

برآورد دنباله‌ای پارامتر مقیاس توزیع نمایی با محدودیت کران‌داری تابع مخاطره

عیسی محمودی، ریحانه لاله زاری و قهرمان روغنی

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده: در این مقاله روش دنباله‌ای محض برای برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی وقتی که تابع ریسک توسط مقدار ثابت از پیش تعیین شده‌ای کران‌دار شده باشد مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله فرم‌های بسته‌ای برای امید ریاضی و ریسک متغیر توقف و همچنین برآوردگر مبتنی بر آن به دست می‌آید. همچنین برای بهبود عملکرد برآوردگر پارامتر مقیاس، قاعده توقف تعدیل یافته معرفی می‌شود به طوری که تابع ریسک تحت آن به طور یکنواخت توسط مقدار از پیش تعیین شده کران‌دار گردد. در نهایت برای نشان دادن درستی آنچه به صورت نظری ارائه شده شبیه سازی‌هایی انجام می‌شود.
واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی، پارامتر مقیاس، برآوردگر نقطه‌ای با مخاطره کران‌دار، فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای، فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای محض، متغیر توقف

۱ مقدمه

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نمایی با تابع چگالی احتمال

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I(x > 0),$$

۱۳۴ توزیع نمایی با محدودیت کران‌داری تابع مخاطره

باشند. اگر با برآورد پارامتر θ توسط $\hat{\theta}_n$ متحمل زیان $(\hat{\theta}_n - \theta)^2$ $L_n(\theta, \hat{\theta}_n)$ بشویم، مساله پیش روی ما این است که برآوردگر را چنان معرفی کنیم که مخاطره متناظر با آن، از مقدار از پیش تعیین شده‌ای مانند ω بیشتر نشود. به عبارت دیگر می‌خواهیم داشته باشیم:

$$R(\theta, \hat{\theta}_n) = E[L_n(\theta, \hat{\theta}_n)] \leq \omega.$$

تصور کنید برای برآورد θ از برآوردگر متعارف \bar{X}_n استفاده کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$R(\theta, \bar{X}_n) = E[L_n(\theta, \bar{X}_n)] = E(\bar{X}_n - \theta)^2 = \frac{\theta^2}{n}.$$

بنابراین برای برقراری رابطه $R(\theta, \bar{X}_n) \leq \omega$ باید همواره داشته باشیم $n \geq \frac{\theta^2}{\omega}$. در اینجا $\frac{\theta^2}{\omega}$ را حجم نمونه بهینه نامیده و آن را با n^* نشان می‌دهیم. اما نکته حائز اهمیت این است که با توجه به نامعلوم بودن θ ، مقدار n^* نیز مجهول باقی می‌ماند! لذا این راهبرد برای حل مساله در عمل قابل استفاده نخواهد بود. تاکادا (۱۹۸۶) ثابت کرد که برای حل این مساله هیچ راه حل مبتنی بر نمونه‌ای با حجم ثابت وجود ندارد و به ناچار باید از روش‌های دنباله‌ای، که در آن‌ها حجم نمونه خود یک متغیر تصادفی است، استفاده شود. بیرنهام و هلی (۱۹۶۰) روشی را برای حل این مساله ارائه کرده‌اند که مبتنی بر یک نمونه اولیه به حجم m و یک نمونه ثانویه با حجم تصادفی است. در روش مذکور ابتدا بر اساس یک نمونه اولیه \bar{X}_m محاسبه می‌شود و بر اساس آن، حجم نمونه بهینه یعنی n^* توسط

$$Q = Q(\omega) = \left\lfloor \frac{K \bar{X}_m^2}{\omega} \right\rfloor + 1$$

تخمین زده می‌شود، که در آن $K = K_m$ یک ضریب مثبت و تابعی از m و a بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از a است. در نهایت نمونه جدید X_{m+1}, \dots, X_{m+Q} با حجم Q از جامعه استخراج و آماره $\bar{X}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q X_{m+i}$ به عنوان برآوردگر پارامتر θ معرفی می‌گردد. بیرنهام و هلی (۱۹۶۰) نشان دادند که اگر $K = \frac{m^2}{(m-1)(m-2)}$ ، آنگاه مخاطره متناظر با برآوردگر معرفی شده همواره به ازای هر $\theta (> 0)$ کمتر یا مساوی ω خواهد بود.

این پیشنهاد در زمان خود پیشنهاد جالبی محسوب می‌شد، اما برای معرفی برآوردگر نهایی از داده‌های مرحله اول که با صرف هزینه گردآوری شده و حاوی اطلاع در خصوص پارامتر مجهول بوده صرف نظر

کرده و برآوردگری را معرفی می‌کند که تنها از اطلاعات نمونه مرحله دوم استفاده می‌کند. دومین انتقاد وارد شده بر این پیشنهاد نیز عدم پیروی از الگوی نمونه‌گیری مقبول و پرکاربرد اشتاین (۱۹۴۹ و ۱۹۴۵) بود. برای رفع مشکل، کوباکاو (۱۹۸۹) با ارائه یک ترکیب خطی از \bar{X}_m (میانگین مشاهدات گردآوری شده در نمونه‌گیری مرحله مقدماتی) و \bar{X}_Q (میانگین مشاهدات گردآوری شده در نمونه‌گیری مرحله دوم) کلاسی از برآوردگرها را برای پارامتر θ معرفی کرد که مخاطره متناظر با آنها همواره از مخاطره \bar{X}_Q کمتر بوده و لذا روش بیرنجام و هلی با پیشنهاد کوباکاو بهبود یافت. اما این واقعیت که الگوهای معرفی شده از الگوی دومرحله‌ای اشتاین (۱۹۴۹ و ۱۹۴۵) پیروی نمی‌کنند به قوت خود باقی ماند.

موخوپادهای و پیپه (۲۰۰۶)، مساله جستجوی برآوردگر پارامتر مقیاس توزیع نمایی را مورد توجه قرار داده و برای پاسخ به مساله یک روش نمونه‌گیری دومرحله‌ای سازگار با روش نمونه‌گیری اشتاین معرفی کردند. روش دو مرحله‌ای آنان کار را با نمونه مقدماتی X_m, \dots, X_1 آغاز و بر اساس این نمونه مقدماتی، متغیر توقف $N_m = \max\{m, \lfloor \frac{B\bar{X}_m^2}{\omega} \rfloor + 1\}$ را معرفی کرد. در این روش اگر $N_m = m$ آنگاه نمونه اولیه کافی است و نیازی به نمونه‌گیری مرحله دوم نخواهد بود، در غیر این صورت در مرحله دوم نمونه‌گیری به تعداد $N_m - m$ مشاهده به مشاهدات مرحله اول افزوده شده و در نهایت میانگین تمام مشاهدات یعنی $\bar{X}_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}$ به عنوان برآوردگر پارامتر θ معرفی می‌شود. موخوپادهای و پیپه (۲۰۰۶) نشان دادند که اگر $B = \frac{2m(m+1)}{(m-1)(m-2)}$ ، در این صورت مخاطره متناظر با برآوردگر معرفی شده از ω کمتر خواهد بود.

بررسی‌های بیشتر روی روش معرفی شده توسط موخوپادهای و پیپه (۲۰۰۶) نشان داد که مخاطره این برآوردگر به میزان خیلی زیاد کمتر از ω است و از طرف دیگر میانگین حجم نمونه مورد نیاز تقریباً ۲ برابر n^* است. به همین دلیل زاکس و موخوپادهای (۲۰۰۶) به این فکر افتادند که شاید بتوان روش مذکور را را به نحوی بهبود بخشید که به طور متوسط از تعداد نمونه کمتری استفاده شده و همچنان مخاطره برآوردگر معرفی شده از مقدار ω پیش تعیین شده ω بیشتر نشود. نتیجه مطالعات زاکس و موخوپادهای در این زمینه که در سال ۲۰۰۶ منتشر گردید (۲۰۰۶a, b)، جایگزینی یک ضریب جدید B در متغیر توقف بود که رابطه آن با ضریب قدیمی به صورت $B^{new} = 0.565B^{old}$ است. اما این روش نیز از مشکل بیش‌نمونه‌گیری (به میزانی کمتر از روش قبل) رنج می‌برد. در این مقاله روشی معرفی می‌شود که ضمن ارائه یک برآوردگر با محدودیت کران‌داری مخاطره، در مقایسه با روش‌های پیش‌گفته به طور متوسط به حجم نمونه کمتری نیاز دارد. در پایان این بخش، صورت قضیه‌ای که در اثبات یکی از مهمترین قضیه‌های این مقاله کاربرد دارد بیان شده است.

قضیه ۱: (وودروف، ۱۹۷۷) فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مثبت، مستقل و هم توزیع از جامعه‌ای با تابع توزیع $F(x)$ ، میانگین μ و واریانس τ^2 باشند و اعدادی مانند B و p پیدا شوند به نحوی که برای تمام $x > 0$ رابطه $F(x) \leq Bx^p$ برقرار بوده و برای برخی r ها داشته باشیم $E(X_1^r) < \infty$. در این شرایط اگر

$$t_c = \inf\{n \geq m ; S_n < cn^a L_n\}$$

که در آن $a > 1, m \geq 1, S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ و $L_x = 1 + \frac{L_0}{x} + o(\frac{1}{x})$ و $x \rightarrow \infty$ و $L_0 \in (-\infty, \infty)$ یک متغیر توقف باشد، وقتی $r(2a-1) > 4$ و $mp > \frac{1}{a-1}$ و $c \rightarrow 0$ میانگین t_c در رابطه

$$E(t_c) = \lambda + b\mu^{-1}\nu - bL_0 - ab^2\tau^2\mu^{-2} + o(1) \quad (1)$$

صدق می‌کند. که در آن، نمادهای ν, λ, b با استفاده از روابط

$$\nu = \frac{b}{2\mu} [(a-1)^2\mu^2 + \tau^2] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E\{(S_n - na\mu)^+\},$$

$$\lambda = \frac{\mu^b}{c^b}, \quad b = \frac{1}{a-1}$$

جایگزین می‌شوند، به طوری که $Y^+ = \max\{0, Y\}$.

۲ روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض

حجم نمونه بهینه، یعنی $n^* = \frac{\theta^2}{\omega}$ مجهول است و باید به نوعی برآورد شود. در روش دنباله‌ای محض برای برآورد n^* از یک روش برآورد سریالی استفاده می‌شود. در این روش کار با استخراج یک نمونه مقدماتی به حجم $m (\geq 2)$ شروع و ضمن بررسی برقراری شرط مورد نظر، اگر شرط تامین شده باشد فرآیند نمونه‌گیری متوقف و در غیر این صورت یک مشاهده به مشاهدات قبلی اضافه می‌شود و مجدداً به بررسی تامین یا عدم تامین شرط مورد نظر پرداخته و به صورت سریالی این کار تا تامین شرط مورد نظر ادامه یابد. به بیان

واضح‌تر، در این روش قاعده توقف

$$N = \inf \left\{ n \geq m, n \geq \frac{\bar{X}_n^2}{\omega} \right\}, \quad (2)$$

تعریف می‌شود و نمونه مقدماتی X_1, \dots, X_m را از توزیع نمایی با میانگین θ استخراج و میانگین نمونه \bar{X}_m را محاسبه و بررسی می‌شود که آیا m بزرگتر یا مساوی $\frac{\bar{X}_m^2}{\omega}$ است یا خیر؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، نمونه مقدماتی کافی بوده و بنابراین $N = m$ ، در غیر این صورت یک مشاهده جدید به مشاهدات قبلی افزوده و بر اساس نمونه X_1, \dots, X_{m+1} میانگین \bar{X}_{m+1} را محاسبه و بررسی می‌شود که آیا رابطه $m+1 \geq \frac{\bar{X}_{m+1}^2}{\omega}$ برقرار است؟ (برآورد θ در این مرحله است). در صورت برقراری رابطه مذکور، $N = m+1$ و فرآیند نمونه‌گیری خاتمه می‌یابد و در صورت عدم برقراری رابطه یک مشاهده جدید به مشاهدات قبلی اضافه کرده و مجدداً $m+2$ را با برآورد این مرحله n^* مقایسه می‌شود و این کار به‌طور متوالی آنقدر ادامه داده می‌شود تا جایی که برای اولین بار حجم نمونه (n) بزرگتر یا مساوی $\frac{\bar{X}_n^2}{\omega}$ (برآورد n^*) شود و لذا $N = n$ خواهد بود. در نهایت بر اساس نمونه نهایی X_1, \dots, X_N برآوردگر پارامتر θ به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\hat{\theta}_N = \bar{X}_N = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N}.$$

در دو قضیه زیر یکی از مهمترین ویژگی‌های یک برآوردگر مطلوب یعنی وضعیت اریبی برای دو برآوردگر معرفی شده در قسمت قبل یعنی N به عنوان برآوردگر n^* و $\hat{\theta}_N$ به عنوان برآوردگر θ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در ادامه، نماد $G(x, \alpha, \beta)$ نشان دهنده تابع توزیع یک متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکلی α و پارامتر مقیاس β در نقطه x است و $\bar{G}(x, \alpha, \beta) = 1 - G(x, \alpha, \beta)$ به عبارت دیگر اگر $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ در این صورت

$$\bar{G}(x, \alpha, \beta) = 1 - G(x, \alpha, \beta) = 1 - P(X \leq x).$$

لازم به ذکر است که با توجه به این که قضیه‌های ۲ و ۳ حالت‌هایی خاص از قضیه‌های ۴ و ۵ هستند و ما در بخش بعدی قضیه‌های ۴ و ۵ (حالت‌های کلی‌تر) را اثبات خواهیم کرد، لذا از اثبات قضیه‌های ۲ و ۳

در این بخش صرف نظر شده است.

قضیه ۲: اگر داشته باشیم $n^* > m$ ، آنگاه امید ریاضی N وقتی $\omega \rightarrow 0$ عبارت است از:

$$E(N) = n^* - \frac{1}{\psi} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{G}(\frac{\psi}{n}, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{\psi}{n}, n, 1)] + o(1).$$

نتیجه ۱: N برآوردگری اریب (با اریبی منفی) برای n^* است و هنگامی که $\omega \rightarrow 0$ اریبی از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$Bias(N, n^*) = -\frac{1}{\psi} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{G}(\frac{\psi}{n}, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{\psi}{n}, n, 1)] + o(1)$$

قضیه ۳: اگر داشته باشیم $m > 2$ ، آنگاه امید ریاضی $\hat{\theta}_N$ وقتی $\omega \rightarrow 0$ عبارت است از:

$$E(\hat{\theta}_N) = \theta - \frac{2\theta}{n^*} + o(1).$$

نتیجه ۲: $\hat{\theta}_N$ برآوردگری اریب (با اریبی منفی) برای θ است و هنگامی که $\omega \rightarrow 0$ اریبی از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$Bias(\hat{\theta}_N, \theta) = -\frac{2\theta}{n^*} + o(1).$$

شبیه‌سازی و نتایج حاصل از آن

برای مطالعه بهتر برآوردگر معرفی شده و بررسی تحقق انتظارات خود از این برآوردگر، یک شبیه‌سازی طراحی و اجرا شده است. در این شبیه‌سازی برای θ مقادیر متفاوتی از ۰/۱ تا ۳۰، برای m مقادیر ۱۰ و ۲۰ و مقادیر ۱، ۰/۵، ۰/۲۵، ۰/۱، ۰/۰۵، ۰/۰۲۵، ۰/۰۱ و ۰/۰۰۵ را برای ω در نظر گرفته و ابتدا n^* را با استفاده از فرمول $\frac{\theta^2}{\omega}$ محاسبه و سپس برای هر ترکیب از m ، θ و ω به تعداد $h = 10000$ مرتبه، θ با استفاده از فرآیند برآورد نقطه‌ای دنباله‌ای برآورد شده است. روش محاسبه برآورد بدین شرح است که اگر در i امین شبیه‌سازی نمونه n_i تایی X_1, \dots, X_{n_i} مشاهده شده باشد، $\hat{\theta}_{n_i} = \bar{x}_{n_i}$ به عنوان برآورد θ و زیان ناشی از آن معادل $(\bar{x}_{n_i} - \theta)^2$ در نظر گرفته شده است. گزیده‌ای از نتایج شبیه‌سازی انجام شده در جدول ۱ و شکل ۱ مشاهده می‌شوند. نمادهای مورد استفاده در ارائه نتایج عبارتند از، مقدار شبیه‌سازی

جدول ۱. گزیده‌ای از نتایج شبیه سازی فرآیند نمونه گیری دنباله‌ای به منظور برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی .

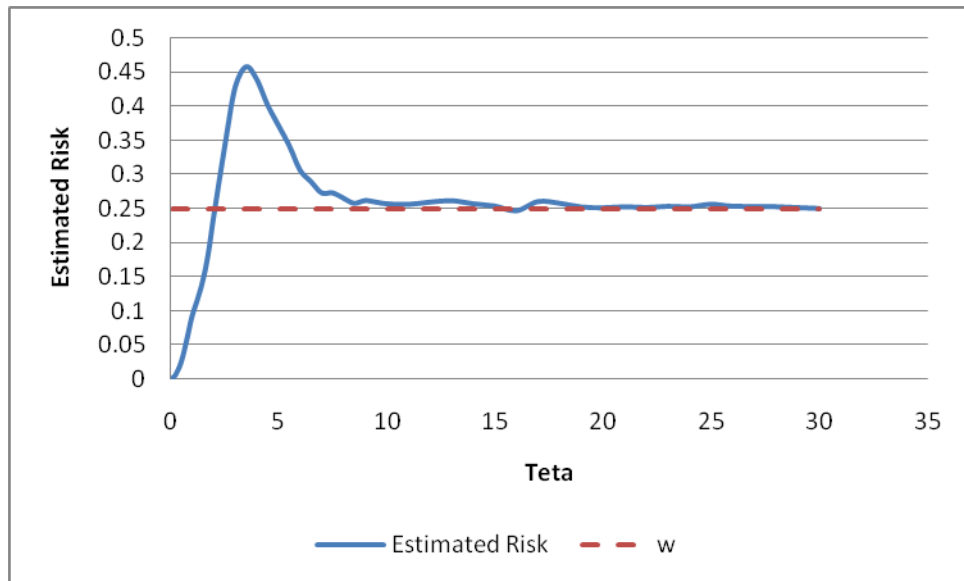
θ	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
ω	۱	۰/۵۰۰۰	۰/۲۵۰۰	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۵۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۰
n^*	۱۶	۳۲	۶۴	۱۶۰	۳۲۰	۶۴۰	۱۶۰۰	۳۲۰۰
$E(\hat{\theta}_N)$	۳/۵۰۰	۳/۷۵۰۰	۳/۸۷۵۰	۳/۹۵۰۰	۳/۹۷۵۰	۳/۹۸۷۵	۳/۹۹۵۰	۳/۹۹۷۵
$E(N)$	۱۴/۰۶۸	۳۰/۰۶۸	۶۲/۰۶۸	۱۵۸/۰۷	۳۱۸/۰۷	۶۳۸/۰۷	۱۵۹۸/۱	۳۱۹۸/۱
m	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
$\hat{E}(N)$	۱۶/۰۶۴	۲۹/۴۱۶	۶۰/۷۸۶	۱۵۷/۷۵	۳۱۷/۵۴	۶۳۷/۶۹	۱۵۹۶/۴	۳۱۹۹/۲
$\hat{E}(\hat{\theta}_N)$	۳/۶۸۵۸	۳/۶۶۴۰	۳/۸۱۲۹	۳/۹۴۳۷	۳/۹۷۱۱۲	۳/۹۸۶۲	۳/۹۹۲۹	۳/۹۹۸۲
$\hat{B}(\hat{\theta}_N, \theta)$	-۰/۳۱۴۲	-۰/۳۳۶۰	-۰/۱۸۷۱	-۰/۰۵۶۳	-۰/۰۲۸۸	-۰/۰۱۳۸	-۰/۰۰۷۱	-۰/۰۰۱۸
$\hat{R}(\hat{\theta}_N, \theta)$	۰/۹۱۱۵	۰/۸۳۰۲	۰/۴۲۸۷	۰/۱۱۸۶	۰/۰۵۴۵	۰/۰۲۵۹	۰/۰۱۰۳	۰/۰۰۵۱
m	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
$\hat{E}(N)$	۲۱/۳۳۶	۳۱/۴۱۶	۶۱/۳۳۳	۱۵۷/۵۹	۳۱۸/۲۳	۶۳۸/۲۱	۱۵۹۸/۱	۳۱۹۶/۹
$\hat{E}(\hat{\theta}_N)$	۳/۹۲۳۹	۳/۷۹۹۱	۳/۸۳۹۶	۳/۹۴۱۷	۳/۹۷۵۵	۳/۹۸۷۸	۳/۹۹۵۰	۳/۹۹۶۸
$\hat{B}(\hat{\theta}_N, \theta)$	-۰/۰۷۶۱	-۰/۲۰۰۹	-۰/۱۶۰۴	-۰/۰۵۸۳	-۰/۰۲۴۵	-۰/۰۱۲۲	-۰/۰۰۵۰	-۰/۰۰۳۲
$\hat{R}(\hat{\theta}_N, \theta)$	۰/۶۰۲۸	۰/۵۰۷۰	۰/۳۵۲۵	۰/۱۱۸۲	۰/۰۵۴۱	۰/۰۲۶۰	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۵۰

شده $E(N)$ ، $E(\hat{\theta}_N)$ ، $R(\hat{\theta}_N, \theta)$ و اریبی $\hat{\theta}_N$ که به ترتیب برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{E}(\hat{N}) &= \bar{n} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h n_i, \\ \hat{E}(\hat{\theta}_N) &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{\theta}_{n_i} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \bar{x}_{n_i}, \\ \hat{R}(\hat{\theta}_N, \theta) &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\bar{x}_{n_i} - \theta)^2, \\ \hat{B}(\hat{\theta}_N, \theta) &= \hat{E}(\hat{\theta}_N) - \theta. \end{aligned}$$

۳ فرآیند دنباله‌ای محض با استفاده از N تعدیل یافته

نگاهی به نتایج شبیه‌سازی فرآیند دنباله‌ای محض در شکل ۱ نشان می‌دهد که برآوردگر معرفی شده توسط این فرآیند انتظار ما را برآورده نکرده است! زیرا مخاطره شبیه سازی شده برآوردگر حداقل در یک بازه از



شکل ۱. منحنی $\hat{R}(\hat{\theta}_N, \theta)$ به عنوان تابعی از θ با در نظر گرفتن $m = 10$ و $\omega = 0.25$

مقادیر θ از مرز ω تجاوز کرده است. همان‌طوری که در نتیجه قضیه ۲ گفته شد، میانگین متغیر توقف معرفی شده در رابطه (۲) کمتر از n^* بوده و این نکته در نتایج شبیه‌سازی شده نیز مشهود است. لذا احساس می‌شود در صورت معرفی یک متغیر توقف جدید (به عنوان برآوردگر n^*) که از مشکل کم‌برآوردی مبری باشد، مشکل عدول مخاطره برآوردگر نهایی θ از مقدار ازپیش تعیین شده ω حل خواهد شد.

برای این منظور، قاعده توقف تعدیل یافته‌ای، به صورت زیر تعریف شده است:

$$N_{adj} = \inf \left\{ n \geq m, n \geq \frac{\bar{X}_n^2}{\omega} \ell_n \right\}, \quad (3)$$

که در آن دنباله عددی $\{\ell_n\}$ معرف ضریبی است که اولاً برای تمامی n ها، ℓ_n بزرگتر از واحد بوده و در ثانی هنگامی که $n \rightarrow \infty$ رابطه $\ell_n = 1 + \frac{\ell_0}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ که در آن ℓ_0 یک عدد مثبت ثابت است، برقرار باشد.

اکنون با در نظر گرفتن متغیر توقف تعدیل شده (۳)، یک فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای محض مشابه با فرآیند دنباله‌ای معرفی شده در بخش ۲ اجرا و در نهایت با حصول مشاهدات $X_1, \dots, X_{N_{adj}}$ برآوردگر

جدید θ را به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\hat{\theta}_{N_{adj}} = \bar{X}_{N_{adj}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{adj}} X_i}{N_{adj}}.$$

قضیه ۴: اگر داشته باشیم $n^* > m$ در این صورت امید ریاضی N_{adj} در صورتی که $\omega \rightarrow 0$ عبارت است از:

$$E(N_{adj}) = n^* + l_0 - \frac{1}{\sqrt{\omega}} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{G}(\frac{3}{\sqrt{\omega}}n, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{3}{\sqrt{\omega}}n, n, 1)] + o(1).$$

برهان: برای استفاده از قضیه ۱، ابتدا متغیر توقف رابطه (۳) به صورت

$$N_{adj} = \inf \{n \geq m; S_n < \sqrt{\omega n} \frac{3}{2} L_n\}$$

بازنویسی می‌شود، که در آن $L_n = 1 + \frac{-\omega l_0}{n} + o(\frac{1}{n}) = 1 + \frac{L_0}{n} + o(\frac{1}{n})$. این فرم متغیر توقف

N_{adj} مشابه با فرم متغیر توقف وودروف بوده و نمادهای متناظر با قاعده وودروف عبارتند از:

$$\lambda = \frac{\mu^b}{c^b} = \frac{\theta^2}{\omega} = n^* \text{ و } c = \sqrt{\omega}, \tau^2 = \theta^2, \mu = \theta, b = \frac{1}{a-1} = 2, a = \frac{3}{2}$$

برای محاسبه ν ابتدا $E\{(S_n - na\mu)^+\}$ محاسبه شده است. از آنجایی که $X_i \sim Exp(\theta)$ خواهیم

داشت، بنابراین: $\frac{S_n}{\theta} \sim Gamma(n, 1)$.

$$\begin{aligned} E\{(S_n - na\mu)^+\} &= E\{(S_n - \frac{3}{2}n\theta)^+\} \\ &= \theta E\{(\frac{S_n}{\theta} - \frac{3}{2}n)^+\} \\ &= \theta \int_{3/2n}^{\infty} (t - \frac{3}{2}n) \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= n\theta [\bar{G}(\frac{3}{2}n, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{3}{2}n, n, 1)] \end{aligned}$$

۱۴۲ توزیع نمایی با محدودیت کران‌داری تابع مخاطره

و با استفاده از نتیجه به دست آمده می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{b}{2\mu} [(a-1)^2 \mu^2 + \tau^2] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E\{(S_n - na\mu)^+\} \\ &= \theta \left\{ \frac{5}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{G}(\frac{3}{4}n, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{3}{4}n, n, 1)] \right\}. \end{aligned}$$

در نهایت اگر در (۴)، $a = \frac{3}{4}$ ، $b = 2$ ، $\mu = \theta$ و $\tau^2 = \theta^2$ جایگزین شوند، اثبات قضیه کامل می‌شود.

نتیجه ۳: N_{adj} برآوردگری اریب برای n^* است و هنگامی که ω اریبی از رابطه

$$Bias(N_{adj}, n^*) = \ell_0 - \frac{1}{4} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{G}(\frac{3}{4}n, n+1, 1) - \bar{G}(\frac{3}{4}n, n, 1)] + o(1)$$

تبعیت می‌کند، که نشان می‌دهد میزان اریبی به ℓ_0 وابسته بوده و برای تاثیرگذاری مطلوب بر میزان اریبی و خارج کردن آن از وضعیت منفی و حصول اریبی مثبت دلخواه می‌توان ℓ_0 مناسبی اختیار کرد.

قضیه ۵: اگر داشته باشیم $m > 2$ در این صورت امید ریاضی $\hat{\theta}_{N_{adj}}$ به شرط آنکه $\omega \rightarrow 0$ عبارت است از:

$$E(\hat{\theta}_{N_{adj}}) = \theta - \frac{2\theta}{n^*} + o(1).$$

برهان: متغیر توقف N_{adj} را به صورت

$$N_{adj} = \inf\left\{n \geq m; \frac{n}{\frac{X_n^2}{\ell_n \theta^2}} > n^*\right\} = \inf\{n \geq m; Z_n > n^*\}$$

نوشته و متغیر تصادفی Y_i را به صورت $Y_i = \frac{X_i}{\theta}$ تعریف می‌کنیم. به این ترتیب اثبات این قضیه دقیقاً مشابه اثبات قضیه ۲ در تاکادا و ناگاتا (۱۹۹۵) خواهد بود.

نتیجه ۴: $\hat{\theta}_{N_{adj}}$ برآوردگری اریب (با اریبی منفی) برای θ است و هنگامی که $\omega \rightarrow 0$ اریبی از رابطه

$$Bias(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta) = -\frac{2\theta}{n^*} + o(1)$$

تبعیت می‌کند، که می‌توان به کمک آن یک برآوردگر جدید با تصحیح میزان اریبی برای θ معرفی نمود. توجه به اینکه آخرین برآوردگرهای معرفی شده برای n^* و θ به ترتیب عبارتند از N_{adj} و $\bar{X}_{N_{adj}}$ ، لذا $\hat{\theta}_{N_{adj}}^c = \bar{X}_{N_{adj}} \left(1 + \frac{2}{N_{adj}}\right)$ یک برآوردگر با اریبی تصحیح شده است و انتظار می‌رود مقدار مطلق اریبی آن در مقایسه با مقدار مطلق اریبی $\hat{\theta}_{N_{adj}}$ به میزان قابل توجهی کمتر باشد.

در صورت محاسبه تحلیلی مقدار مخاطره یعنی $R(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$ می‌توان از آن بهره گرفته و مقدار مناسبی را برای ℓ در نظر گرفت به نحوی که اندازه مخاطره از مقدار از پیش تعیین شده ω بیشتر نشود. اما متأسفانه تلاش‌های ما برای محاسبه تحلیلی مخاطره، تاکنون به نتیجه مطلوبی نرسیده است. به همین دلیل برای انتخاب یک ℓ مناسب از مطالعات تجربی و بررسی و مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از مقادیر مختلف ℓ استفاده شده است. نتیجه این مطالعات تجربی گسترده ما را متقاعد کرد که مقبول‌ترین مقدار برای ℓ عدد 2^0 می‌باشد. به عبارت دیگر نتیجه مطالعات تجربی نشان داد که اگر ضریب ℓ_n در متغیر توقف رابطه (۳) به صورت $\ell_n = 1 + \frac{2^0}{n} + \frac{1}{n^2}$ در نظر گرفته شود، آنگاه مخاطره‌های برآوردگرهای معرفی شده از مقدار از پیش تعیین شده ω بیشتر نخواهند شد.

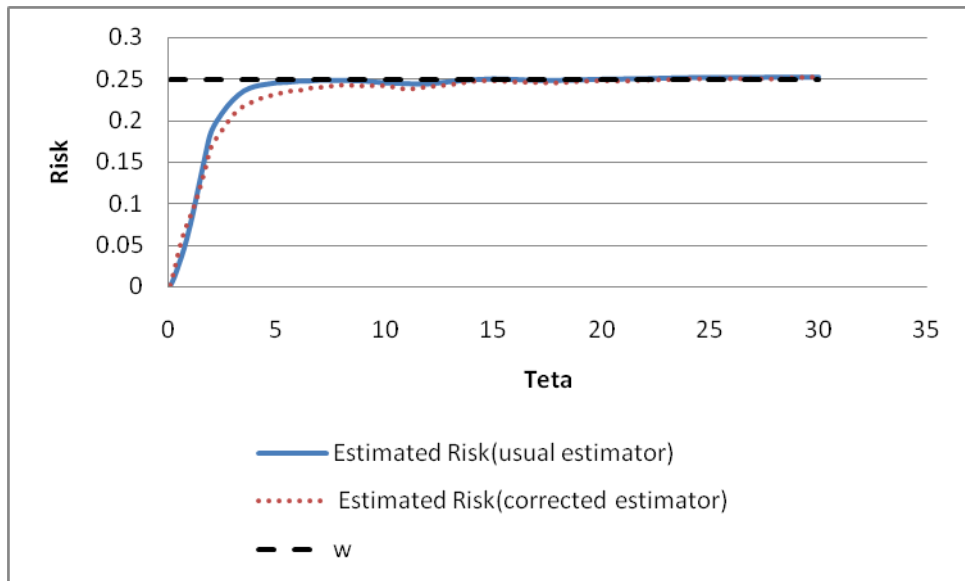
شبیه‌سازی با استفاده از متغیر توقف تعدیل یافته

با توجه به عدم موفقیت در محاسبه تحلیلی مقدار مخاطره برآوردگر $\hat{\theta}_{N_{adj}}$ ، با استفاده از شبیه‌سازی و بررسی تجربی، ضریب مناسب ℓ_n در قاعده توقف رابطه (۳) به صورت $\ell_n = 1 + \frac{2^0}{n} + \frac{1}{n^2}$ در نظر گرفته شد. در قسمت گذشته‌ای از نتایج شبیه‌سازی فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای محض با استفاده از متغیر توقف تعدیل شده در جدول ۲ و شکل‌های ۲ و ۳ به نمایش گذاشته است. به عنوان مثال اگر در تکرار i ام از شبیه‌سازی، با رسیدن به n_i مشاهده، کار نمونه‌گیری سریالی خاتمه یابد در این صورت داریم:

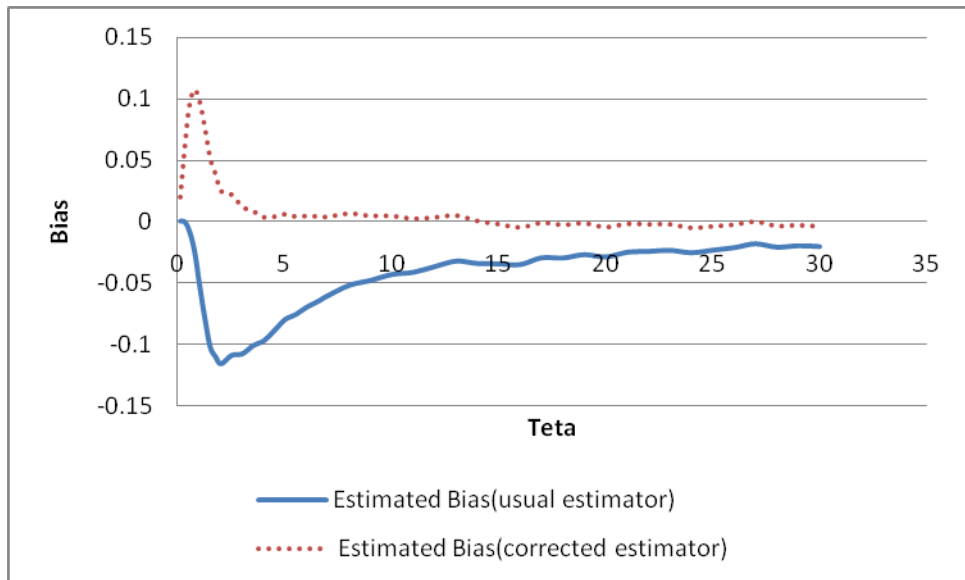
$$\widehat{R}_i(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\hat{\theta}_{n_i}^c - \theta)^2 \quad \text{و} \quad \widehat{E}(\hat{\theta}_{N_{adj}}) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{\theta}_{n_i}^c, \quad \hat{\theta}_{n_i}^c = \bar{x}_{n_i} \left(1 + \frac{2}{n_i}\right)$$

با توجه به نتایج شبیه‌سازی‌ها موارد زیر را داریم:

۱. استفاده از فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای با متغیر توقف تعدیل شده باعث افزایش حجم نمونه نهایی شده و مخاطره برآوردگر مبتنی بر آن از مقدار از پیش تعیین شده ω تجاوز نمی‌کند.



شکل ۲. منحنی‌های $\widehat{R}(\widehat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$ و $\widehat{R}(\widehat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$ به عنوان توابعی از θ برای $m = 10$ ، $\omega = 0.25$ و $l_0 = 20$



شکل ۳. منحنی‌های $\widehat{B}(\widehat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$ و $\widehat{B}(\widehat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$ به عنوان توابعی از θ برای $m = 10$ ، $\omega = 0.25$ و $l_0 = 20$

جدول ۲. نتایج شبیه سازی فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای به منظور برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی با در نظر گرفتن متغیر توقف

$$\ell_n = 1 + \frac{2^0}{n} + \frac{1}{n^2}$$

۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	θ
۱	۰/۵۰۰۰	۰/۲۵۰۰	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۵۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۰	ω
۱۶	۳۲	۶۴	۱۶۰	۳۲۰	۶۴۰	۱۶۰۰	۳۲۰۰	n^*
۳۴/۰۶۸	۵۰/۰۶۸	۸۲/۰۶۸	۱۷۸/۰۷	۳۳۸/۰۷	۶۵۸/۰۷	۱۶۱۸/۱	۳۲۱۸/۱	$E(N_{adj})$
۳/۵۰۰	۳/۷۵۰۰	۳/۸۷۵۰	۳/۹۵۰۰	۳/۹۷۵۰	۳/۹۸۷۵	۳/۹۹۵۰	۳/۹۹۷۵	$E(\hat{\theta}_{N_{adj}})$
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	m
۲۶/۷۸۷	۴۴/۶۴۵	۷۸/۹۰۷	۱۷۶/۷۰	۳۳۶/۶۸	۶۵۸/۴۷	۱۶۱۹/۴	۳۲۱۷/۷	$\hat{E}(N_{adj})$
۳/۷۶۴۵	۳/۸۲۹۸	۳/۹۱۱۹	۳/۹۵۹۶	۳/۹۷۳۶	۳/۹۹۰۷	۳/۹۹۷۰	۳/۹۹۷۴	$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_{adj}})$
-۰/۲۳۵۵	-۰/۱۷۰۲	-۰/۰۸۸۱	-۰/۰۴۰۴	-۰/۰۲۶۴	-۰/۰۰۹۳	-۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۲۶	$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$
۰/۷۶۸۴	۰/۴۷۱۱	۰/۲۴۰۴	۰/۰۹۹۷	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۴۶	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۵۱	$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$
۴/۰۵۱۷	۴/۰۰۵۱	۴/۰۱۲۶	۴/۰۰۴۸	۳/۹۹۷۴	۴/۰۰۲۸	۴/۰۰۱۹	۳/۹۹۹۹	$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c)$
۰/۰۵۱۷	۰/۰۰۵۱	۰/۰۱۲۶	۰/۰۰۴۸	-۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۰۱	$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$
۰/۶۸۱۶	۰/۴۲۲۴	۰/۲۲۴۹	۰/۰۹۶۲	۰/۰۴۸۸	۰/۰۲۴۴	۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۵۱	$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	m
۲۷/۷۶۸	۴۵/۰۹۴	۷۸/۶۰۵	۱۷۶/۷۰	۳۳۷/۲۱	۶۵۶/۹۵	۱۶۱۶/۹	۳۲۱۷/۹	$\hat{E}(N_{adj})$
۳/۸۴۶۲	۳/۸۵۹۹	۳/۹۰۳۳	۳/۹۵۹۹	۳/۹۷۷۱	۳/۹۸۵۹	۳/۹۹۳۹	۳/۹۹۷۵	$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_{adj}})$
-۰/۱۵۳۸	-۰/۱۴۰۱	-۰/۰۹۶۷	-۰/۰۴۰۱	-۰/۰۲۲۹	-۰/۰۱۴۱	-۰/۰۰۶۱	-۰/۰۰۲۵	$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$
۰/۵۴۴۲	۰/۴۱۲۶	۰/۲۳۸۴	۰/۰۹۸۹	۰/۰۴۹۵	۰/۰۲۴۸	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۰	$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_{adj}}, \theta)$
۴/۱۲۵۵	۴/۰۳۴۳	۴/۰۰۴۲	۴/۰۰۵۱	۴/۰۰۰۸	۳/۹۹۸۱	۳/۹۹۸۸	۴/۰۰۰۰	$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c)$
۰/۱۲۵۵	۰/۰۳۴۳	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۰۸	-۰/۰۰۱۹	-۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۰۰	$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$
۰/۵۲۶۷	۰/۳۷۷۴	۰/۲۲۱۳	۰/۰۹۵۵	۰/۰۴۸۴	۰/۰۲۴۵	۰/۰۰۹۹	۰/۰۰۵۰	$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_{adj}}^c, \theta)$

۲. همان طوری که انتظار می‌رفت با تصحیح اریبی برآوردی حاصل شده است که میزان مطلق اریبی آن همواره کمتر از برآوردگر قبلی است و مخاطره آن نیز در شرط مطلوب ما (یعنی، عدم عدول از مقدار از پیش تعیین شده ω) صدق می‌کند.

۳. بر اساس قضیه ۴ امید ریاضی متغیر توقف (به غیر از مواردی که $m > n^*$) به m بستگی ندارد. به عبارت دیگر حجم نمونه اولیه (جز در مواردی که حجم نمونه اولیه بیش از حجم نمونه بهینه است) تاثیری بر حجم نمونه نهایی ندارد و این موضوع در نتایج شبیه‌سازی با $m = 10$ و $m = 20$ نیز مشهود است.

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی فرآیند نمونه‌گیری دنباله‌ای دو مرحله‌ای زاکس و موخوپادهای به منظور برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی

θ	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	θ
ω	۰/۵۰۰۰	۰/۲۵۰۰	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۵۰	۰/۰۱۰۰	۰/۰۰۵۰	۰/۰۰۰۰	
n^*	۱۶	۳۲	۶۴	۱۶۰	۳۲۰	۶۴۰	۱۶۰۰	۳۲۰۰	
m	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	
$\hat{E}(N_m)$	۳۱/۱۰۷	۶۱/۰۷۳	۱۲۲/۳۱	۳۰۴/۲۵	۶۰۷/۰۳	۱۲۱۸/۹	۳۰۴۷/۲	۶۰۸۶/۳	
$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_m})$	۳/۷۰۸۱	۳/۸۱۷۰	۳/۹۰۴۴	۳/۹۶۰۴	۳/۹۸۱۱	۳/۹۸۹۷	۳/۹۹۶۱	۳/۹۹۸۲	
$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_m}, \theta)$	-۰/۲۹۱۹	-۰/۱۸۳۰	-۰/۰۹۵۶	-۰/۰۳۹۶	-۰/۰۱۸۹	-۰/۰۱۰۳	-۰/۰۰۳۹	-۰/۰۰۱۸	
$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_m}, \theta)$	۰/۸۲۲۵	۰/۴۸۳۴	۰/۲۳۸۳	۰/۰۸۸۳	۰/۰۴۲۱	۰/۰۲۰۵	۰/۰۰۸۱	۰/۰۰۴۱	
m	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	
$\hat{E}(N_m)$	۲۴/۹۳۱	۴۴/۵۴۴	۸۷/۷۵۶	۲۱۹/۳۸	۴۳۸/۶۰	۸۷۴/۲۵	۲۱۸۴/۸	۴۳۸۳/۸	
$\hat{E}(\hat{\theta}_{N_m})$	۳/۸۴۶۸	۳/۸۱۶۶	۳/۸۸۸۱	۳/۹۵۴۵	۳/۹۷۸۵	۳/۹۸۹۴	۳/۹۹۵۹	۳/۹۹۸۲	
$\hat{B}(\hat{\theta}_{N_m}, \theta)$	-۰/۱۵۳۲	-۰/۱۸۳۴	-۰/۱۱۱۹	-۰/۰۴۵۵	-۰/۰۲۱۵	-۰/۰۱۰۶	-۰/۰۰۴۱	-۰/۰۰۱۸	
$\hat{R}(\hat{\theta}_{N_m}, \theta)$	۰/۵۴۰۳	۰/۴۷۲۴	۰/۲۶۰۱	۰/۰۹۷۲	۰/۰۴۶۶	۰/۰۲۳۰	۰/۰۰۹۰	۰/۰۰۴۵	

۴ مقایسه عملکرد فرآیند دنباله‌ای محض تعدیل یافته با سایر روش‌ها

در بخش مقدمه گفتیم روش‌های معرفی شده قبلی برای برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی با قید کران‌داری تابع مخاطره همگی از نوع روش‌های دنباله‌ای دو مرحله‌ای بودند. همچنین اشاره گردید که سیر تکاملی معرفی روش‌های دنباله‌ای دو مرحله‌ای به روش زاکس و موخوپادهای (a, b) (۲۰۰۶) منتهی گردید. به عبارت دیگر روش زاکس و موخوپادهای از سایر روش‌های پیش از آن عملکرد مطلوب‌تری از خود نشان می‌دهد، به همین دلیل تنها به مقایسه نتایج فرآیند دنباله‌ای محض تعدیل یافته با نتایج روش دو مرحله‌ای زاکس و موخوپادهای اکتفا می‌شود. چون در جدول‌های ۱ و ۲، نتایج شبیه‌سازی برای کلیه حالت‌هایی که در آن فراهم آمدن امکان مقایسه، شبیه‌سازی فرآیند نمونه‌گیری زاکس و موخوپادهای نیز برای همان حالت‌های $\theta = 4$ ، $m \in \{10, 20\}$ و $\omega \in \{0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$ درج شده است برای $\theta = 4$ ، $m \in \{10, 20\}$ و $\omega \in \{0.005, 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1\}$ انجام و نتایج در جدول ۳ درج شده است.

مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی روش دنباله‌ای محض با متغیر توقف تعدیل یافته (جدول ۲) و روش دو مرحله‌ای زاکس و موخوپادهای (جدول ۳) نشان می‌دهد، روش دنباله‌ای محض با تعداد نمونه‌ای به

مراتب کمتر از روش زاکس و موخوپادهای، برآوردگری را ارائه می‌دهد که شرط عدم تجاوز مخاطره برآوردگر از مقدار از پیش تعیین شده w را تامین می‌کند. به عنوان مثال در وضعیت $m = 10$ و $w = 0.1$ ، میانگین حجم نمونه مورد استفاده در 10000 مرتبه شبیه‌سازی در روش زاکس و موخوپادهای $304/25$ و در روش دنباله‌ای محض با متغیر توقف تعدیل یافته $176/7$ بوده است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن بررسی مطالعات دنباله‌ای قبلی در خصوص معرفی برآوردگر پارامتر مقیاس توزیع نمایی با قید کران‌داری مخاطره برآوردگر، روش نمونه‌گیری دنباله‌ای محض برای معرفی برآوردگری که مخاطره آن از مقدار از پیش تعیین شده w بیشتر نشود، معرفی گردید. در حین مطالعات برای معرفی چنین برآوردگری، ابتدا قاعده توقفی برای توقف نمونه‌گیری معرفی شد که مخاطره برآوردگر مبتنی بر حجم نمونه تصادفی حاصل از آن، شرط نایبشتری مخاطره از مقدار w را تامین نمی‌کرد. برای رفع این مشکل با تعدیل متغیر توقف مورد استفاده، قاعده توقفی معرفی گردید که مخاطره برآوردگر نهایی مبتنی بر نمونه ارائه شده توسط این قاعده توقف همواره کمتر از کران مورد نظر بود. در نهایت با توجه به اریب بودن برآوردگر معرفی شده، با توجه به میزان اریبی محاسبه شده میزان اریبی تصحیح و برآوردگری جدید معرفی شد که ضمن تامین نمودن شرط کران‌داری مخاطره، دارای اریبی خیلی ناچیز بوده و با میل کردن w به سمت صفر میزان اریبی آن به سوی صفر میل می‌کند.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله نهایت تشکر و قدردانی را از داوران و سردبیر محترم نشریه، که با رهنمودهای ارزنده خود باعث بهتر شدن مقاله گردیده‌اند، دارند. همچنین نویسندگان از دانشگاه یزد به خاطر حمایت‌های مالی تقدیر و تشکر می‌نمایند.

مراجع

- Birnbaum, A. and Healy, W. C. Jr. (1960), Estimates with Prescribed Variance Based on Two-stage Sampling, *Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 662-676.
- Kubokawa, T. (1989), Improving on Two-stage Estimators for Scale Families, *Metrika*, **36**, 7-13.

- Mukhopadhyay, N. and Pepe, W. (2006), Exact Bounded Risk Estimation When the Terminal Sample Size and Estimator Are Dependent: The Exponential Case, *Sequential Analysis*, **25**, 85-101.
- Stein, C. (1945), A Two Sample Test for a Linear Hypothesis Whose Power Is Independent of the Variance, *Annals of Mathematical Statistics*. **16**, 243-258.
- Stein, C. (1949), Some Problems in Sequential Estimation (abstract), *Econometrica*, **17**, 77-78.
- Takada, Y. (1986), Non-existence of Fixed Sample Size Procedures for Scale Families, *Sequential Analysis*, **5**, 93-101.
- Takada, Y. and Nagata, Y. (1995). Fixed-Width Sequential Confidence Interval for the Mean of a Gamma Distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **44**, 277-289.
- Woodroffe, M. (1977), Second-Order Approximations for Sequential Point and Interval Estimation, *Annals of Statistics*, **5**, 984-995.
- Zacks, S. and Mukhopadhyay, N. (2006a), Bounded Risk Estimation of the Exponential Parameter in a Two-stage Sampling, *Sequential Analysis*, **25**, 437-452.
- Zacks, S. and Mukhopadhyay, N. (2006b), Exact Risks of Sequential Point Estimators of the Exponential Parameter, *Sequential Analysis*, **25**, 203-220.