**مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۷**
**جلد ۱۲، شماره ۱، ص ۱۶۵ – ۱۸۸**
DOI: 10.29252/jss.12.1.165

# خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-G: خواص ریاضی و کاربرد آن‌ها

علی شادرخ، شهرام یعقوب‌زاده
گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران

تاریخ دریافت: ۲۰/۱۲/۱۳۹۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۲۶/۱/۱۳۹۷

**چکیده:** در این مقاله به کمک توزیع‌های $G$-توانی بسط‌هایی کلی برای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی، گشتاورها و آنتروپی‌های رنی و شانون و آماره‌های مرتب این خانواده توزیع‌ها به دست آورده می‌شود. همچنین از روش ماکسیمم درستنمایی برای برآورد پارامترهای آن استفاده کرده و به کمک یک مجموعه داده واقعی نشان داده می‌شود که خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ مدلی مناسب برای توزیع طول عمر است.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع گاما، توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$، توزیع $G$-توانی، برآورد ماکسیمم درستنمایی.

## ۱ مقدمه

در سال‌های اخیر خانواده توزیع‌های متفاوتی به وسیله نویسندگان مختلف ارائه شد. مانند خانواده توزیع‌های سری توانی، خانواده توزیع‌های مارشال-الکین-$G$ توسط مارشال و الکین (۱۹۹۷)، توزیع‌های با مولد متغیرهای تصادفی بتای استاندارد توسط ایوگن و همکاران (۲۰۰۲)، خانواده توزیع‌های با مولد متغیر تصادفی کوماراسوامی (۱۹۸۰) توسط کردیرو و کاسترو (۲۰۱۱)، خانواده توزیع‌های زگرافوس و بالاکریشنان (۲۰۰۹)، خانواده توزیع‌های ریستیک و بالاکریشنان (۲۰۱۲)، خانواده توزیع‌های تولید شده با استفاده از نتایج مک دونالد (۱۹۸۴) که در واقع تعمیمی از توزیع بتا است توسط الکساندر و همکاران (۲۰۱۲)، خانواده توزیع‌های با مولد متغیر تصادفی کومر[1] توسط ان‌جی و کوتز (۱۹۹۵) و پسکیم و همکاران (۲۰۱۲)

---

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: علی شادرخ، shadrokh.ali@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62E10، 62E15

[1] Kummer

معرفی شدند. خانواده توزیع‌های زگرافوس-بالاکریشنان توسط نداراجا و همکاران (۲۰۱۵) مورد بررسی قرار گرفت. در این مقاله ویژگی‌های خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ مورد بررسی قرار می‌گیرند. ریستیک و بالاکریشنان (۲۰۱۲) یک خانواده توزیع با تابع چگالی

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\left\{-\log G(x)\right\}^{a-1} g(x), \qquad (1)$$

و تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = 1 - \frac{\gamma(a, -\log G(x))}{\Gamma(a)} = 1 - \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{-\log G(x)} t^{a-1}e^{-t}dt, \qquad (2)$$

تعریف کردند، که در آن‌ها $g(x) = dG(x)/dx$، برای هر $a > 0$، $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ و $\gamma(a,z) = \int_0^z t^{a-1}e^{-t}dt$ به ترتیب تابع‌های گاما و گامای ناقص هستند. همچنین تابع نرخ خطر متناظر با تابع چگالی احتمال (۱) به صورت

$$h(x) = \frac{\{-\log G(x)\}^{a-1}g(x)}{\gamma(a, -\log G(x))} \qquad (3)$$

است. در بخش ۲ چند توزیع از خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ معرفی می‌شود. در بخش ۳ با استفاده از توزیع‌های $G$-توانی[2]، تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی، گشتاورها و تابع مولد گشتاورها، میانگین انحرافات، آنتروپی‌های رنی و شانون و تابع چگالی آماره‌های مرتب خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ محاسبه شده و به صورت فرمول‌های کلی ارائه می‌شوند. در بخش ۴ ویژگی مقادیر کرانگین برای خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ بررسی می‌شود. در بخش ۵ به روش ماکسیمم درستنمایی پارامترها برآورد خواهند شد. در بخش ۶ با یک مجموعه داده واقعی یکی از توزیع‌های خانواده ریستیک-بالاکریشنان-$G$ با چند توزیع طول عمر دیگر مقایسه می‌شود. بخش ۷ هم به نتایج مقاله اختصاص یافته است.

[2]Exponentiated-G (Exp-G)

## ۲ ویژگی‌های خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

در این بخش ابتدا برای آشنایی بیشتر با خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ با در نظر گرفتن تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع‌های نرمال، وایبول، لگ لجستیک و گامبل به ترتیب به جای $g(x)$ و $G(x)$ در رابطه (۱) چهار توزیع از این خانواده توزیع‌ها معرفی می‌شوند.

### ۱.۲ توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نرمال

با در نظر گرفتن توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ به ترتیب به جای $g(x)$ و$G(x)$ در رابطه (۱) تابع چگالی احتمال توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نرمال با پارامترهای $(a, \mu, \sigma)$ به صورت

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\{-\log[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})]\}^{a-1}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma}), \qquad (۴)$$

به دست می‌آید، که درآن $x \in R$ است و $\mu \in R$، $\sigma > 0$، $a > 0$ به ترتیب پارامترهای مکان، اسکالر، شکل و $\phi(.)$ تابع چگالی احتمال و $\Phi(.)$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد هستند. این توزیع با فرض $\mu = 0, \sigma = 1$ به توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نرمال استاندارد و علاوه بر آن با فرض $a = 1$ به توزیع نرمال استاندارد تبدیل می‌شود.

### ۲.۲ توزیع ریستیک-بالاکریشنان-وایبول

تابع توزیع تجمعی توزیع وایبول با پارامترهای $\alpha > 0$، $\beta > 0$، $G(x) = 1 - e^{-(\beta X)^\alpha}$ برای $x > 0$ را در نظر بگیرید، تابع چگالی احتمال توزیع ریستیک-بالاکریشنان-وایبول با پارامترهای $(\alpha, \beta, a)$ به صورت

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha x^{a-1}}{\Gamma(a)}\{-\log[1 - e^{-(\beta x)^a}]\}^{a-1} g(x),$$

است، که در آن $x > 0$، $\alpha > 0$ و $\beta > 0$. توزیع ریستیک-بالاکریشنان-وایبول با فرض $a = 1$ به توزیع نمایی با پارامتر $\beta$ تبدیل می‌شود.

## ۳.۲ توزیع ریستیک-بالاکریشنان-لگ-لجستیک

تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع لگ-لجستیک به ترتیب به صورت زیر

$$G(x) = ۱ - [۱ + (\frac{x}{\alpha})^{\beta}]^{-۱},$$
$$g(x) = \frac{\beta x^{\beta-۱}}{\alpha^{\beta}}[۱ + (\frac{x}{\alpha})^{\beta}]^{-۲}$$

است، که در آن $x > ۰$، $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$. با قرار دادن $g(x)$ و $G(x)$ در رابطه (۱) تابع چگالی احتمال توزیع ریستیک-بالاکریشنان-لگ-لجستیک با پارامترهای $(\alpha, \beta, a)$ به صورت

$$f(x) = \frac{\beta x^{\beta-۱}}{\alpha^{\beta}\Gamma(a)}[۱ + (\frac{x}{\alpha})^{\beta}]^{-۲}\{-\log[۱ - (۱ + (\frac{x}{\alpha})^{\beta})^{-۱}]\}^{a-۱}, \quad x > ۰,$$

به دست می‌آید، که با فرض $a = ۱$ به توزیع لگ لجستیک تبدیل می‌شود.

## ۴.۲ توزیع ریستیک-بالاکریشنان-گامبل

تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال توزیع گامبل با پارامتر مکان $\mu \in R$ و پارامتر مقیاس $\sigma > ۰$ به ترتیب به صورت

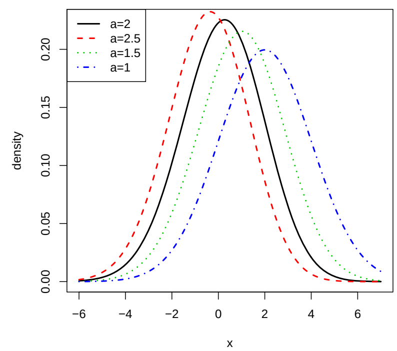
$$G(x) = ۱ - e^{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}},$$
$$g(x) = \frac{۱}{\sigma}e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}},$$

است. میانگین و واریانس توزیع گامبل به ترتیب $\mu - \gamma\sigma$ و $\pi^۲\sigma^۲/۶$ است که $\gamma \approx ۰/۵۷۷۲۲$ ثابت اولر[3] نام دارد. با قرار دادن $g(x)$ و $G(x)$ در رابطه (۱) تابع چگالی احتمال توزیع ریستیک-بالاکریشنان-گامبل با پارامترهای $(\mu, \sigma, a)$ به صورت

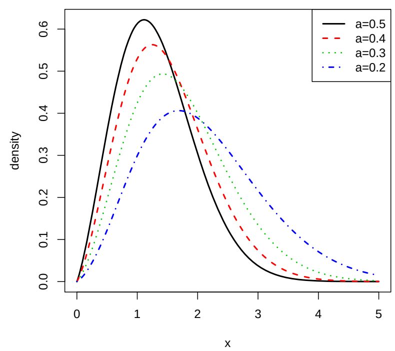
$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\Gamma(a)}e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\{-\log[۱ - e^{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}]\}^{a-۱},$$

[3] Euler's constant

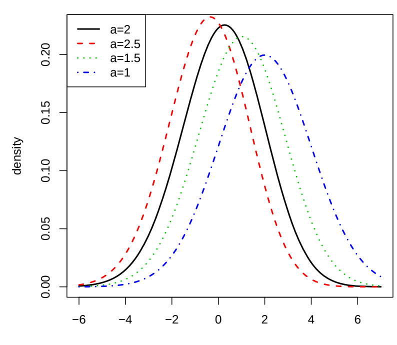
به دست می‌آید، که در آن $x, \mu \in R$ و $a, \sigma > ۰$. با فرض $a = ۱$ توزیع گامبل به دست می‌آید. نمودارهای چهار توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ به ازای مقادیر متفاوت پارامتر شکل در شکل ۱ رسم شده‌اند که نشان دهنده انعطاف‌پذیری این توزیع جدید است.



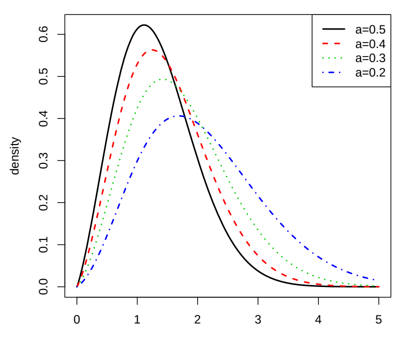

(الف) $(a, \mu, \sigma) = (a, ۲, ۲)$




(ب) $(\alpha, \beta, a) = (۲, ۱, a)$




(ج) $(\alpha, \beta, a) = (۲, ۳, a)$




(د) $(\mu, \sigma, a) = (-۰/۵, ۲, a)$

شکل ۱. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های (الف) ریستیک-بالاکریشنان-نرمال، (ب) ریستیک-بالاکریشنان-وایبول، (ج) ریستیک-بالاکریشنان-لگ-لجستیک و (د) ریستیک-بالاکریشنان-گامبل به ازای مقادیر متفاوت شکل

## ۳ خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

در این بخش چند ویژگی خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ مانند تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی، گشتاورها، تابع مولد گشتاورها، میانگین انحرافات، آنتروپی‌های رنی و شانون و تابع چگالی آماره‌های مرتب به دست آورده می‌شوند.

### ۱.۳ توابع چگالی و توزیع تجمعی خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

برای هر تابع توزیع تجمعی $G(x)$، متغیر تصادفی $X$ را دارای توزیع $G$-توانی با پارامتر $a > ۰$ گویند درصورتی که تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت

$$f_a^*(x) = aG^{a-۱}(x)g(x),$$
$$F_a^*(x) = G^a(x),$$

باشد. مودهولکار و سریواستاوا (۱۹۹۳) توزیع وایبول-توانی، گوپتا و کاندو (۱۹۹۹) توزیع نمایی تعمیم‌یافته، نداراجا ($۲۰۰۵a$) توزیع پارتو-توانی، نداراجا ($۲۰۰۵b$) توزیع گامبل-توانی، نداراجا و گوپتا (۲۰۰۷) توزیع گاما-توانی و کردیرو و همکاران (۲۰۱۳) خانواده‌ای از توزیع‌های توانی را بررسی کردند.

قضیه ۱: (وارد، ۱۹۳۴) برای هر $\delta \in R$ و $|z| < ۱$ داریم:

$$[-\log(۱-z)]^\delta = \sum_{m=۰}^{\infty} \rho_m(\delta) z^{m+\delta},$$

که در آن $\rho_۰(\delta) = ۱$، برای $m \geq ۱$، $\rho_m(\delta) = m\psi_{m-۱}(m+\delta-۱)$ و $\psi_m(.)$ ها چندجمله‌ای‌های استرلینگ به صورت

$$\begin{aligned}\psi_{n-۱}(w) \quad &= \quad \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n+۱)!}[H_n^{n-۱} - \frac{w+۲}{n+۲}H_n^{n-۲} + \frac{(w+۲)(w+۳)}{(n+۲)(n+۳)}H_n^{n-۳} - \cdots \\ &+(-۱)^{n-۱}\frac{(w+۲)(w+۳)\cdots(w+n)}{(n+۲)(n+۳)\cdots(۲n)}H_n^۰],\end{aligned}$$

هستند به طوری که

$$H_0^0 = H_{n+1}^n = 1$$
$$H_{n+1}^m = (2n+m-1)H_n^m + (n-m+1)H_n^{m-1}$$
$$H_{n+1}^0 = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1).$$

با در نظر گرفتن $G(x) = 1 - [1 - G(x)]$ در رابطه (۱) و به کمک قضیه ۱ داریم:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(a-1)(1-G(x))^{a+m-1} g(x), \tag{۵}$$

با استفاده از سری توانی $(1-z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-1)^j z^j$ در رابطه (۵) داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \rho_m(a-1)}{j+1} \binom{m+a-1}{j} [(j+1) G^j(x) g(x)] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j f_{j+1}^*(x), \end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $f_{j+1}^*(x)$ بیان کننده تابع چگالی احتمال توزیع $G$-توانی با پارامتر $a = (j+1)$ و

$$b_j = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \rho_m(a-1)}{j+1} \binom{m+a-1}{j}.$$

است. همچنین تابع توزیع تجمعی متناظر با رابطه (۶) به صورت

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j F_{j+1}^*(x) \tag{۷}$$

است، که در آن $F_{j+1}^*$ تابع توزیع تجمعی توزیع $G$-توانی می‌باشد.

## ۲.۳ گشتاورها و تابع مولد گشتاورهای خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

فرض کنید متغیرهای تصادفی $X$ دارای توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ با پارامتر $a$ و $Y_j$ دارای توزیع $G$-توانی با پارامتر $(j+۱)$ باشند. با استفاده از رابطه (۶) گشتاور مرکزی مرتبه $n$ ام $X$ برابر

$$\mu'_n = E(X^n) = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j E(Y_j^n). \tag{۸}$$

است، که در آن $E(X^n)$ را می‌توان با فرض $U = G(y)$ و با توجه به $Q(.)$ به صورت

$$\mu'_n \;\; = \;\; \sum_{j=۰}^{\infty} b_j \int_{۰}^{۱} (j+۱) u^j (Q(u))^n du \tag{۹}$$

محاسبه کرد. با توجه به رابطه (۹) گشتاورهای چند توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ به دست آورده می‌شوند.

مثال ۸: توزیع وایبول با پارامترهای $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ و با تابع توزیع تجمعی $G(x) = ۱ - e^{-(\beta x)^\alpha}$ را در نظر بگیرید. بنابر این $Y_j$ دارای توزیع وایبول-توانی با پارامتر $j + ۱$ است. در نتیجه داریم:

$$E(Y_j^n) = \frac{(j+۱)!}{\beta^n} \Gamma\left(\frac{n}{\alpha} + ۱\right) \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^i}{i!(j-i)!(i+۱)^{\frac{n}{\alpha}+۱}}$$

به کمک این امید ریاضی و رابطه (۸) گشتاور مرکزی مرتبه $n$ ام توزیع ریستیک-بالاکریشنان وایبول به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mu'_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{\alpha}+۱)}{\beta^n} \sum_{j=۰}^{\infty} \sum_{i=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^i (j+۱)! b_j}{i!(j-i)!(i+۱)^{\frac{n}{\alpha}+۱}}$$

مثال ۹: توزیع گامبل با تابع توزیع تجمعی $G(x) = ۱ - e^{-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}$ را در نظر بگیرید. بنابر این $Y_j$ دارای توزیع گامبل-توانی با پارامتر $(j+۱)$ می‌شود که با توجه به نداراجا و کوتز (۲۰۰۶) داریم:

$$E(Y_j^n) = (j+۱)\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\mu^{n-i}(-\sigma)^i(\frac{\partial}{\partial p})^i\left[(j+۱)^{-p}\Gamma(p)\right]\Big|_{p=۱}.$$

به کمک رابطه (۸) گشتاور مرکزی مرتبه $n$ ام توزیع ریستیک-بالاکریشنان-گامبل برابر است با

$$\mu'_n = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j(j+۱)\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\mu^{n-i}(-\sigma)^i(\frac{\partial}{\partial p})^i\left[(j+۱)^{-p}\Gamma(p)\right]\Big|_{p=۱}.$$

مثال ۱۰: توزیع لجستیک با تابع توزیع تجمعی $G(x) = [۱ + e^{-x}]^{-۱}$ را در نظر بگیرید. بنابراین $Y_j$ دارای توزیع لگ-لجستیک-توانی با پارامتر $(j+۱)$ می‌شود. با توجه به پسکیم و همکاران (۲۰۱۲) و به کمک رابطه (۸) داریم:

$$\mu'_n = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j(\frac{\partial}{\partial t})^n B(t+j+۱, ۱-t)\Big|_{t=۰},$$

که در آن $B(a,b) = \int_۰^۱ t^{a-۱}(۱-t)^{b-۱}dt$ تابع بتا است. اکنون سه فرمول برای محاسبه تابع مولد گشتاورهای خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ ارائه می‌شود. اولین فرمول به صورت

$$M(t) = \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{\mu'_n}{n!}t^n,$$

است، که در آن $\mu'_n$ با استفاده از رابطه (۸) قابل محاسبه است. دومین فرمول با توجه به رابطه (۸) به صورت

$$M(t) = \sum_{j=۰}^{\infty} b_j M_{j+۱}(t),$$

است، که درآن $M_{j+۱}(t)$ تابع مولد گشتاور توزیع $Exp-G(j+۱)$ است. با استفاده از رابطه (۸)

سومین فرمول به صورت

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) b_j s(t,j), \tag{10}$$

است، که در آن

$$s(t,j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} G^a(x) g(x) dx,$$

و با استفاده از رابطه $Q(u) = G^{-1}(u)$ به صورت

$$s(t,j) = \int_0^1 e^{tQ(u)} u^a du. \tag{11}$$

تبدیل می‌شود. اکنون با در نظر گرفتن توزیع‌های نمایی با پارامتر $\lambda$، لجستیک استاندارد (با تابع توزیع تجمعی $F(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$) و پارتو (با تابع توزیع تجمعی $G(x) = 1 - (1+x)^{-\nu}$) به جای $G$ در خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$، تابع مولد گشتاورهای توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-نمایی، ریستیک-بالاکریشنان-لجستیک و ریستیک-بالاکریشنان-پارتو به ترتیب برابر است با

$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B(j+1, 1 - \lambda^{-1} t),$$
$$M(t) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j B(j+t+1, 1-t),$$
$$M(t) = e^{-t} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_j t^r}{r!} B(j+1, 1 - r\nu^{-1}).$$

## ۳.۳ میانگین انحرافات خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

اگر $X$ متغیری تصادفی با توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ باشد، آن‌گاه میانگین‌های انحراف از میانگین و میانه به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}
\delta_1(x) &= E|X-\mu'_1| = 2\mu'_1 F(\mu'_1) - 2T(\mu'_1),\\
\delta_2 &= E|X-M| = \mu'_1 - 2T(M), \qquad (۱۲)
\end{aligned}$$

است، که در آن $\mu'_1 = E(X)$ و $M$ میانه توزیع $X$ است و از رابطه $F(M) = 0.5$ به دست می‌آید. با فرض $T(z) = \int_{-\infty}^{z} xf(x)dx$ و با توجه به رابطه (۶) داریم:

$$T(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)b_j T_{j+1}(z), \qquad (۱۳)$$

که در آن $T_{j+1}(z) = \int_{-\infty}^{z} x[G(x)]^j g(x)dx$ و با تغییر متغیر $u = G(x)$ و $Q(u) = G^{-1}(u)$ به صورت

$$T_{j+1}(z) = \int_{0}^{G(z)} u^j Q(u)du. \qquad (۱۴)$$

تبدیل می‌شود. با محاسبه $T_{j+1}(z)$ به راحتی می توان میانگین‌های انحراف از میانگین و میانه را برای هر توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ به دست آورد. به عنوان مثال برای توزیع های ریستیک-بالاکریشنان-نمایی، ریستیک-بالاکریشنان-رایلی و ریستیک-بالاکریشنان-پارتو به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
T_{j+1}(z) &= \lambda^{-1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{[1-e^{-\lambda z}]^{r+j+1}}{r(r+j+1)},\\
T_{j+1}(z) &= \sigma\sqrt{2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\rho_r(0.5)}{r+j+3.5}(1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}})^{r+j+3.5},\\
T_{j+1}(z) &= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{r+j+1}{k}\Gamma(r+\nu^{-1})(-1)^{r+k}}{\Gamma(\nu^{-1})(r+j+1)r!}(1+z)^{-\nu k}.
\end{aligned}$$

البته یک فرمول دیگر نیز می توان به کمک رابطه (۶) به صورت

$$T(z) = \int_{-\infty}^{z} x f(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} b_j J_{j+1}(z), \tag{۱۵}$$

به دست آورد، که در آن رابطه

$$J_{j+1}(z) = \int_{-\infty}^{z} x f_{j+1}^{*}(x) dx. \tag{۱۶}$$

نقش اساسی در محاسبه میانگین انحرافات خانواده توزیع های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ دارد که توزیع‌های $G$-توانی نقش عمده‌ای در محاسبه آن‌ها ایفا می‌کنند. برای مثال توزیع ریستیک-بالاکریشنان-رایلی را در نظر بگیرید. در این حالت توزیع $G$-توانیی با پارامتر $(j+1)$ با تابع چگالی احتمال

$$f_{j+1}^{*}(x) = (j+1)\sigma^{-2} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} (1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})^{j}, \quad x > 0.$$

داریم. در نتیجه

$$J_{j+1}(z) = (j+1)\sigma^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{j}{k} \int_{0}^{z} x^2 e^{-\frac{(j+1)x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

با استفاده از تابع گامای ناقص $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ داریم:

$$J_{j+1}(z) = \sigma\sqrt{2}(j+1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \gamma(1/5, \frac{(j+1)z^2}{2\sigma^2}).$$

با استفاده از روابط (۱۳) تا (۱۶) می‌توان منحنی‌های بن‌فرونی و لورنز [4] را به دست آورد. به این صورت که برای هر احتمال مشخص $(p)$ داریم:

$$B(p) = \frac{T(q)}{p\mu_1'}, \quad L(p) = \frac{T(q)}{\mu_1'}.$$

[4] Bonferroni and Lorenz curves

که در آن $\mu'_1 = E(X)$ و $q = F^{-1}(p)$.

## ۴.۳ آنتروپی‌های رنی و شانون خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

برای متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی $f(x)$ آنتروپی رنی به صورت

$$I(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}\log\{\int_{-\infty}^{\infty}(f(x))^{\gamma}dx\}, \quad \gamma \neq 1, \gamma > 0$$

تعریف می‌شود. چون

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\gamma}(x)dx = (\frac{1}{\Gamma(a)})^{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} g^{\gamma}(x)[-\log G(x)]^{\gamma(a-1)}dx.$$

با استفاده از قضیه ۱ و سری توانی $(1-z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{\alpha}{j}(-1)^{j}z^{j}$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\gamma}(x)dx = (\frac{1}{\Gamma(a)})^{\gamma} \times \sum_{m,j=0}^{\infty} \rho_m(\gamma(a-1))\binom{m+\gamma(a-1)}{j}(-1)^{j}I_j(\gamma), \quad (17)$$

که در آن $I_j(\gamma) = \int_0^1 u^j g^{\gamma-1}(Q(u))du$ و با محاسبه آن می‌توان برای هر توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ آنتروپی رنی را تعیین کرد. برای مثال برای توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-نمایی، ریستیک-بالاکریشنان-رایلی و ریستیک-بالاکریشنان-پارتو به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
&I_j(\gamma) = \lambda^{\gamma-1}B(j+1,\gamma),\\
&I_j(\gamma) = (\sqrt{2}\sigma^{-1})^{\gamma-1}\sum_{m=0}^{\infty}\rho_m(\frac{\gamma-1}{2})B(m+j+\frac{\gamma-1}{2},\gamma),\\
&I_j(\gamma) = \nu^{\gamma-1}B(j+1,\gamma+\nu^{-1}(\gamma-1)).
\end{aligned}$$

آنتروپی شانون (شانون، ۱۹۵۱) برای یک توزیع با تابع چگالی احتمال $f(x)$ به صورت $E(-\log f(X))$ تعریف می‌شود. بنابر این برای متغیر تصادفی $X$ با تابع چگالی احتمال (۱) داریم:

$$E(-\log f(X)) \;=\; \log(\Gamma(a)) - (a-1)E\{\log[-\log G(X)]\} - E[\log(g(X))]$$

$$\begin{aligned} &= \log(\Gamma(a)) - E[\log(g(X))] \\ &- \frac{a-1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \Gamma(a+r) \end{aligned} \tag{18}$$

## ۵.۳ آماره‌های مرتب خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$

آماره‌های مرتب در بسیاری از مسائل آماری مانند تشخیص نقاط دور افتاده، آزمون‌های نیکویی برازش، تحلیل قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت کاربرد دارند. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از یک توزیع پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و $X_{1:n}, \cdots, X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر این نمونه باشد. تابع چگالی آماره ترتیبی $i$ ام $(X_{i:n})$ به صورت

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i},$$

است، که در آن $B(\cdot,\cdot)$ تابع بتا است. با استفاده از بسط دوجمله‌ای در رابطه اخیر داریم:

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} (F(x))^{i+j-1} \tag{19}$$

با توجه به رابطه (گرادشتین و ریزهیک، ۲۰۰۷)

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k,n} x^k, \tag{20}$$

که در آن $d_{k,n}$ ها در روابط

$$\begin{aligned} d_{0,n} &= a_0^n, \\ d_{k,n} &= (k a_0)^{-1} \sum_{m=1}^{k} [m(n+1) - k] a_m d_{k-m,n}, \quad k = 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{21}$$

صدق می‌کنند و همچنین به کمک رابطه (۷) داریم:

$$[F(x)]^{i+j-1} = (\sum_{r=0}^{\infty} b_r (G(x))^r)^{i+j-1} = \sum_{r=0}^{\infty} d_{r,i+j-1} (G(x))^r, \qquad (۲۲)$$

که در آن $d_{0,i+j-1} = b_0^{i+j-1}$ و

$$d_{r,i+j-1} = (kb_0)^{-1} \sum_{m=1}^{k} [(i+j)m - r] b_m d_{r-m,i+j-1}.$$

با جایگذاری رابطه (۲۲) در رابطه (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{g(x)}{B(i,n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \sum_{u,v=0}^{\infty} b_u^* d_{u,i+j-1} [G(x)]^{u+v} \\ &= \frac{1}{B(i,n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \{ \binom{n-i}{j} \\ &\times \sum_{u,v=0}^{\infty} w_{u,v}^* d_{u,i+j-1} [(u+v+1)(G(x))^{u+v} g(x)] \}, \end{aligned}$$

که در آن $b_u^* = (u+1)b_u$ و $w_{u,v}^* = b_u^*/(u+v+1)$ است.

## ۴ مقادیر کرانگین

اگر $\bar{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۱) باشد. آنگاه تحت شرایط مناسب، توزیع حدی $\sqrt{n}\left(\bar{X} - E(X)\right) / \sqrt{Var(X)}$ در حالت $n \to \infty$ توزیع نرمال استاندارد است. در این بخش بررسی می‌شود که آیا خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ می‌تواند متعلق به توزیع‌های مقدار کرانگین [5] یعنی توزیع‌های $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ و $m_n = \min(X_1, \cdots, X_n)$ وقتی که $n \to \infty$ باشد. لیدبتر و همکاران (۱۹۸۳) نشان دادند توزیع‌های مقدار کرانگین، توزیع‌های گامبل، فرچت و وایبول هستند. ابتدا برای $M_n$ به صورت زیر عمل می‌شود. اگر $G$ توزیع گامبل باشد.

[5] Extreme

آن‌گاه با توجه به لیدبتر و همکاران (۱۹۸۳) تابع مثبت $h(t)$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-G(t+xh(t))}{1-G(t)}=e^{-x},\quad x\in(-\infty,\infty).$$

با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(t+xh(t))}{1-F(t)} &= \lim_{t\to\infty}\frac{[1+xh'(t)]f(t+xh(t))}{f(t)} &&(۲۳)\\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{[1+xh'(t)]g(t+xh(t))}{g(t)}\Big[\frac{\log G(t+xh(t))}{\log G(t)}\Big]^{a-1} &&(۲۴)\\ &= e^{-ax},\quad x\in(-\infty,\infty)\end{aligned}$$

بنابر این $F$ به توزیع‌های کرانگین (توزیع گامبل) تعلق دارد و ثابت‌های $a_n>0$ و $b_n$ (لیدبتر و همکاران، ۱۹۸۳) طوری پیدا می‌شوند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}P(a_n(M_n-b_n)\le x)=e^{-e^{-ax}}.$$

فرض کنید $G$ توزیع فرچت باشد. با توجه به لیدبتر و همکاران (۱۹۸۳) یک $\beta>0$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-G(tx)}{1-G(t)}=x^{\beta},\quad x>0.$$

با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{xf(tx)}{f(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{xg(tx)}{g(t)}\Big[\frac{\log G(tx)}{\log G(t)}\Big]^{a-1}=x^{a\beta},\quad x>0.$$

بنابراین $F$ به توزیع‌های کرانگین (توزیع فرچت ) تعلق دارد و ثابت‌های $a_n>0$ و $b_n$ (لیدبتر و همکاران، ۱۹۸۳) طوری پیدا می‌شوند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty}P(a_n(M_n-b_n)\le x)=e^{-x^{a\beta}}.$$

در نهایت فرض کنید $G$ توزیع وایبول باشد. آن‌گاه با توجه به لیدبتر و همکاران (۱۹۸۳) یک $\alpha > ۰$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(tx)}{G(t)} = x^{\alpha}, \quad x < ۰.$$

است. با استفاده از قاعده هوپیتال داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} &= \lim_{t\to-\infty} \frac{xf(tx)}{f(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{xg(tx)}{g(t)} \\ &\times [\frac{\log G(tx)}{\log G(t)}]^{a-۱} = x^{a\alpha}, \quad x < ۰. \end{aligned} \tag{۲۵}$$

بنابر این $F$ به توزیع‌های کرانگین (توزیع وایبول) تعلق دارد و ثابت‌های $a_n > ۰$ و $b_n$ (لیدبتر و همکاران، ۱۹۸۳) طوری پیدا می‌شوند به طوری که

$$\lim_{n\to\infty} P(a_n(M_n - b_n) \leq x) = e^{--x^{a\alpha}}.$$

بنابر این $F$ متعلق به توزیع‌های مقدار کرانگین $M_n$ است. برای $m_n$ به همین روش عمل می‌شود.

## ۵ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۱) و $\Theta$ یک بردار $q$ بعدی پارامترها باشند. لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \log L &= \log L(a,\Theta) = \sum_{i=۱}^{n} \log g(x_i) - (a-۱)\log[-\log G(x_i)] \\ &-n\log\Gamma(a). \end{aligned}$$

مشتق‌های مرتبه اول آن نسبت به پارامترهای $a, \Theta$ عبارتند از:

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \log[-\log G(x_i)] - n\psi(a),$$
$$\frac{\partial \log L}{\partial \Theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(x_i)/\partial \boldsymbol{\Theta}}{g(x_i)}. - (a-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G(x_i)/\partial \boldsymbol{\Theta}}{G(x_i)\log G(x_i)}$$

که در آن $\psi(a) = d\log\Gamma(a)/da$. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی $(\hat{a}, \hat{\Theta})$ از معادلات

$$\partial \log L/\partial a = 0, \quad \partial \log L/\partial \Theta = \mathbf{0}$$

به دست می‌آیند.

## ۶ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش توزیع‌هایی به داده‌های مربوط به فواصل زمانی زمین لرزه‌های متوالی رخ داده ( بر حسب ماه ) در ایران از سال ۱۳۷۰ تا ۱۳۹۰ برازنده می‌شوند و توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نمایی-توانی [۶] که همان توزیع نمایی گاما-توانی[۷] (ریستیک و بالاکریشنان، ۲۰۱۲) است، با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\alpha,\beta,c) = \frac{\alpha^c \beta e^{-\beta x}}{\Gamma(c)} \left(1 - e^{-\beta x}\right)^{\alpha-1} \left[-\log\left(1 - e^{-\beta x}\right)\right]^{c-1},$$

است، که در آن $x > 0, \alpha, \beta > 0$، با توزیع‌های مارشال-الکین وایبو [۸]، نمایی-لگاریتمی[۹]، نمایی تعمیم‌یافته-لگاریتمی[۱۰] و عکس گوسی[۱۱] به ترتیب با تابع‌های چگالی احتمال

$$f(x,\alpha,\beta,\theta) \quad = \quad \frac{\alpha\theta\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha}}{\left[1-(1-\theta)e^{-(\beta x)^\alpha}\right]^2}, \quad x > 0, \alpha, \beta > 0, 0 < \theta < 1$$

[6] Ristic-Balakrishnan-Exponentiated-Exponential (RBEE)
[7] Gamma-Exponentiated Exponential
[8] Marshall-Olkin Weibull (MOW)
[9] Exponential-Logarithmic (EL)
[10] Generalized Exponential-Logarithmic (GEL)
[11] Inverse Gaussian (IG)

$$
\begin{aligned}
f(x,\beta,\theta) &= -\frac{۱}{\log\theta}\frac{\beta(۱-\theta)e^{-\beta x}}{۱-(۱-\theta)e^{-\beta x}}, \quad x>۰,\beta>۰,۰<\theta<۱ \\
f(x;\alpha,\beta,\theta) &= \frac{\alpha\beta(۱-\theta)e^{-\beta x}}{-\log\theta}\left(۱-e^{-\beta x}\right)^{\alpha-۱} \\
&\quad \times\left\{۱-(۱-\theta)\left[۱-\left(۱-e^{-\beta x}\right)^{\alpha}\right]\right\}^{-۱}, \\
&\quad x>۰,\alpha,\beta>۰,۰<\theta<۱ \qquad (۲۶)\\
f(x;\alpha,\beta) &= \sqrt{\left(\frac{\alpha}{۲\pi x^{۳}}\right)}e^{-\frac{\alpha(x-\beta)^{۲}}{۲x\beta^{۲}}}, \quad x>۰,\alpha,\beta>۰ \qquad (۲۷)
\end{aligned}
$$

مقایسه می‌شوند. این داده‌ها از پژوهشگاه بین المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله ایران[۱۲] گرفته شده که بر حسب فواصل زمانی (ماه) عبارتند از:

۵۴/۴، ۵۷/۳۹، ۹۷/۳، ۴۷/۳۱، ۸/۰، ۳۳/۲، ۵۳/۳۷، ۶/۱۲، ۵۳/۵، ۰۷/۵، ۸/۸، ۱۷/۹

از این مجموعه داده‌ها، طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) در برازش توزیع نمایی-لگاریتمی و بابازاده و همکاران (۲۰۱۲) در برازش توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی استفاده کردند. بر اساس این مجموعه داده‌ها پارامترهای توزیع‌ها به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد می‌شوند، سپس به‌کمک معیارهای اطلاع آکائیک[۱۳]، اطلاع بیزی[۱۴]، اطلاع آکائیک سازگار[۱۵] و اطلاع هانان-کوئین[۱۶] که به صورت

$$
\begin{aligned}
&AIC=-۲\ell(\hat{\Theta})+۲k, \\
&BIC=-۲\ell(\hat{\Theta})+k\log(n), \\
&HQIC=-۲\ell(\hat{\Theta})+۲k\log(\log(n)), \\
&CAIC=-۲\ell(\hat{\Theta})+\frac{۲kn}{n-k-۱}. \qquad (۲۸)
\end{aligned}
$$

تعریف می‌شوند مدلی انتخاب می‌شود که دارای این معیارهای کوچکتری باشد. در رابطه (۲۸)، $\ell(\hat{\Theta})$ مقدار عدی لگاریتم تابع درستنمایی به ازای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها، $k$ تعداد پارامترها، $n$ حجم نمونه و $\Theta$ بردار پارامترها است.

---

[12]http://www.iiees.ac.ir
[13]Akaike information criterion (AIC)
[14]Bayesian information criterion (BIC)
[15]Consistent Akaike information criterion (CAIC)
[16]Hannan-Quinn information criterion (HQIC)

در جدول ۱ برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه و مقدار معیارهای اطلاع اشاره شده آمده است. این مقادیر نشان می‌دهد که توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نمایی-توانی در مقایسه با مدل‌های دیگر برازش بهتری به داده‌ها دارد.

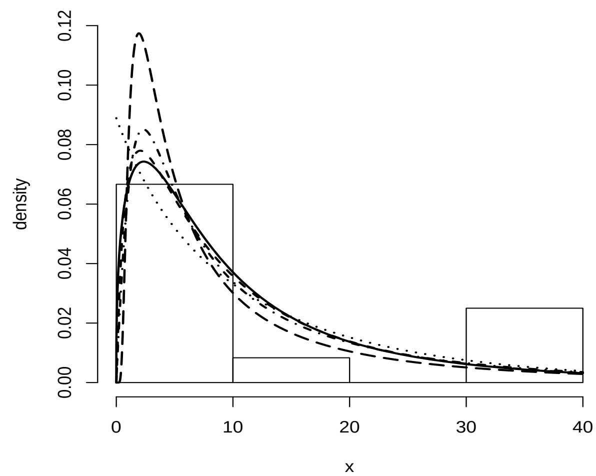
**جدول ۱.** برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و مقادیر ملاک‌های ارزیابی برای داده‌های زمین لرزه

| توزیع | پارامتر | برآورد | ملاک‌های ارزیابی | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | AIC | BIC | CAIC | HQIC |
| | $\alpha$ | ۳۳۹/۵ | | | | |
| RBEE | $\beta$ | ۰۰۰۱/۰ | ۶۵/۹۶ | ۳۴/۹۸ | ۲۱/۹۹ | ۳۰/۹۶ |
| | c | ۰۰۸/۳۶ | | | | |
| | $\alpha$ | ۷۶۸/۰ | | | | |
| MOW | $\beta$ | ۳۶۸/۱ | ۸۳/۱۰۱ | ۵۲/۱۰۳ | ۷۲/۱۰۶ | ۴۸/۱۰۱ |
| | $\theta$ | ۰۳۲/۰ | | | | |
| | $\beta$ | ۰۶۳/۰ | | | | |
| EL | | | ۵۰/۹۹ | ۱۸/۱۰۰ | ۲۵/۱۰۰ | ۸۲/۹۸ |
| | $\theta$ | ۵۲۵/۰ | | | | |
| | $\alpha$ | ۹۵۳/۱ | | | | |
| GEL | $\beta$ | ۰۵۳/۰ | ۴۳/۱۰۰ | ۱۷/۱۰۰ | ۹۴/۱۰۵ | ۷۰/۱۰۰ |
| | $\theta$ | ۰۱۹/۰ | | | | |
| | $\alpha$ | ۹۳۲/۵ | | | | |
| IG | | | ۹۲/۹۹ | ۰۵/۱۰۱ | ۱۲/۱۰۱ | ۶۹/۹۹ |
| | $\beta$ | ۴۴۸/۱۳ | | | | |

شکل۲ نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های مورد مقایسه نیز بیان‌کننده همین امر است.

همچنین به کمک این مجموعه داده‌ها، آماره‌های آزمون کرامر-ون میس، اندرسن و دارلینگ، واتسن، کولموگوروف-اسمیرنوف و لیائو-شیموکاو که به صورت

$$\begin{aligned}
W_n^2 &= \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}[F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}) - \frac{2i-1}{2n}]^2. \\
U_n^2 &= W_n^2 + \sum_{i=1}^{n}[\frac{F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})}{n} - \frac{1}{2}]^2. \\
A_n^2 &= -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)[\log(F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})) \\
&\quad + \log(1 - F_{GPD}(x_{n+i-1};\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}))]^2. \\
D_n &= \max_i[\frac{i}{n} - F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}), F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}) - \frac{i-1}{n}].
\end{aligned}$$




شکل ۲. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-نمایی-توانی (خط ممتد)، مارشال-الکین وایبول (خط‌چین)، نمایی-لگاریتمی (نقطه‌چین)، نمایی تعمیم‌یافته-لگاریتمی (خط‌نقطه‌چین) و عکس گوسی (نیم‌خط‌چین)

$$L_n \quad = \quad \frac{۱}{\sqrt{n}}\sum_{i=۱}^{n}\frac{\max_i[\frac{i}{n}-F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda}),F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})-\frac{i-۱}{n}]}{\sqrt{F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})[۱-F_{GPD}(x_i;\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\lambda})]}}$$

تعریف می‌شوند (الزهرانی، ۲۰۱۲؛ عبدالفتاح، ۲۰۱۱)، محاسبه شده و در جدول ۲ آمده است. با توجه به این مقادیر توزیع ریستیک-بالاکریشنان-نمایی-توانی برازش بهتری به داده‌ها نسبت به سایر مدل‌ها دارد.

**جدول ۲.** آماره‌های آزمون نیکویی برازش برای داده‌های زمین لرزه

| توزیع‌ها | آماره‌ها | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | کرامر-ون میسس | واتسن | کولموگوروف-اسمیرنوف | لیائو-شیموکاوا | آندرسن-دارلینگ |
| RBEE | ۰۳۸/۰ | ۷۲۹/۲ | ۱۳۰/۰ | ۴۳۰/۰ | ۲۸۰/۰ |
| MOW | ۰۳۹/۰ | ۸۰۰/۲ | ۱۴۹/۰ | ۵۵۶/۰ | ۲۹۵/۰ |
| EL | ۰۵۰/۰ | ۸۲۶/۲ | ۰۱۳۱/۰ | ۴۴۱/۰ | ۳۲۹/۰ |
| GEL | ۰۳۸/۰ | ۸۰۹/۲ | ۱۳۳/۰ | ۴۸۰/۰ | ۲۸۳/۰ |
| IG | ۰۶۰/۰ | ۷۹۶/۲ | ۱۵۵/۰ | ۸۴۹/۰ | ۴۵۲/۰ |

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان-$G$ مورد بررسی قرار گرفته و فرمول‌های کلی برای محاسبه گشتاورها، تابع مولد گشتاورها، تابع چگالی آماره‌های مرتب، میانگین انحرافات و آنتروپی‌های رنی و شانون ارائه شد. همچنین نتیجه گرفته شد که خانواده توزیع‌های ریستیک-بالاکریشنان دارای ویژگی مقادیر گرانکین نیز است. پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی برآورد شدند و به کمک یک مجموعه داده واقعی، یک توزیع ریستیک-بالاکریشنان-$G$ با چند توزیع دیگر مقایسه شده و نشان داده شد که این توزیع نسبت به توزیع‌های مورد مقایسه برازش بهتری به داده‌ها دارد. بنابر این به نظر می‌رسد که خانواده توزیع‌های ریستیک - بالاکریشنان می‌تواند مدل مناسبی برای طول عمر باشد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر، داوران و ویراستار مجله به خاطر نظرات ارزنده‌شان برای بهتر شدن مقاله نهایت تشکر را دارند.

## مراجع

Abd-Elfattah, A. M. (2011), Goodness of Fit Test for the Generalized Rayleigh Distribution with Unknown Parameters, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 357-366.

Alexander, C., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and Sarabia, J. M. (2012), Generalizeb Beta-Generated Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 1880-1897.

Al-Zahrani, B. (2012), Goodness-of-Fit for the Topp-Leone Distribution with Unknown Parameters, *Applied Mathematical Sciences*, **6**, 6355-6363.

Babazadeh, M., Rezaee, S. and Abdi, M. (2012), A New Generalized Exponential-Logarithmic Lifetime Distribution, *Journal of Statistical Sciences*, **6**, 1-20.

Cordeiro, G. M. and de Castro, M. (2011), A New Family of Generalized Distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 883-898.

Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and da Cunha, D. C. C. (2013), The Exponentiated Generalized Class of Distributions, *Journal of Data Science*, **11**, 1-27.

Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F. (2002), Beta-Normal Distribution and Applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **31**, 497-512.

Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distributions, *Australian New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2007), *Tables of Integrals, Series and Products (7th ed.)*, San Diago, Academic Press.

Kumaraswamy, P. (1980), Generalized Probability Density-Function for Double-Bunded Random Processes, *Journal of Hydrology*, **46**, 79-88.

Leadbetter, M. R., Lindgren, G. and Rootzén, H. (1983), *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York: Springer Verlag. it

McDonald, J. B. (1984), Some Generalized Functions for the Size Distributions of Income, *Econometrica*, **52**, 647-663.

Mudholkar, G. S. and Srivastava, D. K. (1993), Exponential Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-rate Data, *IEEE Translations on Reliability*, **42**, 299-302.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.

Ng, K. W. and Kotz, S. (1995), Kummer-Gamma and Kummer-Beta Univariate and Multivariate Distributions, *Research Report*, 84, Department of Statistics, The University of Hong Kong, Hong Kong.

Nadarajah, S. (2005a), Exponentiated Pareto Distributions, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*,**39**, 255-260.

Nadarajah, S. (2005), The Exponentiated Gumbel Distribution with Climate Application, *Environ-metrics*, **17**, 13-23.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006), The Exponentiated Type Distributions, *Acta Applicanda Mathematicae*, **92**, 97-111.

Nadarajah, S. and Gupta, A. K. (2007), The Exponentiated Gamma Distribution with Application to Drought Data, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **59**, 29-54.

Nadarajah, S., Cordeiro, G. M. and Ortega, E. M. M. (2015), The Zografos-Balakrishnan-$G$ Family Distributions: Mathematical Properties and Applications, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**, 186-215.

Pescim, R. R., Cordeiro, G. M., Demétrio, C. G. B., Ortega, E. M. M. and Nadarajah, S. (2012), The New Class of Kummer Beta Generalized Distributions, *SORT: Statistics and Operations Research Translations*, **32**, 153-180.

Ristić, R. R. and Balakrishnan, N. (2012), The Gamma Exponentiated Exponentiatial Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**, 1191-1206.

Shanon, C. E. (1951), Prediction and Entropi of Printed English, *Bell System Technical Journal*, **30**, 50-64.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.

Ward, M. (1934), The Representation of Sterling's Numbers and Sterling's Polynomials as Sums of Factorial, *American Journal Mathematical*, **56**, 87-95.

Zografos, K. and Balakrishnan, N. (2009), On Families of Beta- and Generalized Gamma-Generated Distributions and Associated Inference, *Statistical Methodology*, **6**, 344-362.