

برآورد تابع کوواریانس فضایی با استفاده از روش درستنمایی مرکب بلوکی تفاضلی

علی محمدیان مصمم، سروه محمدی

گروه آمار، دانشگاه زنجان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۰۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: در این مقاله پارامترهای تابع کوواریانس‌های فضایی با استفاده از روش درستنمایی مرکب بلوکی برآورد می‌شود. در این روش درستنمایی مرکب با استفاده از تابع‌های چگالی توأم بلوک‌های زوجی داده‌های تفاضل‌یافته ساخته می‌شود. برای این منظور پس از انجام تفاضل‌گیری مجموعه داده‌های بزرگ را به مجموعه داده‌های کوچک‌تر افراز کرده تابع درستنمایی هر یک از مجموعه داده‌های کوچک‌تر به طور جداگانه محاسبه و در نهایت از طریق جمع به سادگی با هم ترکیب می‌شوند. از مزایای روش درستنمایی بلوکی این است که نیازی به معکوس کردن و محاسبه دترمینان ماتریس‌های با ابعاد بالا ندارد. سپس با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی روش ارائه شده در این مقاله با روش درستنمایی مرکب بلوکی زوجی از نظر کارایی و محاسباتی مقایسه می‌شود. مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگرهای حاصل از روش ارائه شده به خوبی برآوردگرهای درستنمایی است. در نهایت یک داده واقعی مورد تحلیل قرار خواهد گرفت. **واژه‌های کلیدی:** آمار فضایی، ایستایی، همسانگردی، اطلاع گودامب، تابع درستنمایی مرکب.

۱ مقدمه

در سال‌های اخیر افزایش فوق‌العاده‌ای در حجم داده‌های فضایی صورت گرفته است. این افزایش به دلیل رشد بیش از اندازه فن‌آوری‌های جدید و دستگاه‌های کنترل از راه دور و همچنین افزایش روزافزون ذخیره‌سازی داده‌های دیجیتالی است. فرض کنید $\{Z(s_i); s_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n\}$ مجموعه‌ای از داده‌های فضایی باشد که در موقعیت‌های فضایی مشاهده شده‌اند. اگر داده‌ها دارای توزیع گاوسی با

میانگین μ و کوواریانس فضایی $C(s_i, s_j; \theta)$ باشند که در آن بردار θ پارامتر مجهول تابع کوواریانس است، آنگاه معمولاً برای برآورد پارامتر θ از روش ماکسیم درستنمایی استفاده می‌شود. روش ماکسیم درستنمایی ویژگی‌های بهینه زیادی نظیری کارایی، سازگاری و بطور مجانبی نرمال بودن برآوردگرها را دارد. اما چون روش برآورد ماکسیم درستنمایی شامل محاسبه وارون و دترمینال ماتریس کوواریانس می‌باشد، برای مجموعه داده‌های بزرگ این امر مشکل و گاهی غیرممکن است. این محاسبات نیازمند $O(n^3)$ عملیات می‌باشد که در آن n تعداد داده‌های فضایی است. برای محاسبه تابع درستنمایی روش‌های متعددی در مقالات ارائه شده است. فورر و همکاران (۲۰۰۶) و کافمن و همکاران (۲۰۰۸) عمل باریک‌سازی تابع کوواریانس را پیشنهاد دادند. ایده آنها این بود که تابع کوواریانس در خارج از یک ناحیه معین صفر در نظر گرفته شود. این ایده وقتی مفید است که داده‌ها همبستگی طولانی مدت نداشته باشند. کرسی و یوهانس (۲۰۰۸) مدل‌های فضایی با اثرات مختلط را پیشنهاد دادند. مدل‌های ارائه شده آنها نیازمند محاسبه وارون و دترمینان کوواریانس‌های با ابعاد به مراتب کمتر از بُعد کوواریانس اولیه است. روش دیگر تقریب تابع درستنمایی، روش درستنمایی مرکب است.

ایده ساخت تابع درستنمایی مرکب تفاضلی اولین بار توسط کروبو و ل (۱۹۹۹) ارائه گردید. بویلاک و همکاران (۲۰۱۲) این ایده را به داده‌های فضایی-زمانی توسعه دادند. اخیراً محمدیان مصمم (۲۰۱۶) تابع درستنمایی مرکب فضایی-زمانی در قلمرو فرکانس را ارائه کرده است. در این مقاله برای برآورد پارامترهای مدل فضایی از روش درستنمایی مرکب بلوکی تفاضل یافته استفاده می‌شود. درستنمایی مرکب از حاصل ضرب چند درستنمایی توأم زیر مجموعه‌های کوچک‌تر داده‌ها ساخته می‌شود. انگیزه اصلی ما از استراتژی بلوکی کردن، استفاده از همبستگی‌های فضایی داده‌ها است به طوری که با افراز داده‌ها همچنان همبستگی فضایی محفوظ بماند ولی پیچیدگی محاسباتی تا حد ممکن کاهش یابد. همچنین با استفاده از محاسبات موازی برای محاسبه درستنمایی‌های حاشیه‌ای سرعت محاسبات افزایش می‌یابد (ایدزویک و همکاران، ۲۰۱۴).

ایده درستنمایی مرکب را ابتدا بسیج (۱۹۷۵) برای داده‌های فضایی ارائه کرد. برای جزئیات بیشتر به لیندسی (۱۹۸۸) ارجاع داده می‌شود. در مقالات متعددی خواص مجانبی درستنمایی مرکب مطالعه شده است. به عنوان نمونه برآوردگر ماکسیم درستنمایی مرکب همانند برآوردگر ماکسیم درستنمایی سازگار و بطور مجانبی نرمال است (وارین، ۲۰۰۸؛ بویلاک و همکاران، ۲۰۱۲). اگرچه کوواریانس مجانبی روش درستنمایی مرکب به جای ماتریس اطلاع فیشر، ماتریس اطلاع گودامب است (گودامب، ۱۹۶۰).

در بخش ۲ تابع درستنمایی مرکب بلوکی با استفاده از تغییرنگار ساخته می‌شود. در بخش ۳ استنباط درستنمایی مرکب بلوکی ارائه می‌گردد. در بخش ۴ با استفاده از مطالعه شبیه‌سازی به ارزیابی روش پیشنهادی پرداخته می‌شود. در بخش ۵ به تحلیل داده‌های واقعی زلزله پرداخته خواهد شد. در نهایت در بخش ۵ به بحث و نتیجه‌گیری مقاله پرداخته می‌شود.

۲ تابع درستنمایی مرکب بلوکی با استفاده از تابع تغییرنگار

میدان تصادفی $\{Z(s); s \in D \subseteq \mathbb{R}^d\}$ را در نظر بگیرید. تابع تغییرنگار فضایی به صورت

$$\gamma(s_i, s_j) = \text{Var}(Z(s_i) - Z(s_j)), \quad s_i, s_j \in D$$

تعریف می‌شود، که در آن $\gamma(s_i, s_j)$ را نیم‌تغییرنگار فضایی می‌گویند. فرض کنید فرآیند $Z(s)$ ایستا باشد. در این صورت کوواریانس فضایی با شرط متناهی بودن واریانس $\text{Var}(Z(s)) < \infty$ به صورت

$$C(s_i - s_j) = \text{Var}(Z(s)) - \gamma(s_i - s_j),$$

است. همچنین فرض کنید $h_{ij} = h(s_i, s_j) = \|s_i - s_j\|$ فاصله اقلیدسی بین دو موقعیت فضایی s_i و s_j باشد. با فرض همسانگردی میدان تصادفی تابع تغییرنگار فقط به قدرمطلق فاصله بین دو موقعیت فضایی بستگی دارد. یک مثال از مدل تغییرنگار همسانگرد، مدل مترن به صورت

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{\phi}\right)^\nu \kappa_\nu\left(\frac{h}{\phi}\right), \quad (1)$$

است، که در آن $\theta = (\sigma^2, \phi, \nu)$ پارامترهای مدل تابع تغییرنگار مترن است، به طوری که در آن ϕ پارامتر دامنه، ν پارامتر همواری، σ^2 آستانه را نشان می‌دهد و $\kappa_\nu(\cdot)$ تابع بسل اصلاح شده‌ی نوع دوم مرتبه ν است. مدل نمایی حالت خاصی از مدل مترن است که به صورت

$$\gamma(h) = \sigma^2 - \sigma^2 \exp\left\{-\frac{|h|}{\phi}\right\},$$

تعریف می‌شود.

اگر $Z \sim N(\mu, \Sigma)$ که μ بردار میانگین برای داده‌های $Z = (Z(s_1), \dots, Z(s_n))^T$ و Σ ماتریس کوواریانس با مؤلفه‌های $C(s_i - s_j; \theta)$ است، در این صورت، برآورد ماکسیمم درستنمایی θ از ماکسیمم‌سازی تابع لگ-درستنمایی

$$\ell(\theta, \mu; Z) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} (\mathbf{Z} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{Z} - \mu),$$

حاصل می‌شود، که در آن $|A|$ دترمینان و A^{-1} معکوس ماتریس A است.

در این مقاله ابتدا تبدیل تفاضلی $Z_c = \{Z(s_i) - Z(s_1); i = 2, \dots, n\}$ روی داده‌ها انجام می‌شود. کرویو و لیل (۱۹۹۹) برای اولین بار ایده ساخت درستنمایی مرکب تفاضلی را ارائه نمودند. با فرض ایستایی ذاتی فرآیند تصادفی $Z(s)$ ، این ایده علاوه بر این که باعث حذف پارامتر مزاحم μ می‌شود، مؤلفه‌های تابع کوواریانس را برحسب تابع تغییرنگار بدست می‌آورد که جزئیات آن به صورت زیر است. توجه کنید که $Z_c = QZ \sim N(0, \Psi)$ ، که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریسی $n \times (n-1)$ بُعدی است به طوری که ستون اول آن شامل ۱- است و درایه‌های ستون i -ام آن بجز مؤلفه i -ام صفر هستند و $\Psi = Q\Sigma Q^T$ ماتریس کوواریانس $(n-1) \times (n-1)$ بُعدی با مؤلفه‌های

$$\Psi_{ii}(\theta) = 2\gamma(s_i, s_1; \theta),$$

$$\Psi_{ij}(\theta) = \gamma(s_i, s_1; \theta) + \gamma(s_j, s_1; \theta) - \gamma(s_i, s_j; \theta)$$

است. در این صورت، تابع لگ-درستنمایی بدون در نظر گرفتن مقادیر ثابت به صورت

$$\ell(\theta; \mathbf{Z}_c) = -\frac{1}{2} \log |\Psi| - \frac{1}{2} \mathbf{Z}_c^T \Psi^{-1} \mathbf{Z}_c,$$

خواهد بود. فرض کنید $\{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ مجموعه‌ای از پیشامدهای حاشیه‌ای یا شرطی باشد که هر کدام دارای تابع درستنمایی $M, \dots, 2, 1, k$; $L_k(\theta; \mathbf{Z}_c)$ است. آنگاه لیندسی (۱۹۸۸) درستنمایی مرکب را به صورت

$$CL(\theta; \mathbf{Z}_c) = \prod_{k=1}^M L_k(\theta; \mathbf{Z}_c),$$

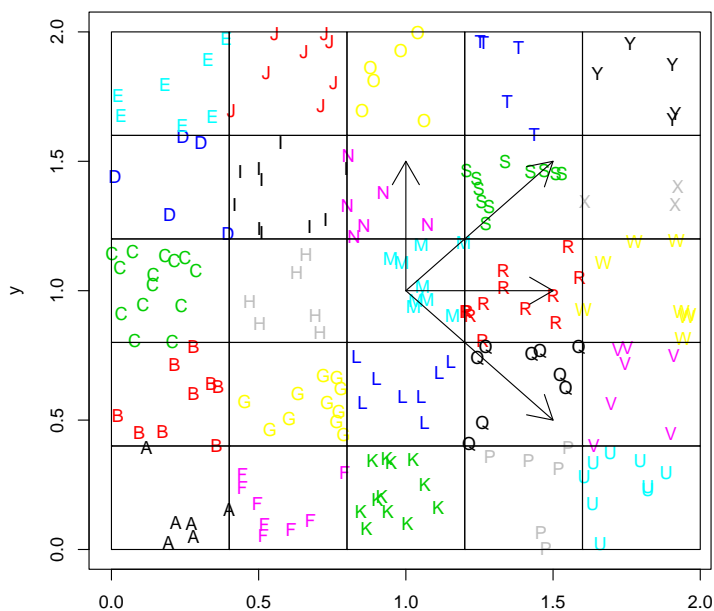
تعریف کرد. به منظور تعریف درستنمایی مرکب بلوکی تفاضلی ابتدا فضای اندیس D را به M بلوک دوبه‌دو مجزا به صورت D_1, \dots, D_M افراز می‌شود، به طوری که تعداد داده‌های فضایی بلوک k برابر n_k و $\sum_k n_k = n$ برقرار باشد. همچنین فرض کنید که $\mathbf{Z}_{k\ell_c} = (\mathbf{Z}_{k_c}, \mathbf{Z}_{\ell_c})^T$ که در آن $\mathbf{Z}_{k_c} = \{Z_c(s); s \in D_k\}$ ، $\ell \neq k$ و $\mathbf{Z}_{\ell_c} = \{Z_c(s); s \in D_\ell\}$ ، $\ell = 1, \dots, M$ از وابستگی ناچیز بین بلوک‌هایی که مجاور هم نیستند، تابع لگ-درستنمایی مرکب بلوکی به صورت

$$\begin{aligned} \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_{k\ell_c}) &= \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell_c > k} \ell(\mathbf{Z}_{k\ell_c}; \theta) \\ &= \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell_c > k} \left[-\frac{1}{\nu} \log |\Psi_{k\ell}| - \frac{1}{\nu} \mathbf{Z}_{k\ell_c}^T \Psi_{k\ell}^{-1} \mathbf{Z}_{k\ell_c} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

تعریف می‌شود، که در آن

$$\Psi_{k\ell} = \begin{bmatrix} \Psi_k(1, 1) & \Psi_{k\ell}(1, 2) \\ \Psi_{k\ell}(2, 1) & \Psi_\ell(2, 2) \end{bmatrix},$$

به گونه‌ای که در آن Ψ_k و Ψ_ℓ به ترتیب ماتریس‌های همبستگی مربوط به بلوک‌های k و ℓ است و ماتریس $\Psi_{k\ell}$ همبستگی تقاطعی بلوک k و ℓ را نشان می‌دهد. شکل ۱ نمونه‌ای از بلوک‌بندی منظم است که در بخش شبیه‌سازی انجام گرفت. پیکان‌هایی که از بلوک M رسم شده‌اند، بلوک‌های مجاور پیشرو بلوک M را نشان می‌دهند. فرض کنید N_k بلوک‌های همسایه بلوک K باشند. مجموعه‌ی همسایگی N_k را می‌توان به صورت مجموعه پیشرو $N_k^+ = \{\ell > k\} \cap \{\ell \in N_k\}$ و مجموعه پسرو $N_k^- = \{\ell < k\} \cap \{\ell \in N_k\}$ نمایش داد. بلوک‌های مجاور پیشرو برای بلوک M در شکل ۱



شکل ۱: نمونه‌ای از بلوک‌بندی منظم که در بخش شبیه‌سازی انجام گرفته است. پیکان‌هایی که از بلوک M رسم شده‌اند، بلوک‌های مجاور پیشرو بلوک M را نشان می‌دهند.

عبارتند از $N_M^{\rightarrow} = \{N, Q, R, S\}$. بنابراین تابع لگ-درستنمایی مرکب بلوکی به صورت

$$\ell_{CL}(\boldsymbol{\theta}; Z_c) = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{\ell \in N_k^{\rightarrow}} \left[-\frac{1}{\nu} \log |\Psi_{k_c}| - \frac{1}{\nu} \mathbf{z}_{k\ell_c}^T \Psi_{k_c}^{-1} \mathbf{z}_{k\ell_c} \right],$$

نوشته می‌شود. برای خلاصه‌نویسی علامت‌گذاری اندیس با j نشان داده می‌شود، که در آن مجموعه حاشیه‌ای $\Psi_j = \Psi_{k\ell}$ ، $Z_{j_c} = Z_{k\ell_c}$ در این صورت داده شده است. در این صورت

$$\ell_{CL}(\boldsymbol{\theta}; Z_c) = \sum_j \left[-\frac{1}{\nu} \log |\Psi_j| - \frac{1}{\nu} \mathbf{z}_{j_c}^T \Psi_j^{-1} \mathbf{z}_{j_c} \right]. \quad (۲)$$

۳ استنباط درست‌نمایی مرکب بلوکی

برآوردگر ماکسیم درست‌نمایی مرکب به صورت $\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta} \ell_{CL}(\theta; Z_c)$ بدست می‌آید. در ادامه برخی خواص برآوردگر ماکسیم درست‌نمایی مرکب بلوکی بر اساس مفهوم تابع امتیاز بررسی می‌شود (گودامب و کیل، ۱۹۹۱). جزئیات بیشتر در مورد این خواص را می‌توان در گودامب و تامسون (۱۹۸۴) و لی (۱۹۹۶) یافت. تابع امتیاز بلوکی به صورت

$$\frac{\partial \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)}{\partial \theta_r}, r = 1, \dots, p,$$

تعریف می‌شود، که در آن p بُعد پارامتر θ است. با مشتق‌گیری از رابطه (۳) نسبت به θ_r تابع امتیاز بلوکی وقتی که داده‌های تفاضل‌یافته گاوسی هستند به صورت

$$\frac{\partial \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)}{\partial \theta_r} = \sum_j \left[-\frac{1}{\Psi} \operatorname{tr}(W_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta_r}) + \frac{1}{\Psi} \mathbf{Z}_{c_j}^T W_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta_r} W_j \mathbf{Z}_{c_j} \right], \quad (۴)$$

بدست می‌آید، که در آن $W_j = \Psi_j^{-1}$. اگر از طرفین رابطه (۴) امید ریاضی گرفته شود، با استفاده از رابطه $E(Z^T A Z) = \operatorname{tr}(A \Psi)$ ملاحظه می‌شود که تابع امتیاز مرکب بلوکی، تابع برآورد ناریب برای θ در هر بلوک است:

$$E\left(\frac{\partial \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)}{\partial \theta_r}\right) = \sum_j \left[-\frac{1}{\Psi} \operatorname{tr}(W_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta_r}) + \frac{1}{\Psi} \operatorname{tr}(W_j \frac{\partial \Psi_j}{\partial \theta_r}) \right] = 0. \quad (۵)$$

تحت شرایط نظم، هنگامی که $n \rightarrow \infty$ ، $\hat{\theta}$ برآوردگر سازگار بوده و دارای توزیع مجانبی نرمال به صورت $(\hat{\theta} \sim N(\theta, G^{-1}(\theta)))$ است (لیندسی، ۱۹۸۸؛ وارین، ۲۰۰۸)، که در آن $G(\theta)$ ماتریس اطلاع گودامب (۱۹۶۰) به صورت

$$G(\theta) = H(\theta) J^{-1}(\theta) H(\theta),$$

است و

$$H(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)}{\partial \theta^2}\right)$$

۵۲۰ برآورد تابع کوواریانس فضایی با استفاده از روش درستنمایی مرکب بلوکی تفاضلی

$$J(\theta) = \text{Var}\left(\frac{\partial \ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)}{\partial \theta}\right).$$

حتی اگر توزیع‌های حاشیه‌ای تفاضل‌ها غیر گاوسی باشند به سادگی می‌توان نشان داد که تحت افزایش دامنه برآوردگر فوق سازگار است (والد، ۱۹۴۹).

در اینجا اثبات بیان نمی‌شود، اما نامساوی کلیدی زیر که در اثبات بکار می‌رود را شرح داده می‌شود. با فرض این که امید ریاضی موجود باشد ایده اصلی اثبات والد نابرابری

$$E[-\ell_{CL}(\theta; \mathbf{Z}_c)] < E[-\ell_{CL}(\theta_0; \mathbf{Z}_c)], \quad (۶)$$

است، که در آن θ_0 پارامتر واقعی θ است. لی (۱۹۹۶) نشان داد که اگر نامساوی مشابه برای هر تابع هدف برقرار باشد، سازگاری برقرار است. توجه کنید که برای هر مؤلفه $V_{ij} = Z(s_i) - Z(s_j)$ داریم

$$V_{ij} \sim N(0, 2\gamma(s_i, s_j)).$$

در نتیجه تابع درستنمایی مرکب می‌تواند به صورت

$$CL(\theta; V_{ij}) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j>n}^n L(\theta; V_{ij})$$

نوشته شود، که در آن

$$L(\theta; V_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2\gamma(s_i, s_j)}} \exp\left(-\frac{(Z(s_i) - Z(s_j))^2}{4\gamma(s_i, s_j)}\right).$$

در نتیجه منفی لگ-درستنمایی مرکب به صورت

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>n}^n \left(\log \gamma(s_i, s_j) + \frac{(Z(s_i) - Z(s_j))^2}{4\gamma(s_i, s_j)} \right)$$

است. بنابراین برای اثبات رابطه (۶) لازم است رابطه

$$\log \gamma(s_i, s_j; \theta) + \frac{\gamma(s_i, s_j; \theta_0)}{\gamma(s_i, s_j; \theta)} \geq \log \gamma(s_i, s_j; \theta_0) + \frac{\gamma(s_i, s_j; \theta)}{\gamma(s_i, s_j; \theta_0)}.$$

اثبات شود. به عبارت دیگر لازم است نشان داده شود که

$$\log \frac{\gamma(s_i, s_j; \theta)}{\gamma(s_i, s_j; \theta_0)} \geq 1 - \frac{\gamma(s_i, s_j; \theta_0)}{\gamma(s_i, s_j; \theta)}.$$

از آنجا که $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$ به ازای هر $x > 0$ برقرار است، اثبات واضح است.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده برآوردگر روش درست‌نمایی مرکب بلوکی و روش درست‌نمایی مرکب مقایسه می‌شوند. شبیه‌سازی با مدل تغییرنگار مترن رابطه (۱) انجام گرفته است، که در آن $\theta = (\sigma^2, \phi, \nu)$ پارامترهای تابع تغییرنگار مترن می‌باشند. در این مطالعه شبیه‌سازی 500 داده از میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و واریانس و پارامتر $\theta = (1, 0/2, 0/5)$ تولید کرده‌ایم. موقعیت‌های فضایی بطور تصادفی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ انتخاب شده‌اند. نتایج حاصل از 1000 تکرار شبیه‌سازی در جدول ۱ خلاصه شده است که شامل مقایسه برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی (ML)، ماکسیمم درست‌نمایی مرکب (CL) و ماکسیمم درست‌نمایی‌های بلوکی CL_5 ، CL_6 و CL_7 است.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود میانگین توان دوم خطا (MSE) و احتمال پوشش روش درست‌نمایی مرکب بلوکی بسیار نزدیک به روش درست‌نمایی مرکب است و در مواردی روش درست‌نمایی مرکب بلوکی بهتر از درست‌نمایی مرکب است. لازم به ذکر است که چون در روش درست‌نمایی مرکب بلوکی می‌توان از محاسبات موازی برای محاسبات درست‌نمایی بلوک‌ها استفاده کرد، سرعت محاسبات این روش به مراتب بیشتر از دیگر روش‌ها است. شکل ۲ نمودارهای جعبه‌ای برآوردهای پارامترها را در 1000 تکرار نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش‌های مختلف برآورد برای پارامترهای واریانس بسیار شبیه هم هستند. در مورد سایر پارامترها برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برآوردی بهتر با پراکندگی کمتر و برآورد درست‌نمایی مرکب بلوکی تقاضای برآوردی بهتر از روش درست‌نمایی مرکب بدون عمل بلوک‌بندی را نتیجه می‌دهد.

۵۲۲ برآورد تابع کوواریانس فضایی با استفاده از روش درستنمایی مرکب بلوکی تفاضلی

جدول ۱: مقایسه برآوردگرها برای پارامترهای واقعی $\sigma^2 = 1$ ، $\phi = 0/2$ و $\nu = 0/5$ مدل (۱).

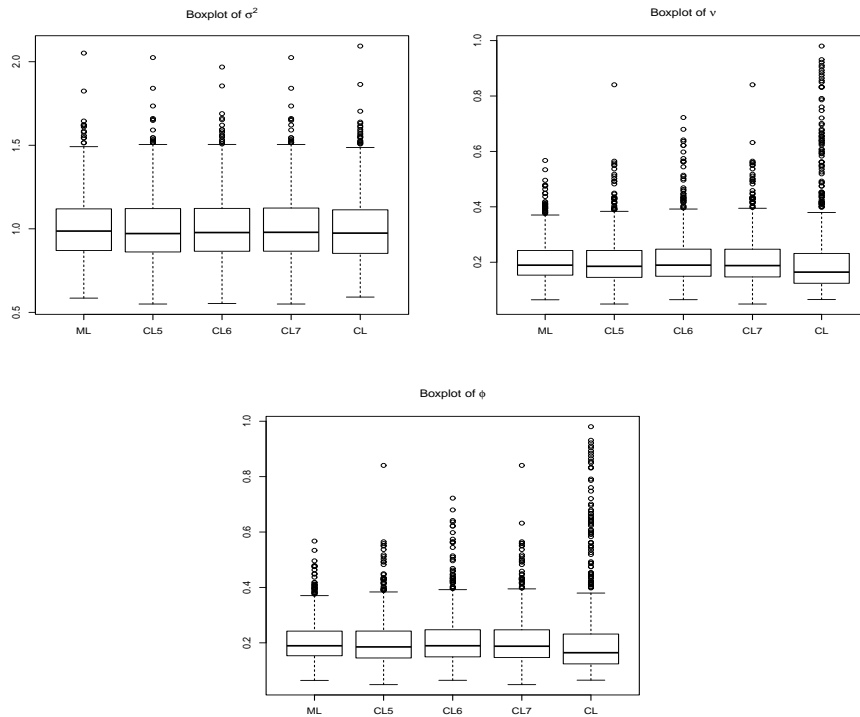
CL	CL_{ν}	CL_{ϕ}	CL_{σ^2}	ML	پارامتر	روش برآورد
0/584	0/580	0/557	0/546	0/527	ν	برآورد
0/999	1/028	1/017	1/028	1/003	σ^2	
0/209	0/224	0/211	0/248	0/203	ϕ	
0/045	0/037	0/027	0/023	0/013	ν	MSE
0/040	0/039	0/039	0/038	0/035	σ^2	
0/021	0/023	0/024	0/009	0/005	ϕ	
0/912	0/899	0/900	0/901	0/898	ν	احتمال پوشش
0/889	0/865	0/871	0/870	0/877	σ^2	
0/811	0/831	0/844	0/845	0/850	ϕ	

۵ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش داده‌های مربوط به زلزله ثبت شده در سازمان زلزله‌نگاری کشور مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از آنجا که ایران روی خط فرضی زلزله واقع شده است، تحلیل زلزله از اهمیت قابل توجهی برخوردار است. برای این منظور به طور تصادفی ۴۰۰۰ داده ثبت شده در سازمان لرزه‌نگاری کشور انتخاب شده و تابع کوواریانس فضایی مترن به آن برازش داده شده است. داده‌های زلزله برحسب شدت وقوع بر معیار ریشتر هستند.

در شکل ۳ نمودار موقعیت‌های ثبت زلزله‌های انتخاب شده و همچنین بلوک‌بندی انجام گرفته برای تحلیل داده‌ها نمایش داده شده است. واضح است که اکثر زلزله‌های بزرگ که با رنگ تیره مشخص شده‌اند در محدوده رشته کوه‌ها واقع شده‌اند. برآورد ماکسیمم درستنمایی مرکب بلوکی تفاضلی پارامترهای مترن و انحراف استانداردهای مربوطه عبارتند از: $\nu = 0/53(0/154)$ ، $\sigma^2 = 1/239(0/285)$ و $\phi = 0/289(0/044)$.

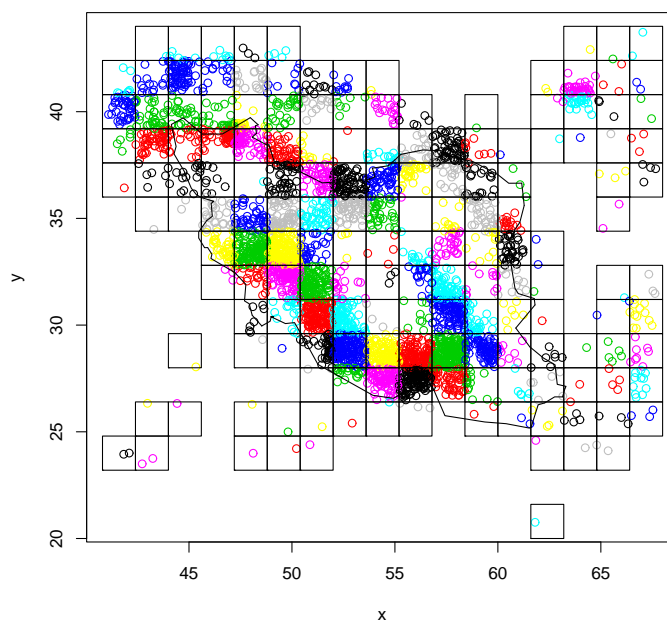
مدل برازش داده شده نشان می‌دهد که ساختار همبستگی داده‌های مورد نظر تقریباً شبیه مدل نمایی است و به جای مدل مترن برای سادگی می‌توان مدل نمایی را بر داده‌ها برازش کرد. سرانجام لازم به توضیح است که تمام محاسبات این مقاله با نرم‌افزار R و استفاده از بسته‌های `geoR`، `mnormt` و `CompRandFld` انجام شده است.



شکل ۲: نمودار جعبه‌ای برآورد پارامترهای ν ، σ^2 و ϕ .

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش درست‌نمایی مرکب بلوکی تفاضلی برای برآورد پارامترهای تابع کوواریانس فضایی وقتی که اندازه نمونه بسیار بزرگ است و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی قابل محاسبه نیست ارائه شده است. مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که روش درست‌نمایی مرکب بلوکی تفاضلی به خوبی روش درست‌نمایی مرکب است. از طرف دیگر با توجه به اینکه در این روش پارامتر مزاحم از مدل حذف شده است الگوریتم بهینه‌سازی درست‌نمایی بسیار راحت‌تر می‌باشد. از نظر محاسباتی چون مؤلفه‌های درست‌نمایی مرکب بلوکی را می‌توان با محاسبات موازی انجام داد، این روش بسیار سریع‌تر از روش‌های کلاسیک است.



شکل ۳: بلوک‌بندی منظم ثبت موقعیت‌های زلزله در ایران.

مراجع

- Besag, J. (1975), Statistical Analysis of non-Lattice Data, *The statistician*, **24**, 179-195.
- Bevilacqua, M., Gaetan, C., Mateu, J., and Porcu, E. (2012), Estimating Space and Space-Time Covariance Functions for Large Data Dets: a Weighted Composite Likelihood Approach, *Journal of the American Statistical Association*, **107**, 268-280.
- Cressie, N. and Johannesson, G. (2008), Fixed Rank Kriging for Very Large Spatial Data Sets, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **70**, 209-226.
- Curriero, F. C. and Lele, S. (1999), A Composite Likelihood Approach to Semivariogram Estimation, *Journal of Agricultural, biological, and Environmental statistics*, **4**, 9-28.

- Eidsvik, J., Shaby, B. A., Reich, B. J., Wheeler, M., and Niemi, J. (2014), Estimation and Prediction in Spatial Models with Block Composite Likelihoods, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **23**, 295-315.
- Furrer, R., Genton, M. G., and Nychka, D. (2006), Covariance Tapering for Interpolation of Large Spatial Datasets, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **15**, 502-523.
- Godambe, V. and Thompson, M. (1984), Robust Estimation through Estimating Equations, *Biometrika*, **71**, 115-125.
- Godambe, V. P. (1960), An Optimum Property of Regular Maximum Likelihood Estimation, *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 1208-1211.
- Godambe, V. P. and Kale, B. K. (1991), Estimating Functions: an Overview, *Estimating functions*, **7**, 3-20.
- Kaufman, C. G., Schervish, M. J., and Nychka, D. W. (2008), Covariance Tapering for Likelihood-based Estimation in Large Spatial Data Sets, *Journal of the American Statistical Association*, **103**, 1545-1555.
- Lele, S. R. (2006), Sampling Variability and Estimates of Density Dependence: A Composite-Likelihood Approach, *Ecology*, **87**, 189-202.
- Li, B. (1996), A Minimax Approach to Consistency and Efficiency for Estimating Equations, *The Annals of Statistics*, **24**, 1283-1297.
- Lindsay, B. G. (1988), Composite Likelihood Methods, *Contemporary mathematics*, **80**, 221-39.
- Mosammam, A. M. (2016), Half Spectral Composite Likelihood Approach for Estimating Spatial-Temporal Covariance Functions, *Spatial Statistics*, **16**, 19-34.
- Varin, C. (2008), On Composite Marginal Likelihoods, *AStA Advances in Statistical Analysis*, **92**, 1-28.
- Wald, A. (1949), Note on the Consistency of the Maximum Likelihood Estimate, *The Annals of Mathematical Statistics*, **20**, 595-601.