigma}_t(\lambda_t^{(j)})$ برای $t = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, k$ بدست آمده‌اند. الگوریتم هموارساز کالمن آمیخته^{۱۲}، MKS ، برای محاسبه چگالی هموارسازی مدل (۷) به صورت زیر عمل می‌کند:

۱. در زمان $t = n$ برای $j = 1, \dots, k$ میانگین و واریانس هموارسازی را به صورت

$$\boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}) = \boldsymbol{\mu}_t^t(\lambda_t^{(j)}), \quad \boldsymbol{\Sigma}_t^n(\lambda_t^{(j)}) = \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}), \quad w_{t|n}^{(j)} = w_t^{(j)},$$

۲. در زمان $t < n$ برای $j = 1, \dots, k$ میانگین و واریانس هموارسازی را به صورت زیر محاسبه نمایید:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}) &= \boldsymbol{\mu}_t^t(\lambda_t^{(j)}) + \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Gamma}_{\lambda_t^{(j)}}^{-1} \times [\boldsymbol{\mu}_{t+1}^n - \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\mu}_t^t(\lambda_t^{(j)})] \\ \boldsymbol{\Sigma}_t^n(\lambda_t^{(j)}) &= \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) - \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \mathbf{T}'_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Gamma}_{\lambda_t^{(j)}}^{-1} \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \\ &\quad + \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \mathbf{T}'_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Gamma}_{\lambda_t^{(j)}}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_t^n(\lambda_t^{(j)}) \boldsymbol{\Gamma}_{\lambda_t^{(j)}}^{-1} \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \\ w_{t|n}^{(j)} &= w_t^{(j)} \pi_{\lambda_{t+1}^{(j)}}, \end{aligned}$$

محاسبه نمایید، که در آن $\boldsymbol{\Gamma}_{\lambda_t^{(j)}} = \sigma_{\lambda_t^{(j)}}^2 \mathbf{h}_{\lambda_t^{(j)}} \mathbf{h}'_{\lambda_t^{(j)}} + \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}} \boldsymbol{\Sigma}_t^t(\lambda_t^{(j)}) \mathbf{T}_{\lambda_t^{(j)}}$

۳. با استفاده از رابطه (۱۵) تابع چگالی هموارسازی را در لحظه t بدست آورید.

¹²Mixture Kalman smoother

۴ برآورد پارامترها

فرض کنید $\theta = (\phi'_1, \dots, \phi'_m, \sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)'$ بردار پارامترهای مدل (۷) باشد. همچنین اگر بردار مشاهدات تا لحظه n با $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ نشان داده شود، بردار مشاهدات تا لحظه n باشد، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ell(\mathbf{y}, \theta) = \sum_{t=1}^n \log f(y_t | \Omega_{t-1}; \theta).$$

با استفاده از رابطه (۱۰) لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\ell(\mathbf{y}, \theta) = \sum_{t=1}^n \log \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m_t^{t-1}} \pi_i \pi_{j,t}^{t-1} n(y_t; \phi_{i,\circ} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{j,t}^{t-1}, \sigma_i^2 + \mathbf{F}' \boldsymbol{\Sigma}_{j,t}^{t-1} \mathbf{F}) \right), \quad (۱۶)$$

است، که در آن m_t^{t-1} و $\pi_{j,t}^{t-1}$ از قضیه ۱ بدست می‌آیند. همچنین $m_1^0 = 1$ ، $\pi_{j,1}^0 = 1$ ، $\boldsymbol{\mu}_{j,1}^0 = \boldsymbol{\mu}_1$ و $\boldsymbol{\Sigma}_{j,1}^0 = \boldsymbol{\Sigma}_1$ تعریف می‌شوند. به این ترتیب، برآورد ماکسیمم درستنمایی بردار θ را می‌توان از روی رابطه (۱۶) بدست آورد.

همچنان که در بخش ۱.۳ اشاره شد استفاده از چگالی دقیق پیش‌بینی و پالایش در عمل امکان‌پذیر نیست و بنابراین برای بدست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی در عمل نمی‌توان از رابطه (۱۶) استفاده نمود. برای حل مشکل مطرح شده، کافی است از رابطه (۱۲) برای تقریب‌زدن تابع چگالی استفاده شود. به این ترتیب برآورد ماکسیمم درستنمایی بردار θ از ماکسیمم کردن تابع

$$l(\mathbf{y}, \theta) = \sum_{t=1}^n \log \left(\sum_{j=1}^k \frac{w_t^{(j)}}{W_t} n(y_t; \xi_t(\lambda_t^{(j)}), \eta_t(\lambda_t^{(j)})) \right),$$

بدست خواهد آمد، که در آن $w_t^{(j)}$ ، $\xi_t(\lambda_t^{(j)})$ و $\eta_t(\lambda_t^{(j)})$ از اجرای MKF بدست می‌آیند. با توجه به اینکه مشتق‌های تابع فوق نسبت به پارامترهای مدل خطی نیستند برای یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی باید از روش‌های عددی مانند الگوریتم نیوتن-رافسون استفاده نمود.

۱.۴ الگوریتم EM

شاموی و استوفر (۱۹۸۲) نشان دادند که در مدل‌های فضای حالت خطی، استفاده از الگوریتم EM برای یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل نتایج بهتری ارائه می‌نماید. به علاوه استفاده از الگوریتم EM امکان یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع مقدار آغازین بردار حالت را نیز فراهم می‌آورد. برای برآورد پارامترهای مدل (۷) نیز می‌توان از الگوریتم EM استفاده نمود.

در مدل (۶) فرض کنید $\Lambda_t = i$. با توجه به رابطه (۶) پارامترهای مدل باید در دستگاه معادلات

$$\begin{pmatrix} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ \vdots \\ \phi_{i,p-1} \\ \phi_{i,p} \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t = \begin{pmatrix} x_{t+1,1} - \phi_{i,1}x_{t,1} - x_{t,2} \\ x_{t+1,2} - \phi_{i,2}x_{t,1} - x_{t,3} \\ \vdots \\ x_{t+1,p-1} - \phi_{i,p-1}x_{t,1} - x_{t,p} \\ x_{t+1,p} - \phi_{i,p}x_{t,1} \\ y_t - x_{t,1} - \phi_{i,0} \end{pmatrix}$$

صدق کنند. با حل این دستگاه معادلات روابط

$$\begin{aligned} \phi_{i,j} &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} z_{t,i}(x_{t+1,j} - x_{t,j+1})}{\sum_{t=1}^{n-1} z_{t,i}(y_t - \phi_{i,0})}, \quad j = 1, \dots, p-1, \\ \phi_{i,p} &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} z_{t,i}x_{t+1,p}}{\sum_{t=1}^{n-1} z_{t,i}(y_t - \phi_{i,0})}, \end{aligned} \quad (17)$$

به دست می‌آیند، که در آن $z_{t,i} = 1$ اگر $\lambda_t = i$ و در غیر این صورت $z_{t,i} = 0$. در مدل $MARMA(m; p, q)$ نیز می‌توان دستگاه معادلات را به صورت

$$\begin{pmatrix} \phi_{i,1} + \theta_{i,1} \\ \vdots \\ \phi_{i,l-1} + \theta_{i,l-1} \\ \phi_{i,l} + \theta_{i,l} \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t = \begin{pmatrix} x_{t+1,1} - \phi_{i,1}x_{t,1} - x_{t,2} \\ \vdots \\ x_{t+1,l-1} - \phi_{i,l-1}x_{t,1} - x_{t,l} \\ x_{t+1,l} - \phi_{i,l}x_{t,1} \\ y_t - x_{t,1} - \phi_{i,0} \end{pmatrix},$$

تشکیل داد. از حل این دستگاه معادلات نیز می‌توان مقادیر $(\phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p})$ و $(\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q})$ را برحسب دیگر پارامترهای مدل بدست آورد. به عنوان نمونه در مدل $MARMA(m; 1, 1)$ حل دستگاه معادلات فوق به روابط

$$\begin{aligned} \phi_{i,1} &= \frac{1}{B} \left(\sum_{t=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} x_{t+1} y_j - \sum_{t=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} x_{t+1} y_j - \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} x_{t+1} x_j + \sum_{t=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} x_{t+1} x_j \right) \\ \theta_i &= \frac{1}{B} \left(\sum_{t=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} x_{t+1} y_j - \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} x_{t+1} y_j \right), \end{aligned}$$

منجر می‌شود، که در آن $B = (\sum_{t=1}^{n-2} \sum_{j=2}^{n-1} y_t x_j - \sum_{t=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} y_t x_j)$ به این ترتیب، برای برآورد پارامترهای مدل کافی است $\mu_1, \sigma_1^2, \phi_{i,\circ}, \pi_i$ به ازای $i = 1, \dots, m$ برآورد شوند.

به شرط مشاهدات $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)'$ بردارهای حالت $\mathbf{x} = (x_{1,1}, \dots, x_{n,1})'$ و ماتریس نشانگرهای $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)'$ تابع درستنمایی داده‌های کامل به صورت

$$\begin{aligned} L_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}) &= |\boldsymbol{\Sigma}_1|^{-\frac{p}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) \right\} \\ &\times \prod_{i=1}^m \prod_{t=1}^n \left(\pi_i \frac{1}{\sigma_i^2} \exp \left\{ -\frac{(y_t - x_{t,1} - \phi_{i,\circ})^2}{2\sigma_i^2} \right\} \right)^{z_{t,i}}, \end{aligned}$$

خواهد بود، که در آن $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترهای مدل است. همچنین امید ریاضی شرطی تابع لگاریتم درستنمایی داده‌ای کامل عبارت است از:

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}^{(q)}) &= E_{\boldsymbol{\theta}^{(q)}}(l_c(\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta}) | \mathbf{y}) \\ &= -\frac{p}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}_1| - \frac{1}{2} E_{\boldsymbol{\theta}^{(q)}} \left((\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1)' \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} (\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_1) | \mathbf{y} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^n P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}) \left(\log \pi_i - \log \sigma_i^2 \right) \\ &- \sum_{i=1}^m \sum_{t=1}^n P(\Lambda_t = i | \mathbf{y}) \left(\frac{E_{\boldsymbol{\theta}^{(q)}} \left((y_t - x_{t,1} - \phi_{i,\circ})^2 | \mathbf{y} \right)}{2\sigma_i^2} \right). \end{aligned}$$

با استفاده از روابط فوق، الگوریتم EM برای برآورد پارامترهای مدل (۷) دارای گام‌های زیر است:
 گام E : فرض کنید $\theta^{(q)}$ برآورد بردار θ در تکرار q ام الگوریتم EM است. در تکرار $(q+1)$ ام امید ریاضی شرطی لگاریتم تابع درستنمایی داده‌های کامل، با استفاده از MKS ، به صورت

$$Q(\theta, \theta^{(q)}) = E(\log L_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{Z}, \theta) | \mathbf{y}) = -\frac{p}{\nu} \log |\Sigma_{\nu}| \quad (18)$$

$$- \frac{1}{\nu} \text{tr} \left\{ \Sigma_{\nu}^{-1} \left(\Sigma_{\nu}^n + (\mathbf{x}_{\nu}^n - \boldsymbol{\mu}_{\nu})(\mathbf{x}_{\nu}^n - \boldsymbol{\mu}_{\nu})' \right) \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \left(\tau_i \log \pi_i - \frac{\tau_i}{\nu} \log \sigma_i^{\nu} + \frac{(S_{\nu,i} + \nu(S_{\nu,i} - S_{\circ,i})\phi_{i,\circ} + n\phi_{i,\circ}^{\nu})}{\sigma_i^{\nu}} \right),$$

محاسبه کنید، که در آن:

$$\tau_i = \sum_{t=1}^n \tau_{t,i}, \quad \tau_{t,i} = \sum_{j=1}^k \frac{w_{t|n}^{(j)} \pi_i^{(q)} n(y_t; \mu_{t|n}^{(i,j)}, \sigma_{t|n}^{(i,j)})}{W_{t|n} \sum_{i=1}^m \pi_i^{(q)} n(y_t; \mu_{t|n}^{(i,j)}, \sigma_{t|n}^{(i,j)})},$$

$$\mu_{t|n}^{(i,j)} = \phi_{i,\circ}^{(q)} + \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{t-1}^n(\lambda_{t-1}^{(j)}), \quad \sigma_{t|n}^{(i,j)} = \sigma_i^{\nu(q)} + \mathbf{F}' \Sigma_{t-1}^n(\lambda_{t-1}^{(j)}) \mathbf{F},$$

$$S_{\circ,i} = \sum_{t=1}^n \tau_{t,i} y_t, \quad S_{\nu,i} = \sum_{t=1}^n \tau_{t,i} \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{t,i}^n, \quad S_{\nu,i} = \sum_{t=1}^n \tau_{t,i} (\mathbf{F}' \Sigma_{t,i}^n \mathbf{F} - \nu \mathbf{F}' \boldsymbol{\mu}_{t,i}^n y_t + y_t^{\nu}),$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t,i}^n = \sum_{j=1}^k \frac{w_{t|n}^{(j)} z_{t,i}^{(j)}}{\sum_{l=1}^k w_{t|n}^{(l)} z_{t,i}^{(l)}} \boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}),$$

$$\Sigma_{t,i}^n = \sum_{j=1}^k \frac{w_{t|n}^{(j)} z_{t,i}^{(j)}}{\sum_{l=1}^k w_{t|n}^{(l)} z_{t,i}^{(l)}} \left(\Sigma_t^n(\lambda_t^{(j)}) + \boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}) \left(\boldsymbol{\mu}_t^n(\lambda_t^{(j)}) \right)' \right),$$

و $z_{t,i} = 1$ اگر $\lambda_t = i$ و در غیر این صورت $z_{t,i} = 0$ تعریف می‌شوند.

گام M : در تکرار $(q+1)$ ام، با حداکثر کردن (۱۸) برآورد پارامتر θ را به صورت

$$\pi_i^{(q+1)} = \frac{\tau_i}{\sum_{i=1}^m \tau_i}, \quad \phi_{i,\circ}^{(q+1)} = \frac{S_{\circ,i} - S_{\nu,i}}{n}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\nu}^{(q+1)} = \mathbf{x}_{\nu}^n, \quad \Sigma_{\nu}^{(q+1)} = \Sigma_{\nu}^n$$

$$\sigma_i^{\nu(q+1)} = \frac{S_{\nu,i} + \nu(S_{\nu,i} - S_{\circ,i})\phi_{i,\circ} + n\phi_{i,\circ}^{\nu}}{\tau_i},$$

به‌هنگام کنید، که در آن x^n و Σ^n به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس تابع چگالی هموارسازی در لحظه $t = 1$ هستند. سایر پارامترهای مدل را با استفاده از دستگاه معادلات (۱۷) بصورت زیر

$$\phi_{i,j}^{(q+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \tau_{t,i} (x_{t+1,j}^n - x_{t,j+1}^n)}{\sum_{t=1}^{n-1} \tau_{t,i} (y_t - \phi_{i,\circ}^{(q+1)})}, \quad j = 1, \dots, p-1,$$

$$\phi_{i,p}^{(q+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \tau_{t,i} x_{t+1,p}^n}{\sum_{t=1}^{n-1} \tau_{t,i} (y_t - \phi_{i,\circ}^{(q+1)})},$$

به دست آورید، که در آن $x_{t,j}^n$ ، j زمین مولفه بردار میانگین توزیع هموارسازی در لحظه t است.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در استفاده از مدل‌های فضای حالت باید به چند ویژگی مهم توجه کرد. اولین ویژگی مهم در مدل‌های فضای حالت، پایداری مدل است. با استفاده از رابطه (۸) می‌توان مشاهده کرد که تحت شرایطی که مدل *MAR* ایستای ضعیف باشد، نمایش فضای حالت آن یک مدل پایدار خواهد بود. شرایط ایستایی ضعیف مدل *MAR* توسط وونگ و لی (۲۰۰۰) ارائه شده است. ویژگی دیگری که در مدل‌های فضای حالت پایدار مورد توجه قرار می‌گیرد، همگرایی پالایه مورد استفاده در مدل فضای حالات به یک وضعیت پایا است. اگر پالایه مورد استفاده با گذشت زمان و افزایش مشاهدات به یک وضعیت پایا نزدیک شود، خطای برآورد بردار حالت به مقادیر آغازین وابسته نخواهد بود. این مسئله وقتی اهمیت بیشتری می‌یابد که پارامترهای توزیع مقدار آغازین بردار حالت، x_1 ، معلوم نباشند. علاوه بر این دو ویژگی، تفاوت بین مقادیر حاصل از پالایش و هموارسازی بردار حالت نیز می‌تواند مورد توجه باشد. اگر در مدت زمان کوتاهی این تفاوت به مقدار ناچیزی برسد می‌توان به جای مقادیر حاصل از هموارسازی، از مقادیر حاصل از پالایش استفاده نمود و از حجم محاسبات مربوط به برآورد پارامترها کاست.

در این بخش ویژگی‌های فوق در مدل (۷) با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هر مطالعه شبیه‌سازی به صورت زیر انجام شده است:

۱. براساس مدل مورد نظر، یک دنباله ۱۰۰ تایی از مشاهدات y_t و بردارهای حالت x_t تولید می‌شود،
۲. با فرض اینکه پارامترهای توزیع مقدار آغازین بردار حالت، x_1 ، نامعلومند، یک بردار تصادفی از توزیع نرمال با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس I^{10^4} به عنوان مقدار آغازین بردار حالت

تولید می‌شود (I ماتریس همانی است)،

۳. الگوریتم‌های MKS و MKF برای محاسبه بردار میانگین و ماتریس کوواریانس توزیع‌های پالایش و هموارسازی اجرا می‌شوند. تعداد نمونه‌های تولید شده در هر بار اجرای MKF برابر ۱۰۰ است ($k = 100$)

۴. مراحل دوم و سوم ۵۰۰ بار تکرار می‌شوند.

اولین مدل در مطالعه شبیه‌سازی، مدل (۶) با پارامترهای ارائه شده در جدول ۱ است.

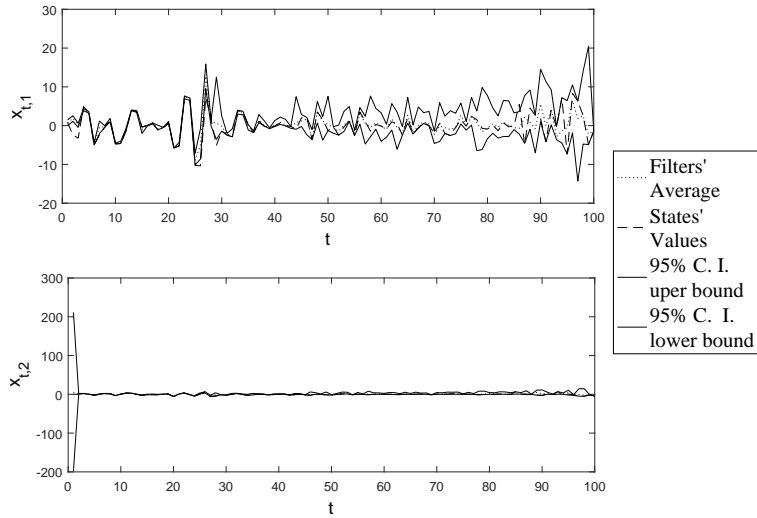
جدول ۱: پارامترهای مدل اول در مطالعه شبیه‌سازی

شماره مولفه	π	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	σ^2
۱	۰/۴	۵	۰/۹	- ۰/۶	۱
۲	۰/۴	۰	- ۰/۹	۱/۰	۱
۳	۰/۲	- ۵	۰	۰/۸	۵

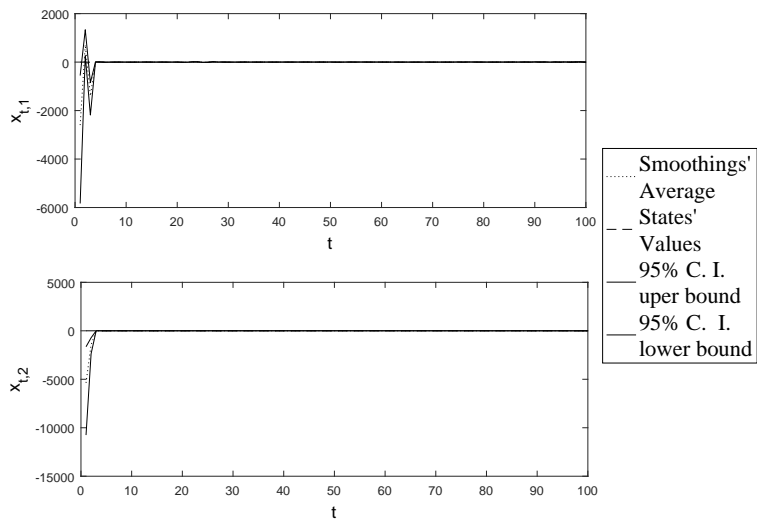
همچنین فرض کنید مقدار آغازین بردار حالت دارای بردار میانگین $(0, 0)'$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma_1 = 3I$ باشد که در آن I ماتریس همانی 2×2 است.

شکل ۱ و ۲ میانگین و فاصله اطمینان ۹۵٪ بردار پالایش و هموارسازی حاصل از الگوریتم‌های MKS و MKF را نشان می‌دهند (بردار پالایش و هموارسازی بردار میانگی توزیع‌های پالایش و هموارسازی هستند). شکل ۱ نشان می‌دهد از لحظه $t = 5$ به بعد فاصله اطمینان ۹۵٪ بردار در بیشتر زمان‌ها مقدار واقعی بردار حالت را در بر می‌گیرد. همچنین از لحظه $t = 5$ به بعد میانگین بردار پالایش تا حد زیادی به مقادیر واقعی بردار حالت نزدیک می‌شود و حول این مقادیر نوسان می‌نماید. بر اساس شکل ۲، بردار هموارسازی نیز از لحظه $t = 5$ به بعد رفتاری شبیه به رفتار بردار پالایش از خود نشان می‌دهد. به این ترتیب، از لحظه $t = 5$ بردار پالایش و بردار هموارسازی تفاوت ناچیزی دارند و می‌توان از بردار پالایش به جای بردار هموارسازی نیز استفاده نمود.

ویژگی دیگری که نشان می‌دهد پالایه مورد استفاده در این تحقیق دارای یک حالات پایا است، همگرایی عناصر ماتریس کوواریانس توزیع پالایش به یک مقدار ثابت است (دجانگ و پنزر، ۲۰۰۴). مقادیر زیر



شکل ۱: میانگین عناصر بردار پالایش و فاصله اطمینان ۹۵٪، در 50° بار شبیه‌سازی با مقادیر آغازین تصادفی در مدل (۶) با پارامترهای جدول ۱.



شکل ۲: میانگین عناصر بردار هموارسازی و فاصله اطمینان ۹۵٪، در 50° بار شبیه‌سازی با مقادیر آغازین تصادفی در مدل (۶) با پارامترهای جدول ۱.

میانگین ماتریس کواریانس توزیع پالایش را در شبیه‌سازی انجام شده نشان می‌دهند:

$$\bar{p}_1^1 = \begin{pmatrix} 0/0649 & 0/0175 \\ 0/0175 & 41/4561 \end{pmatrix}, \quad \bar{p}_1^0 = 10^{-18} \times \begin{pmatrix} 0/7504 & -0/0605 \\ -0/0605 & 0/0583 \end{pmatrix},$$

$$\bar{p}_{\delta^0}^{\delta^0} = 10^{-67} \times \begin{pmatrix} 0/1242 & -0/0044 \\ -0/0044 & 0/0230 \end{pmatrix},$$

که در آن \bar{p}_t^t میانگین ماتریس کواریانس توزیع پالایش حاصل از شبیه‌سازی، در لحظه t است. برای مطالعه شبیه‌سازی دوم، یک مدل $MARMA(2; 1, 1)$ ، را با پارامترهای جدول ۲ در نظر بگیرید.

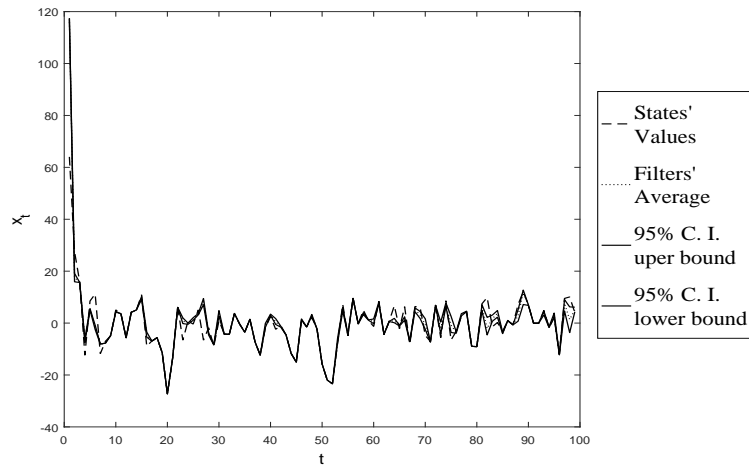
جدول ۲: پارامترهای مدل دوم در مطالعه شبیه‌سازی

شماره مولفه	π	ϕ_0	ϕ_1	θ	σ^2
۱	۰/۸	۱	۰/۱	۰/۲	۱۰
۲	۰/۲	۱۰	-۰/۸	-۰/۳	۱

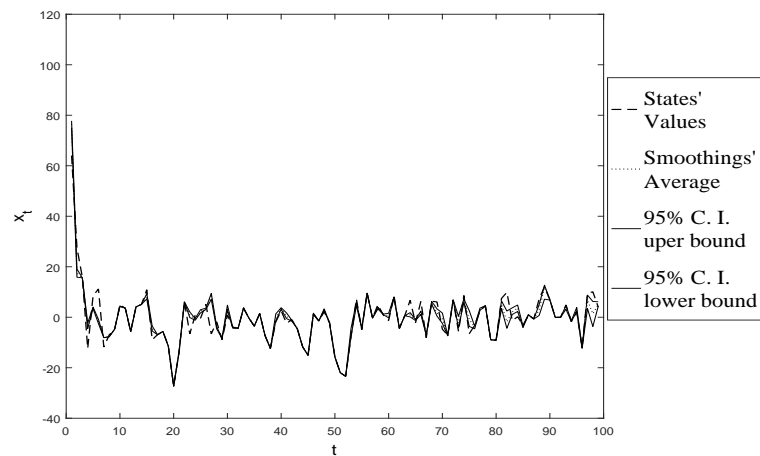
همچنین x_1 دارای میانگین $\mu_1 = 0$ و واریانس $\sigma_1^2 = 3$ است.

شکل ۳ و ۴ میانگین و فاصله اطمینان ۹۵٪ بردار پالایش و هموارسازی حاصل از الگوریتم‌های MKS و MKF را نشان می‌دهند. شکل ۳ نشان می‌دهد میانگین بردار پالایش تا حد زیادی به مقادیر واقعی بردار حالت نزدیک می‌شود و حول این مقادیر نوسان می‌نماید. بر اساس شکل ۴، بردار هموارسازی نیز رفتاری شبیه به رفتار بردار پالایش از خود نشان می‌دهد. به این ترتیب وقتی زمان به اندازه کافی گذشته باشد، بردار پالایش و بردار هموارسازی تفاوت ناچیزی دارند و می‌توان از بردار پالایش به جای بردار هموارسازی نیز استفاده نمود.

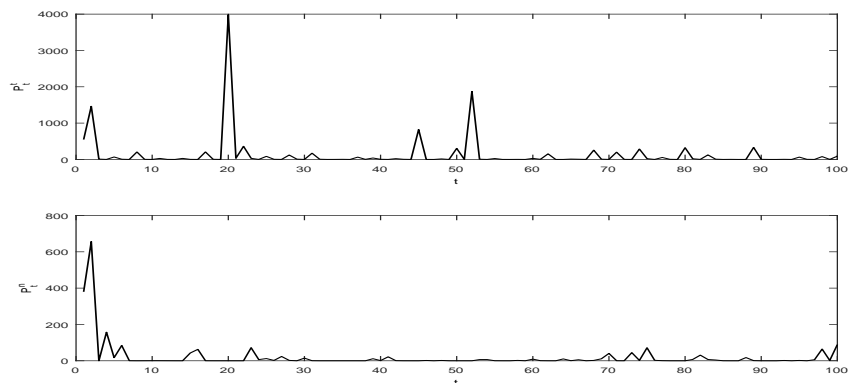
ویژگی دیگری که نشان می‌دهد پالایه مورد استفاده در این تحقیق دارای حالات پایا است، همگرایی واریانس توزیع پالایش به یک مقدار ثابت است. نمودار ۵ نشان می‌دهد واریانس‌های پالایش و هموارسازی متغیر حالت یک روند کلی نزولی دارند؛ اگرچه سرعت همگرایی واریانس متغیر حالت نسبت به مدل MAR کمتر است.



شکل ۳: میانگین عناصر بردار پالایش و فاصله اطمینان ۹۵٪، در ۵۰۰ بار شبیه‌سازی با مقادیر آغازین تصادفی در مدل (۶) با پارامترهای جدول ۲.



شکل ۴: میانگین عناصر بردار هموارسازی و فاصله اطمینان ۹۵٪، در ۵۰۰ بار شبیه‌سازی با مقادیر آغازین تصادفی در مدل (۶) با پارامترهای جدول ۲.



شکل ۵: میانگین واریانس پالایش و هموارسازی در 50° بار شبیه‌سازی با مقادیر آغازین تصادفی در مدل (۶) با پارامترهای جدول ۰۲.

بحث و نتیجه‌گیری

استفاده از نمایش فضای حالت علاوه بر اینکه به کاهش پیچیدگی مدل‌های سری زمانی کمک می‌نماید، امکان توسعه مدل‌ها به حالت‌های کلی‌تر نیز فراهم می‌کند. در این مقاله یک نمایش فضای حالت برای مدل MAR ارائه شد و تقریبی برای توابع چگالی پیش‌بینی، پالایش و هموارسازی به دست آمد. همچنین الگوریتم EM برای برآورد پارامترهای مدل در فضای حالت ارائه و نشان داده شد که در فضای حالت بعد بردار پارامترهای مورد علاقه مدل کاهش می‌یابد. نتایج مطالعه شبیه‌سازی نشان می‌دهد که میانگین توزیع‌های پالایش و هموارسازی به سرعت به سمت مقادیر واقعی بردار حالت همگرا می‌شوند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و ویراستار محترم که با پیشنهادات اصلاحی خود باعث ارائه بهتر مقاله شدند، کمال تشکر را دارند.

مراجع

- Chen, R. and Liu, J. S. (2000), Mixture Kalman Filters, *Journal of the Royal Statistics, Series B*, **62**, 493-508.
- Commandeur, J. J. F. and Koopman, S. J. (2007), *An Introduction to State Space Time Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford.
- De Jong, P. and Penzer, J. (2004), The ARMA Model in State Space Form, *Statistics and Probability Letters*, **70**, 119-125.
- Godsill, S. J., Doucet, A. and West, M. (2004), Monte Carlo Smoothing for Nonlinear Time Series, *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 156-168.
- Grewal, M. S. and Andrews, A. P. (2008), *Kalman Filtering, Theory and Practice using MATLAB*, John Wiley, Hoboken.
- Harvey, A. C. (1991), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kalman, R. E. (1960), A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering*, **82**, 34-45.
- Kitagawa, G. and Gersch, W. (1996), *Smoothness Priors Analysis of Time Series*, Springer, New York.
- Lemke, W. (2006), *Term Structure Modeling and Estimation in a State Space Framework*, Springer, Berlin.
- Pearlman, J. G. (1980), An Algorithm for the Exact Likelihood of a High-Order Autoregressive-Moving Average Process, *Biometrika*, **67**, 232-233.
- Pham, D. T. (1985), Bilinear Markovian Representation and Bilinear Model, *Stochastic Processes and their Applications*, **20**, 295-306.
- Priestley, M. B. (1980), State Dependent Models: a General Approach to Nonlinear Time Series Analysis. *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 47-71.
- Shumway, R. H. and Stoffer, D. S. (1982), An Approach to Time Series Smoothing and Forecasting Using the EM Algorithm, *Journal of Time Series Analysis*, **3**, 253-264.
- Shumway, R. H. and Stoffer, D. S. (2011), *Time Series Analysis and its Applications*, Springer, New York.
- Wong, C. S. and Li, W. K. (2000), On a Mixture Autoregressive Model. *Journal of the Royal Statistics, Series B*, **62**, 95-115.