مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۸
جلد ۱۳، شماره ۱، ص ۱۵ – ۳۸
DOI: 10.29252/jss.13.1.15

بررسی تأثیر نوسانات درآمدی بر اولویت‌های فرهنگی و غیرفرهنگی خانوارهای شهری و روستایی با استفاده از تابع مفصل

مریم آهنگری، صدیقه شمس

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۲۰   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

چکیده: یکی از راهکارهای عملی در پیشبرد سیاست‌های اقتصادی، همراهی مردم، بالا بردن سطح آگاهی جامعه و مردمی‌سازی اقتصاد است. سیاست‌های اقتصادی و اجتماعی، زمانی به بهترین صورت تحقق می‌یابند که مردم آگاهی لازم را درخصوص آمارهای موجود، کسب کرده باشند. شاخص‌های اقتصادی نرخ، قیمت و درصد، به‌تنهایی آگاهی‌بخش نیستند. به این دلیل، یکی از روش‌های علمی برای مطالعه‌ی داده‌های اقتصادی، مدل‌بندی آماری آن‌ها با استفاده از ابزار پرکاربرد «توابع مفصل» است. در این مقاله با استفاده از توابع مفصل و مفهومی پرکاربرد از وابستگی بین متغیرهای مورد مطالعه، تحت عنوان «وابستگی جهتی»، میزان وابستگی بین تغییرات درآمدی خانوار با هزینه‌ای که صرف خرید محصولات فرهنگی و محصولات متفرقه می‌کنند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که خانوارهای ایرانی با کاهش درآمد، تمایل بیشتری به کاهش هزینه خرید محصولات فرهنگی تا سایر هزینه‌های مصرفی غیرضروری دارند.

واژه‌های کلیدی: .تابع مفصل، مشاهده‌نما، آزمون نیکویی برازش، نمودار کندال، وابستگی جهتی

۱ مقدمه

سیاست‌های اقتصادی و اجتماعی تنها زمانی بهترین نتیجه را می‌دهند که مردم آگاه باشند و در پیشبرد آن همکاری کنند. در این زمینه، نقش‌های اصلی را آمار و رسانه‌های اقتصادی بر عهده دارند. برای این‌که مردم

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مریم آهنگری، maryam.ahangari@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P20،

درست تصمیم بگیرند و در پیشبرد اقتصادی همکاری کنند، باید هم اوضاع اقتصادی کشور را بدانند و هم با یافته‌های دانش اقتصاد آشنا شوند. بنابراین باید تلاش شود که موضوعات اقتصادی با زبانی ساده انتشار یابند (دادخواه، ۱۳۹۳). گسترش آگاهی عمومی، در حقیقت از اولویت‌ها و بلکه پیش‌نیازهای توسعه قلمداد می‌شود. براساس مطالعات و واکاوی‌های تجربی، آن‌چه کشورهای توسعه نیافته را از کشورهای توسعه یافته تمایز می‌دهد، عنصر «آگاهی عمومی» است، به بیان دیگر، یکی از مهم‌ترین دلایل توسعه نیافتگی، ضعف آگاهی عمومی در نتیجه کمبود مطالعه است (محمودی، ۱۳۹۳). اکثر افراد، تنگناهای اقتصادی و ضرورت پاسخگویی به نیازهای اولیه خانواده را به عنوان عامل اصلی کم توجهی مردم به کالاهای فرهنگی عنوان می‌کنند، اما از آن‌جا که بین قیمت کالاهای فرهنگی و کالاهای مصرفی غیرضروری هیچ مقایسه‌ای وجود ندارد و کالاهای فرهنگی از قبیل کتاب و نشریه هنوز نسبت به سایر کالاها، قیمت نسبتاً پایینی دارند، این دیدگاه نمی‌تواند قانع‌کننده باشد، باید ریشه این مسأله را در عوامل دیگری از جامعه تا خانواده‌ها جست‌وجو کرد. کوچک‌ترین اما مهم‌ترین نهاد اجتماعی، یعنی «خانواده» عامل اساسی در گسترش و ترویج فرهنگ و استفاده از کالاهای فرهنگی محسوب می‌شود. خانواده در هر شرایطی می‌تواند با مدیریت مالی صحیح، هزینه لازم را برای خرید کالاهای فرهنگی اختصاص دهد (عابری، ۱۳۸۶). در این مقاله سعی شده با استفاده از مفهوم تابع مفصل و وابستگی جهتی نشان داده شود که خانوارهای ایرانی با کاهش درآمد تمایل به کاهش هزینه خرید کتاب و سایر محصولات فرهنگی دارند تا کم کردن هزینه‌های مصرفی غیرضروری. در این راستا، یکی از متداول‌ترین روش‌های مدل‌بندی داده‌های آماری و اقتصادی در یک قالب مشخص، استفاده از مفهوم تابع مفصل[1] است. مفصل‌ها به منظور مدل‌بندی توزیع‌های چندمتغیری با توابع حاشیه‌ای مختلف به‌کار می‌روند.

هدف اصلی این مقاله به‌کارگیری توابع مفصل و مفهوم وابستگی جهتی در تعیین ارتباط بین درآمد خانوارهای شهری و روستایی ایرانی با هزینه‌های مصرفی می‌باشد. در این تحقیق به این سوال پاسخ داده خواهد شد که با کاهش سطح درآمد، خانواده‌های شهری و روستایی در کدام‌یک از هزینه‌های خود صرفه‌جویی به عمل می‌آورند: کاهش هزینه‌های فرهنگی یا کاهش هزینه‌های غیرضروری؟ در این مقاله در بخش ۲، مفهوم تابع مفصل و آماره آزمون استقلال و نیکویی برازش متغیرهای مورد مطالعه و نیز نمودارهای ناپارامتری به منظور تحلیل گرافیکی داده‌ها و وابستگی دمی ارائه می‌شود. خلاصه‌ای از مفهوم وابستگی جهتی در بخش ۳ ارائه شده است. کاربرد نمودارهای کای و کندال و نیز نمودار پراکنش در فراهم آوردن حدس اولیه در انتخاب تابع مفصل و آزمون نیکویی برازش در مدل‌بندی مفصل‌ها به منظور تعیین

[1] Copula function

وابستگی جهتی درآمد و هزینه خانوار در بخش ۴ مطرح می‌شود. در بخش ۵ نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ تابع مفصل و آماره آزمون نیکویی برازش

تعریف ۱: فرض کنید $(X_1, \ldots, X_d)' \in R^d$ برداری تصادفی باشد که تابع توزیع تجمعی توأم به صورت $F(X_1, \ldots, X_d) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_d \leq x_d)$ و برای هر $1 \leq k \leq d$ دارای توزیع حاشیه‌ای به صورت $F_k(x_k) = P(X_k \leq x_k)$ باشد. تابع مفصل C به عنوان یک تابع توزیع تجمعی برای F با تکیه‌گاهی روی $[0,1]^d$ تعریف می‌شود، به‌گونه‌ای که:
۱) برای هر $u \in [0,1]^d$ ، $C(\mathbf{u}) = 0$ است، هرگاه حداقل یکی از مولفه‌های u برابر صفر باشد و $C(\mathbf{u_k}) = u_k$ است، هرگاه تمام مولفه‌های u به غیر از u_k برابر با یک باشند .
۲) برای هر $a, b \in [0,1]^d$ ، به‌گونه‌ای که $a \leq b$ ، $V_C([a,b]) \geq 0$.

قضیه ۱: (اسکلار، ۱۹۵۹): اگر $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ برداری تصادفی با تابع توزیع توأم d بعدی و توابع توزیع حاشیه‌ای $F_1, \ldots, F_d$ باشد، دراین‌صورت تابع مفصل C با توابع توزیع حاشیه‌ای یکنواخت وجود دارد، به‌گونه‌ای که $F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_d))$.

به بیان دیگر، تابع مفصل را می‌توان به صورت نگاشتی از $C : [0,1]^d \to [0,1]$ تعریف کرد، به‌طوری‌که توابع توزیع حاشیه‌ای آن در $[0,1]$ یکنواخت هستند (کوسادا مولینا، ۲۰۰۳). با توجه به قضیه اسکلار، نمایش تابع توزیع تجمعی توأم به این صورت دارای اهمیت فراوانی در مطالعه مفهوم وابستگی میان متغیرهای تصادفی است. باید توجه کرد که استقلال میان متغیرهای تصادفی زمانی رخ می‌دهد که:

$$C(u_1, \ldots, u_d) = \prod_{k=1}^{d} u_k, \quad u \in [0,1]^d,$$

هم‌چنین برای مفصل C ، حاشیه (i,j) یعنی C_{ij} به ازای هر $1 \leq i < j \leq d$ ، به صورت

$$C_{ij}(u_i, u_j) = C(1, \ldots, 1, u_i, 1, \ldots, 1, u_j, 1, \ldots, 1),$$

تعریف می‌شود.

یکی از ساختارهای مهم آزمون‌های تحت بررسی در این مقاله، «مفصل تجربی» است که در حقیقت برآوردی از مفصل C بر پایه نمونه‌ای تصادفی از تابع توزیع تجمعی F است. برای محاسبه مفصل تجربی، ابتدا مشاهده‌نماهایی به‌صورت

$$\hat{U}_i = \frac{R_i}{(n+۱)}, \quad i \in \{۱, \dots, n\} \tag{۱}$$

محاسبه می‌شوند که در آن، R_i نشان‌دهنده رتبه اختصاص داده شده به هریک از متغیرها است. مؤلفه‌های این مشاهده‌نماها را می‌توان به صورت $\hat{U}_{ij} = \frac{n\hat{F}_j(X_{ij})}{(n+۱)}$ نمایش داد، که در آن $\hat{F}_j$ تابع توزیع تجمعی تجربی است که با استفاده از $X_{۱j}, \dots, X_{nj}$ $(j = ۱, \dots, d)$ محاسبه شده است. به این ترتیب مفصل تجربی در حقیقت همان تابع توزیع تجمعی تجربی است که با استفاده از مشاهده‌نماها و

$$C_n(u) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} I(\hat{U}_i \leq u), \quad u \in [۰, ۱]^d \tag{۲}$$

بدست می‌آید (کوجادینوویک، ۲۰۱۰). هم‌چنین برای آزمون استقلال دو به دو میان متغیرهای $X_۱, \dots, X_d$ آماره آزمون از فرآیند $\sqrt{n}[C_n(u) - \prod_{i=۱}^{d} u_i], \quad u \in [۰, ۱]^d$ بدست می‌آید. به منظور برازش یک مدل مفصل مناسب برای داده‌ها، از آزمون فرضیه $H_۰ : C \in \{C_\theta\}$ با آماره

$$\mathcal{C}_n(u) = \sqrt{n}\{C_n(u) - C_{\theta_n}(u)\}, \quad u \in [۰, ۱]^d \tag{۳}$$

استفاده می‌شود، که در آن منظور از C_n، مفصل تجربی، C_{θ_n}، برآوردی از تابع مفصل C تحت فرضیه $H_۰ : C \in \{C_\theta\}$ می‌باشد. برآوردگر θ_n از θ نیز تنها از طریق رتبه‌ها قابل محاسبه است. به عبارت دیگر برای محاسبه این برآوردگر، می‌توان از یکی از دو روش گشتاوری که شامل معکوس کردن τ کندال یا ρ اسپیرمن است، و یا روش ماکسیمم درستنمایی‌نما، استفاده نمود (ژنه، ۱۹۹۵) .

در ادامه، نمودارهای مورد استفاده به منظور ارزیابی حضور وابستگی و نیز وابستگی دمی توابع مفصل مورد استفاده در این تحقیق به طور خلاصه مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنا به قضیه ۱، هر تابع توزیع توأم d بعدی را می‌توان به d توزیع حاشیه‌ای و یک تابع مفصل تجزیه کرد. در حقیقت تابع مفصل، تابعی است که به طور کامل وابستگی میان d متغیر را مورد بررسی قرار می‌دهد (نلسون، ۲۰۰۶). مزیت استفاده از تابع مفصل، انعطاف‌پذیری آن است، یعنی امکان نمایش توزیع توأم و ساختار وابستگی را، مستقل از نوع

توزیع‌های حاشیه‌ای بین متغیرهای تصادفی فراهم می‌آورد.

۱.۲ نمودارهای ناپارامتری برای ارزیابی وابستگی و انتخاب تابع مفصل مناسب

نمودار کای و کندال، روش‌های گرافیکی تحلیل داده‌ها بر پایه رتبه‌ها هستند که از آن‌ها علاوه بر نمودار پراکنش به منظور بررسی میزان پیوند بین متغیرها استفاده می‌شود. هر دو این روش‌ها تحت تبدیلات یکنوا روی توزیع‌های حاشیه‌ای پایا هستند.

نمودار کای: این نمودار بر پایه تبدیل n زوج (X_i, Y_i) به n زوج $(\lambda_{n_i}, \chi_{n_i})$ به منظور بیان ساختار وابستگی میان داده‌های خام در مقایسه با نمودار پراکنش است. در این نمودار، χ_{n_i} نشان‌دهنده وابستگی برای هر زوج داده (X_i, Y_i) است و λ_{n_i} فاصله میان هر زوج (X_i, Y_i) از مرکز مجموعه داده‌ها (میانه) را اندازه‌گیری می‌کند. نمودار کای تحت فرض استقلال تقریباً افقی است، در حالی که انحراف از خط افقی $\chi = ۰$ نشان‌دهنده رد فرض استقلال است (فیشر و سوییتزر، ۲۰۰۱).

نمودار کندال: این نمودار نیز به منظور بررسی وابستگی میان مجموعه داده‌ها به کار می‌رود. در فقدان وجود وابستگی میان مجموعه داده‌ها، نمودار کندال تقریباً به صورت نیمساز ربع اول و سوم است. در حالی که وجود انحنا در نمودار، نشانه‌ای از وجود وابستگی میان داده‌ها است (ژنه و بویز، ۲۰۰۳). اگر منحنی بالای نیمساز قرار گیرد، وابستگی مثبت و اگر پایین نیمساز قرار گیرد، وابستگی منفی است.

وابستگی دمی توابع مفصل: در نظریه احتمال، وابستگی دمی برای یک زوج متغیر تصادفی، حرکت هم‌زمان متغیرها را در دم‌های بالایی و پایینی توزیع مورد بررسی قرار می‌دهد. هدف آن است که مشخص شود آیا متغیرهای مورد مطالعه در گوشه‌های نمودار تجمع بیشتری دارند یا در مرکز آن. با رسم نمودار پراکنش برای مجموعه داده‌های مورد بررسی، می‌توان به وجود وابستگی دمی پی برد. به این ترتیب که تجمع بیشتر نقاط در گوشه پایینی نمودار، نشان‌دهنده وجود وابستگی دمی پایینی (منفی)، تجمع بیشتر نقاط در گوشه بالایی نمودار، نشان‌دهنده وابستگی دمی بالایی (مثبت) و تجمع یکسان در گوشه‌های بالایی و پایینی، نشان‌دهنده وجود وابستگی دمی بالایی و پایینی است. اطلاعات مربوط به ضرایب وابستگی دمی برای تعدادی از توابع مفصل تک‌پارامتری که در این مقاله از آن‌ها استفاده شده است، به شرح جدول ۱ است.

تابع مفصل تی، نشان‌دهنده وابستگی دمی متقارن است. در این تابع مفصل، با کاهش درجه آزادی (ν) ، میزان وابستگی افزایش می‌یابد. در تابع مفصل نرمال، ρ_{XY} پارامتر تابع مفصل است $(-۱ < \rho_{XY} < ۱)$. مفصل نرمال درجه یکسانی از وابستگی مثبت و منفی را شامل می‌شود و دارای ویژگی استقلال مجانبی است. مفصل نرمال وابستگی دمی ندارد، این ویژگی به معنای آن است که مقادیر فرین

جدول ۱: تابع مفصل و ضرایب وابستگی دمی بالایی و پایینی مفصل‌های مورد استفاده

تابع مفصل	فرمول	ضریب وابستگی دمی پایینی	ضریب وابستگی دمی بالایی
گامبل هوگارد	$\exp\{-[(-\log u)^{\theta} + (-\log v)^{\theta}]^{\frac{1}{\theta}}\}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
کلایتون	$(\max\{0, u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\})^{-\frac{1}{\theta}}$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0
فرانک	$-\frac{1}{\theta}\log(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1})$	0	0
جو	$1 - \big[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\big]^{\frac{1}{\theta}}$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
تی	$\int_{-\infty}^{t^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{t^{-1}(v)}(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times\{1 + \frac{(s^2+t^2-2\rho st)}{\nu(1-\rho^2)}\}^{-\frac{\nu+2}{2}})dsdt$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$	$2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})$
نرمال	$\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)}(\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \times \exp\{\frac{-(s^2+t^2-2\rho_{XY}st)}{2(1-\rho_{XY}^2)}\})dsdt$	0	0

به صورت مستقل در هر حاشیه اتفاق می‌افتد و به بزرگی ρ_{XY} بستگی ندارد.

جدول ۲: تابع مفصل و پارامتر وابستگی مفصل‌های مورد استفاده

تابع مفصل	پارامتر θ
گامبل-هوگارد	$\theta = 1$ نشان‌گر استقلال و $1 \leq \theta < \infty$
کلایتون	$\theta \to 0$ نشان گر استقلال و $0 < \theta < \infty$
فرانک	$\theta \to 0$ نشان‌گر استقلال و $-\infty < \theta < \infty$
جو	$\theta = 1$ نشان‌گر استقلال و $1 \leq \theta < \infty$
تی	$-1 < \rho < 1$
نرمال	$\rho_{XY} = 0$ نشان‌گر استقلال و $-1 < \rho_{XY} < 1$

تحلیل نمودار پراکنش تابع مفصل کلایتون نشان می‌دهد که این تابع مفصل نسبت به نیمساز نامتقارن است. وابستگی دمی پایینی (چپ) قوی و وابستگی دمی بالایی صفر دارد و وابستگی دمی پایینی نیز در مقادیر بزرگ پارامتر به صفر می‌رسد. تحلیل نمودار پراکنش تابع مفصل گامبل نشان می‌دهد که این تابع مفصل نسبت به نیمساز نامتقارن است، وابستگی دمی پایینی صفر و وابستگی دمی بالایی قوی دارد و وابستگی دمی بالایی در مقادیر نزدیک به یک پارامتر، به صفر می‌رسد. تحلیل نمودار پراکنش تابع مفصل فرانک نشان می‌دهد که این تابع مفصل نسبت به نیمساز متقارن است، وابستگی بسیار ضعیف دارد (حتی ضعیف‌تر از تابع مفصل نرمال) و وابستگی‌های دمی بالایی و پاییینی آن، صفر است. تحلیل نمودار پراکنش

تابع مفصل جو نشان می‌دهد که این تابع مفصل نسبت به نیمساز نامتقارن است، و وابستگی دمی بالایی و پایینی آن مشابه تابع مفصل گامبل است. پارامتر وابستگی مربوط به توابع مفصل مورد استفاده در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۳: تابع مفصل و ضرایب وابستگی مفصل‌های مورد استفاده

تابع مفصل	ضریب τ کندال	ضریب ρ اسپیرمن
گامبل–هوگارد	$0 \le \tau < 1$ و $\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$	$0 \le \rho < 1$ و فرم خاصی ندارد.
کلایتون	$0 < \tau < 1$ و $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$	$0 < \rho < 1$ و فرم خاصی ندارد .
فرانک	$\tau = 1 - \frac{4}{\theta}[1 - D_F(\theta)]$	$1 - \frac{12}{\theta}[D_1(\theta) - D_2(\theta)]$
	$-1 \le \tau \le 1$	$-1 \le \rho \le 1$
جو	$0 \le \tau < 1$ و $\tau = 1 + \frac{4}{\theta} D_J(\theta)$	$0 \le \rho < 1$ و فرم خاصی ندارد.
تی	$-1 \le \tau \le 1$ و $\frac{2}{\pi} arcsin(\rho)$	$-1 \le \rho \le 1$
نرمال	$-1 \le \tau \le 1$ و $\frac{2}{\pi} arcsin(\rho_{XY})$	$-1 \le \rho \le 1$ و $\frac{6}{\pi} arcsin(\frac{\rho_{XY}}{2})$

ضرایب τ کندال و ρ اسپیرمن مرتبط با توابع مفصل استفاده شده در این مقاله، در جدول ۳ ارائه شده است، که در آن

$$
\begin{aligned}
D_F(\theta) &= \frac{1}{\theta}\int_{t=0}^{\theta} \frac{t}{(e^t - 1)} dt \\
D_K(\theta) &= \frac{k}{e^k}\int_{t=0}^{\theta} \frac{t^k}{(e^t - 1)} dt, \ k = 1, 2 \\
D_J(\theta) &= \int_{t=0}^{1} \frac{[ln(1 - t^\theta)](1 - t^\theta)}{t^{\theta-1}} dt.
\end{aligned}
$$

۳ وابستگی جهتی

مسائلی که دربردارنده مفاهیم وابستگی بین متغیرهای مورد مطالعه هستند، به‌صورت گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف علوم، مورد استفاده قرار می‌گیرد (جو، ۱۹۹۷). به‌منظور بررسی روابط بین متغیرهای مورد استفاده در یک توزیع و نیز جهتی که به واسطه آن این متغیرها با یکدیگر مرتبط هستند، از مفهوم وابستگی جهتی استفاده می‌شود (کوسادا مولینا، ۲۰۱۲). برای آشنایی با مفهوم وابستگی جهتی، ابتدا تعدادی از مفاهیم وابستگی چندمتغیری یادآوری می‌شود. فرض کنید $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ برداری تصادفی با تابع توزیع توأم H باشد.

تعریف ۲: بردار X (یا H) دارای وابستگی مثبت هم‌راستای بالایی[2] (به اختصار PUOD) است، اگر:

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(X_i > x_i)] \geq \prod_{i=1}^{d} P[X_i > x_i] \quad \forall x = (x_1, \cdots, x_d) \in \bar{R}^d \tag{4}$$

هم‌چنین، بردار X (یا H) دارای وابستگی مثبت هم‌راستای پایینی[3] (به اختصار PLOD) است، اگر:

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(X_i \leq x_i)] \geq \prod_{i=1}^{d} P[X_i \leq x_i] \quad \forall x \in \bar{R}^d \tag{5}$$

اگر علامت‌های نامساوی $\geq$ در روابط (۴) و (۵) برعکس شود، مفاهیم متناظر با وابستگی منفی هم‌راستای بالایی و وابستگی منفی هم‌راستای پایینی ایجاد می‌شود. در حالت دومتغیری، مفاهیم وابستگی مثبت هم‌راستای بالایی و وابستگی مثبت هم‌راستای پایینی (و یا متناظر با آن، وابستگی منفی هم‌راستای بالایی و وابستگی منفی هم‌راستای پایینی) معادل هستند و «وابستگی ربعی مثبت» (وابستگی ربعی منفی) نام دارند، البته این ویژگی برای ابعاد بزرگ‌تر برقرار نخواهد بود. در حقیقت، مفهوم وابستگی مثبت هم‌راستای بالایی به معنای آن است که متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_d$ بیشتر تمایل دارند که «با یکدیگر و توأماً» مقادیر بزرگ اختیار کنند، هنگامی‌که با برداری از متغیرهای تصادفی مستقل با همان توزیع کناری تک‌متغیری متناظر، مقایسه می‌شوند. به همین ترتیب، مفهوم وابستگی منفی هم‌راستای بالایی به معنای آن است که متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_d$ بیشتر تمایل دارند که "با یکدیگر و توأماً" مقادیر کوچک اختیار کنند، هنگامی‌که با برداری از متغیرهای تصادفی مستقل با همان توابع توزیع حاشیه‌ای تک‌متغیری متناظر، مقایسه می‌شوند.

تعریف ۳: با فرض این‌که $X = (X_1, \ldots, X_d)'$ یک بردار تصادفی پیوسته با تابع توزیع توأم H و هم‌چنین $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)' \in R^d$ به گونه‌ای باشد که برای تمام مقادیر $i = 1, \ldots, d$ ، $|\alpha_i| = 1$ ، در این صورت متغیر تصادفی X (یا H) وابسته مثبت (هم‌راستا) در جهت α[4] (به اختصار $\mathrm{PD}(\alpha)$

[2]Positive Upper Orthant Dependent
[3]Positive Lower Orthant Dependent
[4](orthant) Positive Dependent according to a direction α

است، اگر برای هر $x \in R^d$ رابطه

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(\alpha_i X_i > x_i)] \geq \prod_{i=1}^{d} P[\alpha_i X_i > x_i] \quad (۶)$$

برقرار باشد.

متغیر تصادفی X (یا H) وابسته منفی (هم‌راستا) در جهت α[5] (به اختصار $\mathrm{ND}(\alpha)$) است، اگر برای هر $x \in R^d$ رابطه

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(\alpha_i X_i > x_i)] \leq \prod_{i=1}^{d} P[\alpha_i X_i > x_i] \quad (۷)$$

برقرار باشد.

متغیر تصادفی X (یا H) وابسته مثبت (هم‌راستا) در جهت $-\alpha$[6] (به اختصار $\mathrm{PD}(-\alpha)$) است، اگر برای هر $x \in R^d$ رابطه

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(-\alpha_i X_i > x_i)] \geq \prod_{i=1}^{d} P[-\alpha_i X_i > x_i] \quad (۸)$$

برقرار باشد.

متغیر تصادفی X (یا H) وابسته منفی (هم‌راستا) در جهت $-\alpha$[7] (به اختصار $\mathrm{ND}(-\alpha)$) است، اگر برای هر $x \in R^d$ رابطه

$$P[\bigcap_{i=1}^{d}(-\alpha_i X_i > x_i)] \leq \prod_{i=1}^{d} P[-\alpha_i X_i > x_i] \quad (۹)$$

برقرار باشد.

---

[5] (orthant) Negative Dependent according to a direction α

[6] (orthant) Positive Dependent according to a direction $-\alpha$

[7] (orthant) Negative Dependent according to a direction $-\alpha$

۱.۳ اندازه‌های وابستگی جهتی

برای بررسی مفهوم وابستگی جهتی در توزیع‌های چندمتغیری، ابتدا ضرایب وابستگی τ کندال و ρ اسپیرمن با استفاده از تابع مفصل تعریف می‌شود. این ضرایب به منظور شناسایی اندازه‌های وابستگی در توزیع‌های چندمتغیری که وابستگی آن‌ها توسط اندازه‌های معمول قابل محاسبه نیست، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۴: اندازه‌های وابستگی بین مولفه‌های زوج تصادفی (X, Y)، براساس مفصل C مرتبط با (X, Y)، با نماد
$\tau(C)$ و $\rho(C)$ نمایش و به صورت

$$\begin{aligned} \tau_{XY} = \tau(C) &= ۴\int_{\mathrm{I}^۲} C(u,v)dC(u,v) - ۱ \\ &= ۱ - ۴\int_{\mathrm{I}^۲} \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}dudv \\ \rho_{XY} = \rho(C) &= ۱۲\int_{\mathrm{I}^۲} C(u,v)dudv - ۳ \\ &= ۱۲\int_{\mathrm{I}^۲} uvdC(u,v) - ۳ \end{aligned} \tag{۱۰}$$

تعریف می‌شوند ($I = [۰, ۱]$).

در حالت دومتغیری، اندازه وابستگی اطلاعاتی در خصوص بزرگی و جهت وابستگی بین دو متغیر تصادفی در اختیار قرار می دهد. یعنی هنگامی که این اندازه نزدیک به $+۱$ است، مقادیر بزرگ (کوچک) متغیرهای تصادفی تمایل دارند که با یکدیگر اتفاق بیافتند، و هنگامی که اندازه وابستگی نزدیک به -۱ است، مقادیر بزرگ یک متغیر تصادفی، تمایل دارند که با مقادیر کوچک متغیر دیگر، اتفاق بیافتند. در ادامه با بیان قضیه‌های ۵ و ۶ ، تعدادی از ضرایب وابستگی جهتی ارائه می‌شوند. این ضرایب، میزان وابستگی را در توزیع‌های سه‌متغیری که اندازه وابستگی آن‌ها توسط روابط معمول وابستگی قابل بررسی نیستند، ارائه داده و بر پایه مفهوم وابستگی جهتی استوار هستند.

تعریف ۵: با فرض این‌که (X, Y, Z) ، برداری تصادفی با تابع مفصل سه بعدی C باشد، در این صورت، برای هر جهت $(\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$ که برای آن $|\alpha_i| = ۱$ (برای $i = ۱, ۲, ۳$)، وابستگی در جهت $(\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳)$ به صورت

$$\rho_۳^{(\alpha_۱,\alpha_۲,\alpha_۳)} = \frac{\alpha_۱\alpha_۲\rho_{XY} + \alpha_۲\alpha_۳\rho_{YZ} + \alpha_۳\alpha_۱\rho_{ZX}}{۳} + \alpha_۱\alpha_۲\alpha_۳\frac{\rho_۳^+ - \rho_۳^-}{۲} \tag{۱۱}$$

تعریف می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned}\rho_3^+(C) &= 8\int_{I^3}[P(X>u,Y>v,Z>w)\\ &- P(X>u)P(Y>v)P(Z>w)]dudvdw\\ \rho_3^-(C) &= 8\int_{I^3}[P(X\le u,Y\le v,Z\le w)\\ &- P(X\le u)P(Y\le v)P(Z\le w)]dudvdw\end{aligned}$$

(برای هر $u,v,w \in I=[0,1]^3$)

تعریف ۶: با فرض این‌که (X,Y,Z) ، برداری تصادفی با تابع مفصل سه بعدی C باشد، در این صورت، برای هر جهت $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ که برای آن $|\alpha_i|=1$ (برای $i=1,2,3$) ، τ کندال سه بعدی در جهت $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(C)=\frac{\alpha_1\alpha_2\tau_{XY}+\alpha_2\alpha_3\tau_{YZ}+\alpha_3\alpha_1\tau_{ZX}}{3}. \qquad (12)$$

۴ تحلیل داده‌های هزینه و درآمد خانوار

در این بخش، داده‌های خانوارهای شهری و روستایی جمع آوری شده توسط مرکز آمار ایران در سال ۱۳۹۰ تحلیل می‌شود. هدف بررسی رابطه میان درآمد خانوار با سرمایه‌گذاری آن‌ها برای خرید محصولات فرهنگی و نیز خرید کالاهای متفرقه است. بررسی می‌شود وقتی درآمد خانوار ایرانی کاهش می‌یابد، افراد تمایل به کاهش دادن کدام منبع هزینه را دارند: آیا از هزینه‌های غیرضروری خود کاسته و به خرید محصولات فرهنگی تمایل بیشتری پیدا می‌کنند یا بالعکس بیشتر تمایل به صرف هزینه در امور غیرضروری زندگی خود دارند. بدین منظور، برای هریک از مجموعه داده‌های شهری و روستایی، از سه متغیر درآمد خانوار در طول یک سال گذشته (X_1) ، هزینه‌ای که صرف خرید محصولات فرهنگی در طول یک سال گذشته متقبل شده‌اند (X_2) ، و نیز هزینه‌ای که در طول سال گذشته صرف کالاهای متفرقه کرده‌اند (X_3) ، استفاده شده است. داده‌ها نشان می‌دهند که در سال ۱۳۹۰ متوسط کل هزینه خالص یک خانوار شهری، ۱۳۲۷۱۶ هزار ریال بوده که نسبت به سال گذشته ۱۶/۷۵ درصد افزایش داشته است.

هم‌چنین متوسط هزینه خوراکی، دخانی و غیرخوراکی خانوار در این سال به ترتیب ۳۲۷۵۲ هزار ریال و ۹۹۹۶۵ هزار ریال بوده که نسبت به سال قبل به ترتیب ۲۵/۳۱ و ۱۴/۲۲ درصد افزایش یافته است. سهم

هزینه خوراکی، دخانی و غیرخوراکی از هزینه کل نیز به ترتیب ۲۴/۶۸ و ۷۵/۳۲ درصد بوده است، در بین هزینه‌های غیرخوراکی، هزینه‌های مربوط به مسکن ۱۹/۸۹ درصد، حمل و نقل و ارتباطات ۱۵/۲۴ درصد، کالاها و خدمات متفرقه۱۱/۲۷ درصد، بهداشت و درمان ۱۰/۵۵ درصد، لوازم، اثاث و خدمات خانوار ۵/۰۰ درصد، تفریحات، سرگرمی‌ها و خدمات فرهنگی ۳/۲۱ درصد و پوشاک و کفش ۳/۰۸ درصد نسبت به هزینه‌های مشابه سال قبل افزایش داشته است. همچنین با توجه به اطلاعات جمع‌آوری شده از مرکز آمار ایران، براساس نتایج بدست آمده در سال ۹۰ متوسط درآمد سالانه یک خانوار شهری ۱۳۰۳۰۱ هزار ریال بوده است که نسبت به سال قبل، ۲۲/۷۵ درصد افزایش داشته است. در این سال، درآمد از مشاغل مزد و حقوق بگیری، درآمد از مشاغل آزاد کشاورزی و غیرکشاورزی و درآمد متفرقه به ترتیب به میزان ۹/۴۰، ۷/۲۴ و ۳۷/۱۹ درصد رشد داشته است. سهم هریک از منابع کل درآمدی در کل درآمد به‌صورت زیر است: ۳۷/۱۹ درصد از مشاغل مزد و حقوق بگیری، ۱۵/۴۰ درصد از مشاغل آزاد کشاورزی و غیرکشاورزی، ۵۵/۲۰ درصد از منابع متفرقه. داده‌های به‌دست آمده از مرکز آمار ایران نشان می‌دهد که در سال ۱۳۹۰ متوسط کل هزینه خالص یک خانوار روستایی، ۸۳۹۷۳ هزار ریال بوده است که نسبت به سال گذشته ۲۲/۶۳ درصد افزایش داشته است. همچنین متوسط هزینه خوراکی، دخانی و غیرخوراکی خانوار در این سال به ترتیب ۳۲۹۴۰ هزار ریال و ۵۱۰۳۳ هزار ریال بوده که نسبت به سال قبل به ترتیب ۲۶/۰۳ و ۲۰/۵۳ درصد افزایش یافته است. سهم هزینه خوراکی، دخانی و غیرخوراکی از هزینه کل نیز به ترتیب ۳۹/۲ و ۶۰/۸ درصد بوده است. در بین هزینه‌های غیرخوراکی، هزینه‌های مربوط به مسکن ۳۷/۹۵ درصد، حمل و نقل و ارتباطات ۲۸/۰۱ درصد، کالاها و خدمات متفرقه ۱۰/۰۶ درصد، بهداشت و درمان ۵/۳۶ درصد، لوازم، اثاث و خدمات خانوار ۴/۵۰ درصد، تفریحات، سرگرمی‌ها و خدمات فرهنگی ۵/۵۸ درصد و پوشاک و کفش ۲۰/۵۵ درصد نسبت به هزینه‌های مشابه سال قبل افزایش داشته است. براساس نتایج به‌دست آمده در سال ۹۰، متوسط درآمد سالانه یک خانوار روستایی ۷۹۷۲۷ هزار ریال بوده است که نسبت به سال قبل، ۳۴/۳۶ درصد افزایش داشته است. در این سال، درآمد از مشاغل مزد و حقوق بگیری، درآمد از مشاغل آزاد کشاورزی و غیرکشاورزی و درآمد متفرقه به ترتیب به میزان ۱۰/۵۶ ، ۸/۹۴ و ۸۳/۹۹ درصد رشد داشته است. سهم هریک از منابع کل درآمدی در کل درآمد به‌صورت زیر است: ۲۶/۸۳ درصد از مشاغل مزد و حقوق بگیری، ۲۷/۷۴ درصد از مشاغل آزاد کشاورزی و غیرکشاورزی، ۴۵/۴۲ درصد از منابع متفرقه (مرکز آمار ایران، ۱۳۹۰). برای رسیدن به هدف مشخص شده، ابتدا لازم است که برای سه متغیر نام برده، به‌صورت توأم مفصل مناسبی تعریف شود. به‌منظور تعیین تابع مفصل مناسب، نیاز به بررسی مراحلی است که در ادامه به آن‌ها پرداخته می‌شود.

۱.۴ روش نمونه‌گیری

با توجه به وجود ناهمگنی در میان داده‌های متغیرهای ذکر شده، لازم است که برای جمع‌آوری داده‌ها از روش «نمونه‌گیری با طبقه‌بندی» استفاده شود. به این ترتیب که باید ابتدا نمونه‌ای نسبتاً بزرگ به روش تصادفی ساده از جامعه استخراج، و سپس با در نظر گرفتن ناهمگنی و پراکندگی این نمونه، طبقاتی با کران‌های مناسب انتخاب شود، به طوری که اگر واحدهای این نمونه در طبقه‌های ساخته شده توزیع شوند، در هر طبقه همگنی موجود باشد. جامعه هدف این طرح نمونه‌گیری، شامل همه خانوارهای معمولی ساکن و گروهی در نقاط شهری یا روستایی است. روش نمونه‌گیری، سه مرحله‌ای با طبقه‌بندی است که در ابتدا طبقه‌بندی حوزه‌های سرشماری و سپس انتخاب حوزه‌ها انجام می‌شود. در مرحله دوم، بلوک‌های شهری و آبادی‌های روستایی انتخاب شده و در مرحله سوم خانوارهای نمونه انتخاب می‌شوند. تعداد نمونه‌ها با توجه به هدف طرح، برای برآورد متوسط هزینه و درآمد سالانه یک خانوار، بهینه شده است. برای دست‌یابی به برآوردها که معرف بهتری از کل سال باشند، نمونه‌ها بین ماه‌های سال برای آمارگیری توزیع شده‌اند.

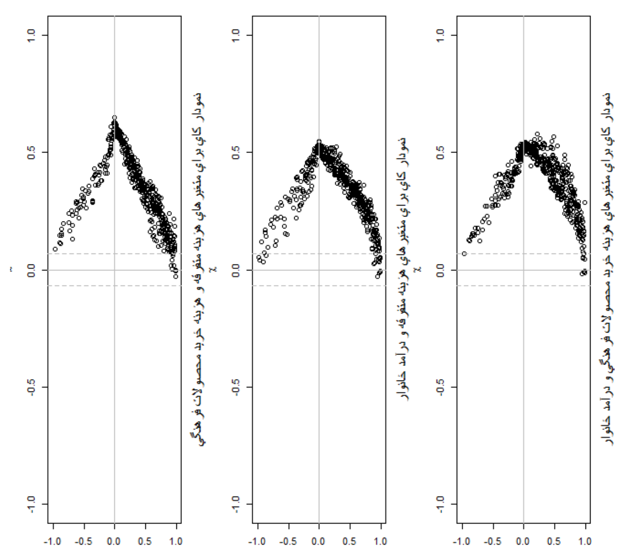
۲.۴ برآورد نیمه‌پارامتری توابع مفصل

برای مدل‌بندی توابع مفصل با روش نیمه‌پارامتری ابتدا یک روش ناپارامتری برای برآورد توزیع‌های حاشیه‌ای به کار می‌رود، سپس در ادامه از روش پارامتری برای برآورد تابع مفصل مناسب استفاده می‌شود. ازآن‌جا که هدف، استنباط بر روی پارامترهای وابستگی توابع مفصل است، استفاده از مفصل‌های پارامتری امکان این ارزیابی را می‌دهد. برای این منظور ابتدا با استفاده از رابطه (۱) ، داده‌ها به مشاهده‌نما تبدیل می‌شوند. این رابطه، مجموعه داده‌های مورد مطالعه را به مجموعه مشاهداتی در $[۰,۱]$ تبدیل می‌کند. در ادامه با رسم نمودارهای کای و کندال و نمودار پراکنش برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری و روستایی و نیز تحلیل وابستگی دمی بر مبنای نمودارهای ذکر شده، تابع مفصل مناسب را حدس زده و در نهایت نیز با استفاده از آزمون نیکویی برازش و محاسبه معیار AIC، حدس اولیه تأیید می‌شود. در انتها نیز برای تابع مفصل مناسب برای داده‌ها، پارامترهای وابستگی دمی بالایی و پایینی محاسبه می‌شوند.

۳.۴ تحلیل نمودارهای کای و کندال

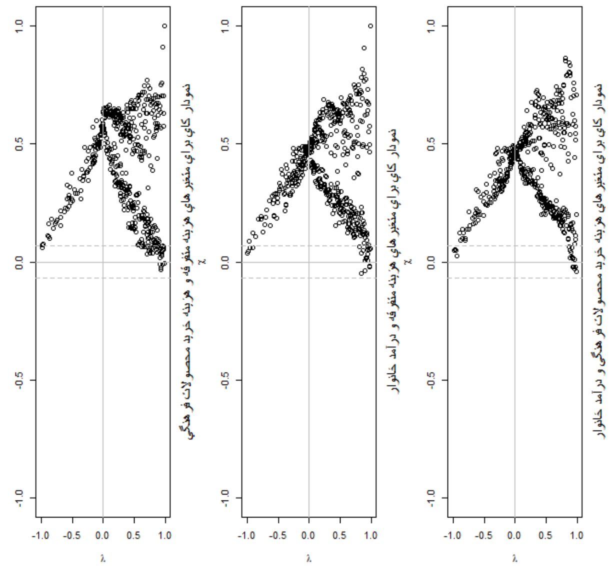
به منظور شناسایی توابع مفصل مناسب برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری و روستایی، نمودارهای کای و کندال مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری، شکل ۱

نشان‌دهنده انحنایی است که به خط افقی ($\chi = ۰$) در هر دو سمت چپ و راست نمودار نزدیک می‌شود. پس این نمودار نشان‌دهنده آن است که همبستگی میان مجموعه داده‌های خانوارهای شهری به‌صورت متقارن است. نمودار کندال (شکل ۳) نیز به‌صورت انحنایی نزدیک به خط نیمساز است که از نقطه صفر تا (۱و۱) بالای نیمساز به‌صورت یکسان گسترش می‌یابد. این حالت نیز می‌تواند نشانه‌ای از وجود وابستگی مثبت برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری باشد. بنابراین در میان مجموعه مفصل‌های مورد بررسی، توابع مفصلی هم‌چون فرانک و نرمال، حدس اولیه را تشکیل می‌دهد.

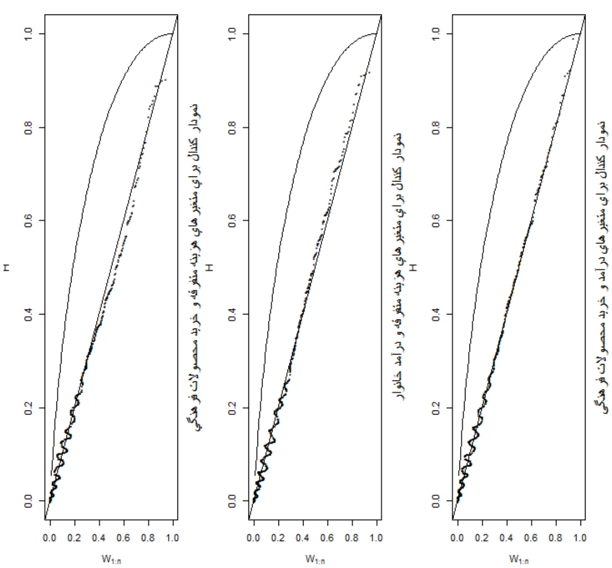


شکل ۱: نمودار کای مربوط به متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار شهری

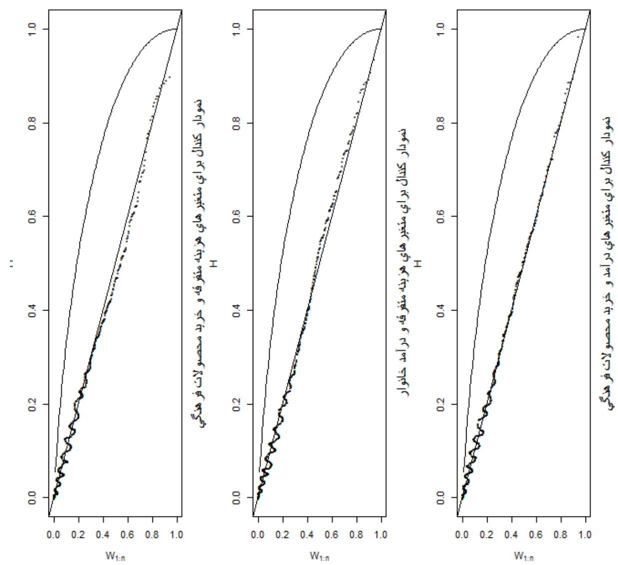
برای مجموعه داده‌های خانوار روستایی، نمودار کای (شکل ۲) در سمت راست نمودار دارای دو جهت مجزا از یکدیگر است. یکی از این جهت‌ها به خط افقی ($\chi = ۰$) نزدیک می‌شود، درحالی‌که جهت دیگر به سمت بالای خط افقی ($\chi = ۰$) حرکت می‌کند. نمودار کندال (شکل ۴) مربوط به مجموعه داده‌های خانوار روستایی بالای نیمساز است که نشان‌دهنده وجود ساختار وابستگی مثبت میان مجموعه داده‌های روستایی است.



شکل ۲: نمودار کای مربوط به متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار روستایی



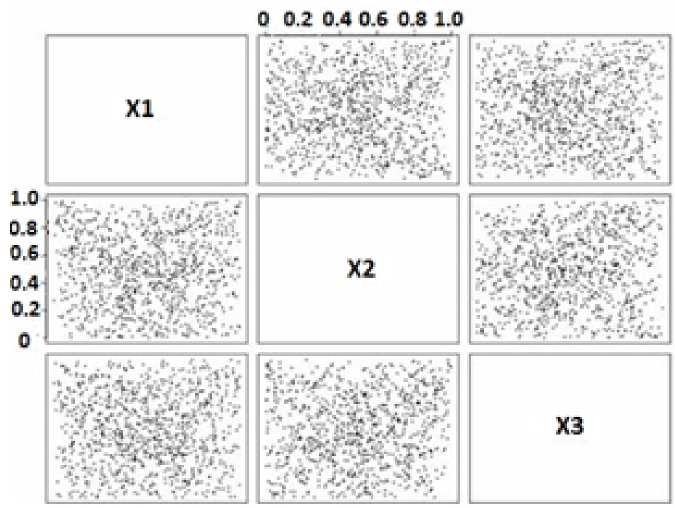
شکل ۳: نمودار کندال مربوط به متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار شهری



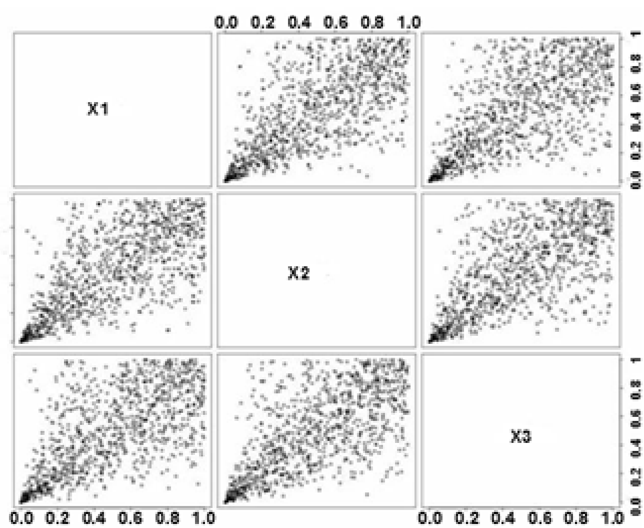
شکل ۴: نمودار کندال مربوط به متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار روستایی

۴.۴ نتایج تجربی حاصل از نمودار پراکنش

در نمودار پراکنش مربوط به مجموعه داده‌های خانوار شهری، دیده می‌شود داده‌ها به طور عمده روی قطری از سمت چپ بالایی به سمت راست پایینی متمرکز شده‌اند. در این نمودار هیچ نشانه‌ای از تمرکز بیشتر داده‌ها روی سمت راست بالایی و یا چپ پایینی مشاهده نمی‌شود. بنابراین، تابع مفصل مناسب برای مجموعه داده‌های خانوار شهری دارای وابستگی دمی نیست. پس حدس اولیه برای این مجموعه داده، مفصل‌های نرمال و فرانک است. نمودار پراکنش مربوط به این تابع مفصل در شکل ۵ ارائه شده است. در نمودار پراکنش مجموعه داده‌های خانوار روستایی، مشاهده می‌شود که داده‌ها بیشتر در سمت چپ پایینی نمودار متمرکز شده‌اند و نشانه‌ای از وجود تقارن در نمودار پراکنش این مجموعه داده‌ها مشاهده نمی‌شود. بنابراین تابع مفصل مناسب برای مجموعه داده‌های خانوار روستایی، دارای وابستگی دمی پایینی است. پس حدس اولیه برای این مجموعه داده‌ها، مفصل کلایتون است، مفصل تی نیز به طور ضعیفی می‌تواند حدس بعدی باشد. نمودار پراکنش مربوط به این تابع مفصل در شکل ۶ ارائه شده است.



شکل ۵: نمودار پراکنش برای متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار شهری



شکل ۶: نمودار پراکنش برای متغیرهای استفاده شده از مجموعه داده‌های خانوار روستایی

۵.۴ محاسبه ضرایب وابستگی متغیرهای $X_۱$ ، $X_۲$ و $X_۳$

در این قسمت به محاسبه ضرایب وابستگی τ کندال و ρ اسپیرمن برای مجموعه داده‌های هزینه و درآمد خانواده‌های شهری و روستایی پرداخته می‌شود. نتایج به شرح جدول‌های ۴ و ۵ است.

جدول ۴: اندازه ضرایب وابستگی مجموعه داده‌های خانواده‌های شهری

زوج متغیرها	τ کندال	ρ اسپیرمن
$(X_۱, X_۲)$	$-۰/۰۰۲$	$-۰/۰۰۴$
$(X_۱, X_۳)$	$۰/۰۲۷$	$۰/۰۴۱$
$(X_۲, X_۳)$	$-۰/۰۲۳$	$-۰/۰۳۴$

جدول ۵: اندازه ضرایب وابستگی مجموعه داده‌های خانواده‌های روستایی

زوج متغیرها	τ کندال	ρ اسپیرمن
$(X_۱, X_۲)$	$-۰/۰۰۳$	$-۰/۰۰۵$
$(X_۱, X_۳)$	$۰/۰۴۷$	$۰/۰۶۵$
$(X_۲, X_۳)$	$-۰/۰۴۳$	$-۰/۰۶$

جدول ۶: نتایج حاصل از آزمون استقلال میان مجموعه داده‌های خانواده‌های شهری و روستایی

مجموعه داده‌ها	مقدار آماره کرامر–فون‌میزس	مقدار احتمال	مقدار احتمال فیشر	مقدار احتمال تیپت
خانوارهای شهری	۰/۲۴۶	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
خانوارهای روستایی	۵/۰۸۱	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰

حال، لازم است برای اطمینان از وجود وابستگی در میان هریک از مجموعه داده‌های هزینه و درآمد خانواده‌های شهری و روستایی که این نتیجه‌گیری با استفاده از تحلیل گرافیکی داده‌ها حاصل شد، ابتدا فرض استقلال میان متغیرهای مورد مطالعه مورد آزمون قرار گیرد. نتایج حاصل شده به شرح جدول ۶ بدست آمده است. از نتیجه این آزمون چنین بدست می‌آید که فرض صفر استقلال به شدت رد می‌شود.

ادامه مراحل تحلیل، شامل اجرای آزمون‌های متفاوت نیکویی برازش است. برای انجام این آزمون، از خانواده تک‌پارامتری مفصل‌های ارشمیدسی شامل گامبل–هوگارد، کلایتون، فرانک و جو، و خانواده سه پارامتری مفصل‌های بیضوی شامل نرمال و تی با درجه آزادی ثابت استفاده می‌شود. نتایج حاصل شده برای مجموعه داده‌های شهری و روستایی به ترتیب به شرح جدول‌های ۷ و ۸ است.

جدول ۷: نتایج حاصل از آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های خانواده‌های شهری

تابع مفصل	مقدار پارامتر	مقدار احتمال	τکندال	ملاک اطلاع آکائیک
گامبل	۰/۰۰۳	۰۰۰.۰	۰/۲۲۳	−۱۸۸۸
کلایتون	۰/۰۰۳	۰/۰۰۰	۰/۱۲۳	−۲۰۹۰
فرانک	۱/۰۰۱	۰/۱۷۱	۰/۴۹۸	−۲۵۴۶
جو	۱/۰۰۳	۰/۰۵۴	۰/۱۲	−۲۱۲۰
تی	۰/۴۱۵، ۰/۳۵۳، ۰/۵۸۰	۰/۰۰۲	۰/۱۵۵	−۲۱۳۸
نرمال	−۰/۰۰۴، −۰/۰۴۴، −۰/۰۳۴	۰/۰۰۵	۰/۳۰۵	−۱۳۲۰

جدول ۸: نتایج حاصل از آزمون نیکویی برازش برای مجموعه داده‌های خانواده‌های روستایی

تابع مفصل	مقدار پارامتر	مقدار احتمال	τکندال	ملاک اطلاع آکائیک
گامبل	۱	۰/۳۲۴	۰/۰۷۸	−۴۶۶
کلایتون	۰/۰۰۷	۰/۶۲۳	۰/۱۹۴	−۶۴۰
فرانک	۰/۰۰۹	۰/۳۴۲	۰/۰۰۵	−۲۶۰
جو	۱/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	−۲۶۵
تی	۰/۴۲۶، ۰/۳۶۲، ۰/۵۹۲	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	−۲۴۸
نرمال	−۰/۰۰۲، ۰/۰۳۶، −۰/۰۳۱	۰/۰۲۷	۰/۱۶۰	−۲۲۶

جدول ۹: نتایج حاصل از برازش مفصل فرانک به مجموعه داده‌های خانواده‌های شهری

پارامتر	برآورد	ضریب τ کندال	انحراف استاندارد	z-value	$P(Z>\lvert z\rvert)$
θ	۰/۰۱۲	۰/۴۲۳	۰/۰۹۰	۰/۱۳۸	۰/۸۹

جدول ۱۰: نتایج حاصل از برازش مفصل کلایتون به مجموعه داده‌های خانواده‌های روستایی

پارامتر	برآورد	ضریب τ کندال	انحراف استاندارد	z-value	$PZ(>\lvert z\rvert)$
θ	۰/۹۷۲	۰/۷۸۳	۰/۰۶۹	۰/۴۳۴	۰/۹۸۸

همان‌طور که در جدول ۷ ملاحظه می‌شود، برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری، به جز مفصل فرانک و جو، سایر مفصل‌های مورد بررسی در سطح معنی‌داری ۵ درصد رد می‌شود، اما با توجه به نمودار پراکنش رسم شده و بررسی وابستگی دمی، هر دو این مفصل‌ها نیز قابل برازش به مجموعه داده‌های مورد بررسی نیستند. هم‌چنین با توجه به جدول ۸ ملاحظه می‌شود که برای مجموعه داده‌های روستایی، به جز مفصل جو، تی و نرمال، سایر مفصل‌های مورد بررسی در سطح معنی‌داری ۵ درصد رد نمی‌شود. برای بدست آوردن تابع مفصل مناسب برای مجموعه داده‌های مورد بررسی، می‌توان از معیار اطلاع آکائیک استفاده کرد. این معیار در حقیقت یک روش برای انتخاب مدل در میان مجموعه‌ای از مدل‌ها با تعداد پارامترهای اندک است و به صورت

$$\mathrm{AIC} = ۲k - ۲\ln L$$

تعریف می‌شود که در آن، k تعداد پارامترهای موجود در مدل استاندارد شده و L مقدار ماکسیمم تابع درست‌نمایی برای مدل برآورد شده است. مدل مناسب، مدلی است که دارای مقدار AIC کمتری باشد. با توجه به جدول ۷ ، نتیجه می‌شود که تابع مفصل فرانک، مناسب‌ترین مفصل برای برازش مجموعه داده‌های شهری است. هم‌چنین با توجه به این جدول می‌توان نتیجه‌گیری کرد که مقدار ضریب τ کندال برای مفصل فرانک دارای بیشترین مقدار است. با توجه به جدول ۸ این چنین استدلال می‌شود که مفصل کلایتون، مناسب‌ترین مفصل برای برازش مجموعه داده‌های روستایی است، زیرا برای مفصل کلایتون معیار AIC دارای کمترین مقدار و ضریب τ کندال دارای بیشترین مقدار است. در ادامه بررسی، برای مفصل پذیرفته شده در هر دو مجموعه داده، انحراف استاندارد مربوط به برآورد پارامترها محاسبه می‌شود. نتایج مربوط به استفاده از این توابع مفصل، به ترتیب در جدول‌های ۹ و ۱۰ است. به عنوان مثال، تابع مفصل سه متغیری فرانک برای مجموعه داده‌های شهری به صورت

$$C(u,v,w) = -\frac{۱}{\theta}\log\{۱ + \frac{[\exp(-\theta u) - ۱][\exp(-\theta v) - ۱][\exp(-\theta w) - ۱]}{[\exp(-\theta) - ۱]^{m-۱}}\}$$

است که در آن، m نشان‌دهنده بعد تابع مفصل و پارامتر θ بزرگتر از صفر است. هم‌چنین، تابع مفصل سه‌متغیری کلایتون برای مجموعه داده‌های روستایی به صورت

$$C(u,v,w) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} + w^{-\theta} - ۳ + ۱)^{-\frac{۱}{\theta}} \qquad (۱۳)$$

است که در آن، $\theta \in [-1,\infty) - \{0\}$.

برای مجموعه داده‌های خانوار شهری و روستایی مقادیر ضرایب وابستگی دمی به شرح جدول ۱۱ است (قاسم نژاد و همکاران، ۱۳۹۱).

جدول ۱۱: ضرایب وابستگی دمی مجموعه داده‌های خانوار شهری و روستایی

داده	ضریب وابستگی دمی پایینی	ضریب وابستگی دمی بالایی
خانوار شهری	۰	۰
خانوار روستایی	۰/۳۰۵	۰

از آن‌جاکه برای مفصل‌های بدست آمده از مجموعه داده‌های خانوارهای شهری و نیز روستایی، مشاهده می‌شود $C(u,v,w) \geq uvw$ ، بنابراین نتیجه می‌شود که C ، دارای ویژگی $\mathrm{POD}(-1,-1,-1)$ است. همچنین $C_{12}(u,v) - C(u,v,w) \leq uv(1-w)$ بنابراین نتیجه می‌شود که C ، دارای ویژگی $\mathrm{NOD}(-1,-1,1)$ است. با توجه به این‌که $C_{13}(u,w) - C(u,v,w) \geq uw(1-v)$ ، بنابراین نتیجه می‌شود که C ، دارای ویژگی $\mathrm{POD}(-1,1,-1)$ است. همچنین $C_{23}(v,w) - C(u,v,w) \leq vw(1-u)$ ، بنابراین نتیجه می‌شود که C ، دارای ویژگی $\mathrm{NOD}(1,-1,-1)$ است. محاسبات مربوط به سایر جهت‌ها نیز به طور مشابه است. نتایج حاصل شده با استفاده از تعریف وابستگی جهتی برای توابع مفصل، با محاسبه ضرایب جهتی τ کندال و ρ اسپیرمن نیز به شرح جدول ۱۲ قابل دستیابی است.

جدول ۱۲: نتایج حاصل از محاسبه ضرایب τ و ρ جهتی برای مجموعه داده‌های خانوارهای شهری و روستایی

	خانوار شهری		خانوار روستایی	
α	$\tau_3^\alpha(C)$	$\rho_3^\alpha(C)$	$\tau_3^\alpha(C)$	$\rho_3^\alpha(C)$
$(1,1,1)$	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
$(-1,1,1)$	−۰/۰۲۴	−۰/۰۲۴	−۰/۰۱۴	−۰/۰۱۲
$(1,-1,1)$	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۳
$(1,1,-1)$	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۰
$(-1,-1,1)$	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۳	−۰/۰۰۲	−۰/۰۰۰
$(-1,1,-1)$	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۳
$(1,-1,-1)$	−۰/۰۲۴	−۰/۰۲۴	−۰/۰۱۴	−۰/۰۱۲
$(-1,-1,-1)$	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰

بحث و نتیجه‌گیری

برقراری ویژگی وابستگی مثبت(هم‌راستا) (POD) و نیز مثبت بودن اندازه ضرایب وابستگی جهتی برای جهت‌های (۱, ۱, ۱) یا (−۱, −۱, −۱)، به معنای آن است که افزایش درآمد خانوار، با هزینه‌ای که صرف خرید محصولات فرهنگی می‌کنند، و نیز هزینه‌ای که بابت خرید کالاهای متفرقه متقبل می‌شوند، هم‌راستا است. هم‌چنین برقراری ویژگی وابستگی منفی (هم‌راستا) (NOD) و نیز منفی بودن اندازه ضرایب وابستگی جهتی برای جهت‌های (۱, ۱, −۱) یا (−۱, −۱, ۱)، به معنای آن است که کاهش درآمد با کاهش هزینه خرید محصولات فرهنگی و نیز کالاهای مصرفی هم‌راستا است. برقراری ویژگی وابستگی مثبت (هم‌راستا) و نیز مثبت بودن اندازه ضرایب وابستگی جهتی برای جهت‌های (۱, −۱, ۱) یا (−۱, ۱, −۱)را می‌توان به این صورت تفسیر کرد که خانواده‌ها با افزایش درآمد، تمایل بیشتری به خرید محصولات مصرفی غیر ضروری دارند تا کالاهای فرهنگی، اما با توجه به این که مقدار به دست آمده برای ضرایب وابستگی جهتی در این حالت بیشتر از جهت‌های (۱, ۱, ۱) یا (−۱, −۱, −۱) است، می‌توان به این صورت نتیجه گرفت که با افزایش درآمد خانوار، بودجه اختصاص داده شده به خرید کالاهای متفرقه، بیشتر از خرید محصولات فرهنگی است.

با توجه به برقراری ویژگی وابستگی منفی (هم‌راستا) و نیز منفی بودن اندازه ضرایب وابستگی جهتی برای جهت‌های (−۱, ۱, ۱)یا (۱, −۱, −۱)، تفسیر آن به این صورت می‌تواند باشد که با کاهش درآمد خانوار و هزینه‌ای که صرف خرید محصولات فرهنگی می‌شود، هزینه ای که به خرید کالاهای متفرقه اختصاص می‌یابد، کاهش می‌یابد. اما باید توجه کرد که با کاهش درآمد خانوار و نیز کاهش دادن هزینه‌های صرف شده بابت خرید محصولات فرهنگی، هزینه‌ای که صرف خرید کالاهای متفرقه می‌شود، در مقایسه با جهت‌های (۱, ۱, −۱) یا (−۱, −۱, ۱) کاهش کمتری می‌یابد. از مجموع موارد بیان شده، نتیجه می‌شود که با کاهش درآمد، خانواده‌ها تمایل بیشتری به کاهش دادن هزینه‌های خرید محصولات فرهنگی دارند تا خرید کالاهای متفرقه. این امر نشان دهنده اولویت ندادن خانواده‌ها به خرید کالاهای فرهنگی و به خصوص کتاب است که با حداقل صرفه جویی در خرید برخی از کالاهای غیرضروری امکان پذیر می‌شود. برون رفت از وضع موجود، نیازمند به همگامی دو بخش حاکمیت و نهاد خانواده دارد، یعنی حمایت دولتی و فرهنگ سازی در خانواده‌ها، تنها در این صورت می‌توان جایی برای کالاهای فرهنگی در سبد خانواده ها باز کرد، که یکی از این اقدامات می‌تواند به صورت اختصاص بخشی از درآمد هر ماه برای خرید کتاب باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات ارزنده داوران که باعث بهبود کیفیت مقاله گردید، تشکر می‌کنند. هم‌چنین از تمامی زحمات و راهنمایی‌های سردبیر و ویراستار محترم مجله علوم آماری، نهایت تشکر و قدردانی می‌شود.

مراجع

دادخواه، ک. (۱۳۹۳)، چه سیاست‌هایی اقتصاد را مقاومتی می‌کند؟، هفته‌نامه اقتصادی تجارت فردا، ۱۰۰، ۱۴۳.

عابری، س. (۱۳۸۶)، جایگاه کالاهای فرهنگی در سبد خانوارهای ایرانی، سرمایه، **۵۱۲**، ۱۱.

قاسم‌نژاد، م.، امینی، م. و جباری نوقابی، ه. (۱۳۹۱)، تحلیلی از برآوردگرهای اندازه وابستگی دمی بالا، مجله علوم آماری، ۶، ۲، ۱۳۴-۱۱۹.

محمودی، و. (۱۳۹۳)، دانشجویان تجارت فردا بخوانند، هفته‌نامه اقتصادی تجارت فردا، ۱۰۰، ۳۸.

مرکز آمار ایران (۱۳۹۰)، چکیده نتایج طرح آمارگیری هزینه و درآمد خانوارهای شهری و روستایی، دفتر جمعیت، نیروی کار و سرشماری، ۱۹-۱.

Deheuvels, P. (1981), A Nonparametric Test for Independence, *Publications de l'Institut de statistique de l'Universite de Paris*, **26**, 29-50.

Fisher, N. and Switzer, P. (2001), Graphical Assessment of Dependence: Is a Picture Worth 100 tests? *The American Statistician*, **55**, 233-239.

Genest, C. and Boies, J. (2003), Detecting Dependence with Kendall Plots, *The America Statiscian*, **57**, 275-284.

Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L. P. (1995), A Semiparametric Estimation Procedure of Dependence Parameters in Multivariate Families of Distributions, *Biometrika*, **82**, 543-552.

Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.

Kojadinovic, I. Yan and J. (2010), Modeling Multivariate Distributions with Continuous Margins Using the Copula R package, *Journal of statistical software*, **34**, 1-20.

Kojadinovic, I. and Holmes, M. (2009), Tests of Independence Among Continuous Random Vectors based on Cramer-von Mises Functional of the Empirical Copula Process, *Journal of Multivariate Analysis*, **6**, 1137-1154.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Springer Series in Statistics, New York.

Nelsen, R. B. and Ubeda-Flores, M. (2012), Directional Dependence in Multivariate Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **64**, 677-685.

Quesada-Molina, J. J., Ubeda-Flores, M. and Rodriguez-Lallena, J. A. (2003), What are Copulas?, *Monografias del Semin.Matem.Garcia de Galdeano*, **27**, 499-506.

Quesada-Molina, J. J. and Ubeda-Flores, M. (2012), Directional Dependence of Random Vectors, *Information Sciences*, **215**, 67-74.

Rodriguez-Lallena, J. A. and Ubeda-Flores, M. (2004), A New Class of Bivariate Copulas, *Statistics and Probability Letters*, **66**, 315-325.