

نتایجی در تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n با واحدهای وابسته

سید شاهرخ هاشمی بصرا^۱، ابراهیم صالحی^۲

گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند

گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۱۱/۲۸

چکیده: سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n یکی از مهمترین انواع سیستم‌های منسجم هستند که کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مهندسی دارند. در این مقاله متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی واحدهای شکست خورده سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n هنگامی که سیستم در زمان $t > 0$ از کار افتاده باشد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا سیستم‌های موازی شامل دو واحد تبادل‌پذیر را در نظر گرفته و با استفاده از تابع مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن رفتار تابع میانگین زمان از کار افتادگی واحدهای شکست خورده سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر را در بخش بعدی در نظر گرفته و در ادامه برخی ویژگی‌های ترتیب تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی برای این نوع سیستم‌ها بر اساس یک یا دو نمونه ارائه می‌شود. واژه‌های کلیدی: میانگین زمان از کار افتادگی، نرخ خطر معکوس، آماره‌های ترتیبی، تابع مفصل، ترتیب‌های تصادفی، قابلیت اعتماد.

۱ مقدمه

یک سیستم $(n - k + 1)$ از n سیستمی شامل n واحد است که این سیستم کار می‌کند اگر و فقط اگر حداقل $(n - k + 1)$ واحد از n واحد سیستم در حال کار باشد. سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n زیر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم صالحی، salehi@birjandut.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 62N05

کلاس بزرگی از سیستم‌های منسجم هستند که در برگیرنده سیستم‌های سری و موازی به ترتیب با $k = 1$ و $k = n$ هستند. در چند دهه‌ی گذشته نویسندگان زیادی قابلیت اعتماد و ویژگی‌های سالخورده‌ی این نوع سیستم‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. از جمله آنها می‌توان به اسدی (۲۰۰۶)، اسدی و بایرامو (۲۰۰۶)، لی و زاو (۲۰۰۸)، کوچار و زو (۲۰۱۰) و ژانگ (۲۰۱۱) اشاره کرد.

تابع میانگین زمان از کار افتادگی^۱ (MIT) یکی از مهم‌ترین اندازه‌ها در نظریه قابلیت اعتماد است. طی چندین سال گذشته، مطالعه و بررسی ویژگی این تابع برای سیستم‌های منسجم از جمله سیستم‌های سری، موازی و k از n مورد توجه محققان و نویسندگان زیادی قرار گرفته است. اسدی (۲۰۰۶) میانگین زمان از کار افتادگی را تعریف و برخی نتایج جالب را برای آن ارائه کرد. توانگر و اسدی (۲۰۱۰) نتایج اسدی (۲۰۰۶) را برای سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n شامل واحدهای مستقل و هم توزیع بسط دادند. صالحی و اسدی (۲۰۱۲) میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی^۲ (MGIT) سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n با واحدهای مستقل و نا هم توزیع را بررسی کردند. از جمله مطالعات دیگر درباره زمان از کار افتادگی می‌توان به خالدی و شیکد (۲۰۰۷)، لی و ژانگ (۲۰۰۸)، زاو و همکاران (۲۰۰۸) و توانگر (۲۰۱۶) اشاره کرد.

اکثر نتایج ذکر شده فوق تحت فرض استقلال واحدهای سیستم ارائه شده است. اما در جهان واقع، واحدهای قرار گرفته در یک شرایط محیطی یکسان تحت تاثیر یکدیگر قرار می‌گیرند، بنابراین فرض وابستگی بین واحدهای سیستم فرض منطقی و واقع‌بینانه است. اخیراً مطالعه وابستگی میان واحدهای سیستم‌های منسجم مورد توجه بسیاری از محققان و طراحان سیستم قرار گرفته است. از مهم‌ترین آنها می‌توان مقاله‌های کاتز و همکاران (۲۰۰۳)، ناوارو و همکاران (۲۰۰۷)، ژانگ (۲۰۱۰)، صادق (۲۰۱۱)، ناوارو و رویو (۲۰۱۱)، توانگر و اسدی (۲۰۱۵) و صالحی و هاشمی بصرا (۲۰۱۷) را نام برد. امروزه توابع مفصل که ابزار بسیار مفید و کارا برای توصیف و مدل‌سازی ساختار وابستگی بین طول عمر واحدها هستند، در تحلیل قابلیت اعتماد این نوع سیستم‌ها بکار رفته و نقش بسزایی در حل اینگونه مسائل ایفا می‌کنند. ناوارو و اسپیزیچینو (۲۰۱۰)، رضاپور و همکاران (۲۰۱۳)، جیا و همکاران (۲۰۱۴) و ناوارو و گومیز (۲۰۱۵) منابع مناسبی برای مطالعه در مورد ویژگی‌های تابع مفصل و کاربرد آن در زمینه قابلیت اعتماد سیستم‌ها هستند.

این مقاله بصورت زیر مرتب شده است. در بخش ۲ برخی مفاهیم و ابزارهایی که برای ارائه نتایج اصلی مقاله لازم است بیان می‌شوند. تعمیم زمان از کار افتادگی (GIT) سیستم موازی با دو واحد تبادل‌پذیر بر

^۱Mean Inactivity Time

^۲Mean General Inactivity Time

اساس تابع مفصل بویژه مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن (FGM) در بخش ۳ مورد مطالعه قرار گرفته و فرم صریحی برای میانگین این متغیر تصادفی شرطی بدست آورده می‌شود. در ادامه این بخش با ارائه مثال‌هایی رفتار تابع MGIT سیستم بررسی شده و با رفتار تابع MIT واحدهایی که تابع نرخ خطر معکوس آنها وانی-شکل باشند، مقایسه می‌شود. در بخش ۴، فرم بسته‌ای برای تابع قابلیت اعتماد (بقاء) تعمیم زمان از کارافتادگی سیستم $(n - k + 1)$ از n با واحدهای وابسته تبادل‌پذیر ارائه شده و ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی این متغیر تصادفی شرطی بر اساس یک یا دو نمونه بدست آورده می‌شود. بعلاوه، با ذکر مثال نتایج بدست آمده تشریح می‌شوند.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{T} = (T_1, \dots, T_n)$ نشان‌دهنده طول عمر واحدهای یک سیستم، دارای تابع توزیع توام دلخواه $F(t_1, \dots, t_n)$ و تابع بقاء متناظر $\bar{F}(t_1, \dots, t_n)$ باشد و $T_{1:n}, \dots, T_{n:n}$ آماره‌های مرتب شده متناظر با این طول عمرها باشند. همچنین فرض کنید T_i ها دارای تابع توزیع بطور مطلق پیوسته F_i ، تابع چگالی f_i و تابع بقاء \bar{F}_i ، $i = 1, \dots, n$ ، باشند.

تعریف ۱: متغیرهای تصادفی T_1, \dots, T_n ، تبادل‌پذیر نامیده می‌شوند اگر برای هر n ،

$$P(T_1 \leq t_1, \dots, T_n \leq t_n) = P(T_{\pi_1} \leq t_1, \dots, T_{\pi_n} \leq t_n),$$

برای هر جایگشت $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ از $\{1, \dots, n\}$ ، یعنی تابع توزیع توام (یا تابع بقاء توام) T_1, \dots, T_n در t_1, \dots, t_n متقارن باشد.

تابع بقاء سیستم $(n - k + 1)$ از n متشکل از واحدهایی با طول عمرهای تبادل‌پذیر T_1, \dots, T_n برابر است با:

$$\bar{F}_{k:n}(x) = P(T_{k:n} > t) = \sum_{j=n-k+1}^n (-1)^{j-n+k-1} \binom{j-1}{n-k} \binom{n}{j} P(T_{1:j} > t),$$

برای جزئیات بیشتر به دیوید و ناگاراچا (۲۰۰۳) مراجعه شود.

در بسیاری از مواقع اغلب سیستم‌ها به طور مداوم کنترل نمی‌شوند، بنابراین زمان دقیق از بین رفتن

واحدهای سیستم نامعلوم است. اطلاعات بیشتری در مورد گذشته سیستم ممکن است موضوعی مهم و مورد علاقه مهندسين و طراحان سیستم باشد. فرض کنید T طول عمر یک واحد با تابع توزیع $F(t)$ باشد که در زمان $t > 0$ یا قبل از آن از کار افتاده باشد. با این فرض متغیر تصادفی شرطی $\{t - T | T \leq t\}$ را زمان از کار افتادگی واحد می‌نامند. این متغیر شرطی در بعضی از متون نیز به طول عمر گذشته^۳ واحد نیز معروف است. میانگین زمان از کار افتادگی طول عمر واحد برای مقادیر t که $F(t) > 0$ ، بصورت

$$M(t) = E(t - T | T \leq t) = \frac{\int_0^t F(x) dx}{F(t)},$$

تعریف می‌شود. حال یک سیستم $(n - k + 1)$ از n با واحدهای تبادلی پذیر را در نظر بگیرید. در اکثر مواقع ممکن است دانستن زمان سپری شده از r امین واحد از کار افتاده، هنگامی که سیستم از کار افتاده است مهم باشد. فرض کنید سیستم $(n - k + 1)$ از n در زمان t یا قبل از آن از کار افتاده باشد. زمان از کار افتادگی واحدی با طول عمر $T_{r:n}$ در این سیستم بصورت $\{t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t\}$ ، $1 \leq r \leq k \leq n$ ، تعریف می‌شود. این متغیر شرطی همچنین به تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم معروف است. تابع میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی این سیستم برابر است با:

$$\Psi_{k:n}^r(t) = E(t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t).$$

برای تحلیل و مطالعه توزیع چند متغیره طول عمر واحدها از یک ابزار مفید و کارایی به نام تابع مفصل استفاده می‌شود. علاوه بر این، مفصل این امکان را فراهم می‌سازد تا ساختار وابستگی موجود بین متغیرها به خوبی توصیف شود. در حقیقت مفصل یک رابطه‌ای بین توابع توزیع چند متغیره و توابع توزیع حاشیه‌ای آنهاست. با بکار بردن قضیه اسکالر داریم:

$$F(t_1, \dots, t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)), \quad (1)$$

که در آن $F_i(t_i)$ تابع توزیع حاشیه‌ای T_i ، $i = 1, \dots, n$ ، است (نلسن ۲۰۰۶).

خانواده مفصل FGM یکی از خانواده‌های معروف توابع مفصل هستند که به طور گسترده در زمینه‌های مختلف به ویژه در بررسی ساختار وابستگی بین چند متغیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. سادگی فرم این

^۳Past Lifetime

نوع مفصل‌ها این امکان را فراهم می‌سازد تا در بسیاری از مسائل پیچیده بتوان نتایج دقیق‌تری را بدست آورد. این خانواده مفصل ابتدا توسط مورگنسترن (۱۹۵۶)، فارلی (۱۹۶۰) و سپس گامبل (۱۹۶۰) معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته و بعد از آن طی سالیان متمادی توجه محققان زیادی را به خود معطوف کرده است. برای آشنایی بیشتر این تابع و حالت‌های تعمیم یافته آن می‌توان به جانسون و کاتز (۱۹۷۵)، هانگ و کاتز (۱۹۸۴) و بایرامو و کاتز (۲۰۰۲) اشاره کرد.

تعریف ۲: اگر $F(x_1, x_2)$ تابع توزیع توام FGM دو متغیره برای بردار تصادفی (X_1, X_2) باشد، آنگاه

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2) \left[1 + \alpha \left(1 - F_1(x_1) \right) \left(1 - F_2(x_2) \right) \right],$$

که در آن F_i تابع توزیع X_i ، $i = 1, 2$ و $|\alpha| \leq 1$ ، پارامتر همبستگی است. همچنین $\alpha = 0$ حالت استقلال بین X_1 و X_2 را نتیجه می‌دهد. در مدل چند متغیره برای $n \geq 3$ ، تابع مفصل FGM، n بعدی بر روی $[0, 1]^n$ ، به صورت زیر تعریف شده و تعداد پارامترهای وابسته آن با فرمول $2^n - n - 1$ قابل محاسبه است (نلسن ۲۰۰۶).

$$C(\mathbf{u}) = u_1 \dots u_n \left(1 + \sum_{k=2}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_k} (1 - u_{j_1}) \dots (1 - u_{j_k}) \right),$$

که در آن $\{j_1, \dots, j_k\} \in \{1, \dots, n\}$.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته به ترتیب با توابع توزیع F, G و توابع قابلیت اعتماد $\bar{F} = 1 - F$ و $\bar{G} = 1 - G$ باشند.

تعریف ۳: متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی^۴ کوچکتر از Y است و با $X \leq_{st} Y$ نمایش داده می‌شود، هرگاه به ازای هر t متعلق به اجتماع تکیه گاه‌های X و Y ، $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$.

تعریف ۴: (الف) بردارهای تصادفی n بعدی $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ را در نظر بگیرید. برادر تصادفی \mathbf{X} در ترتیب تصادفی چند متغیره معمولی^۵ کوچکتر از \mathbf{Y} و با $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$ نمایش داده می‌شود، هرگاه به ازای هر تابع صعودی ϕ ، $E(\phi(\mathbf{X})) \leq E(\phi(\mathbf{Y}))$.

^۴Usual stochastic order

^۵Multivariate usual stochastic order

۱۸۰ تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n

(ب) فرض کنید $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ و $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ دو بردار تصادفی n بعدی با توابع توزیع به طور مطلق پیوسته به ترتیب دارای تابع چگالی f و g باشند. بردار تصادفی \mathbf{X} در ترتیب نسبت درستنمایی چند متغیره^۶ کوچکتر از \mathbf{Y} و با $\mathbf{X} \leq_{lr} \mathbf{Y}$ نمایش داده می‌شود، اگر $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})g(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})$ باشد، که در آن

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n),$$

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{y} = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n),$$

با $x_i \wedge y_i = \min\{x_i, y_i\}$ و $x_i \vee y_i = \max\{x_i, y_i\}$ و $i = 1, \dots, n$.

تعریف ۵: تابع $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ به طور کامل مثبت از مرتبه ۲ چند متغیره^۷ (MTP₂) است، هرگاه برای $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$K(\mathbf{x})K(\mathbf{y}) \leq K(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})K(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}).$$

قضیه ۱: اگر \mathbf{X} و \mathbf{Y} دو متغیر تصادفی n بعدی باشند به طوری که $\mathbf{X} \leq_{lr} \mathbf{Y}$ ، آنگاه $\mathbf{X} \leq_{st} \mathbf{Y}$.

قضیه ۲: اگر \mathbf{X} و \mathbf{Y} دو متغیر تصادفی n بعدی باشند به طوری که $\mathbf{X} \leq_{lr} \mathbf{Y}$ ، آنگاه برای هر $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$[\mathbf{X} | \mathbf{X} \in A] \leq_{lr} [\mathbf{Y} | \mathbf{Y} \in A].$$

قضیه ۳: فرض کنید $\{X_1, X_2, \dots\}$ و $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی (نه لزوماً مستقل) باشند. به طوری که برای $k \geq 1$

$$(X_1, \dots, X_k) \leq_{st} (Y_1, \dots, Y_k),$$

آنگاه برای $i \leq j$ و $m - i \geq n - j$ داریم:

$$X_{i:m} \leq_{st} Y_{j:n}.$$

^۶Multivariate likelihood ratio order

^۷Multivariate totally positive of order 2

با توجه به قضیه ۳، لم زیر را می‌توان فوراً نتیجه گرفت.

لم ۱: فرض کنید $\{X_1, X_2, \dots\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی (نه لزوماً مستقل) باشند. آنگاه برای $i \leq j$ و $m - i \geq n - j$ داریم:

$$X_{i:m} \leq_{st} X_{j:n}.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد نتایج فوق و آشنایی بهتر با ترتیب‌های تصادفی ارائه شده به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه شود. در ادامه تعریف تابع نرخ خطر معکوس^۸ و مفهوم تابع وانی-شکل^۹ ارائه شده است. فرض کنید T متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. تابع نرخ خطر معکوس T برابر است با:

$$r(t) = \frac{f(t)}{F(t)}.$$

تعریف ۶: تابع نرخ خطر معکوس $r(t)$ را وانی-شکل یا U -شکل گوئیم، هرگاه وجود داشته باشد s_0 ، t_1 و t_2 ($0 \leq s_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$)، به طوری که

$$r(t) = \begin{cases} \text{اکیداً نزولی باشد,} & s_0 \leq t \leq t_1; \\ \text{ثابت باشد,} & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \text{اکیداً صعودی باشد,} & t_2 \leq t, \end{cases}$$

که در آن t_1 و t_2 نقاط تغییر^{۱۰} تابع $r(t)$ روی بازه $[s_0, \infty)$ هستند.

^۸Reversed hazard rate function

^۹Bathtub-shape

^{۱۰}Change points

۳ سیستم‌های موازی شامل دو واحد تبادل پذیر

فرض کنید T_1 و T_2 طول عمرهای وابسته واحدهای یک سیستم موازی باشند، به طوری که $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ دارای تابع توزیع توام $F(t_1, t_2)$ و T_i ها به ترتیب دارای تابع توزیع به طور مطلق پیوسته و تابع بقاء F_i و \bar{F}_i ، $i = 1, 2$ باشند. آنگاه برای $0 < x < t$ و تحت فرض تبادل پذیری T_1 و T_2 ، تابع قابلیت اعتماد متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned} \psi(x|t) &= P(t - T_{1:2} > x | T_{1:2} \leq t) \\ &= \frac{2F(t - x, t) - F(t - x, t - x)}{F(t, t)}. \end{aligned} \quad (2)$$

در این صورت میانگین زمان از کار افتادگی این سیستم عبارت است از

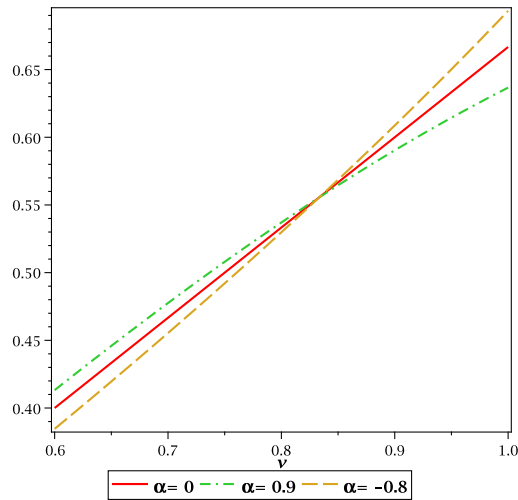
$$\Psi(t) = \int_0^t \psi(x|t) dx, \quad t > 0.$$

برای یک سیستم موازی با دو واحد دلخواه، تابع قابلیت اعتماد $\{t - T_{1:2} | T_{1:2} \leq t\}$ از رابطه (۲) و با بکار بردن فرم تابع مفصل (۱)، به صورت

$$\psi^C(x|t) = \frac{2C(F_1(t - x), F_2(t)) - C(F_1(t - x), F_2(t - x))}{C(F_1(t), F_2(t))}. \quad (3)$$

حاصل می‌شود. با فرض تبادل پذیری T_1 و T_2 و همچنین تحت مدل دو متغیره FGM، با قرار دادن $u = F(t - x)$ و $v = F(t)$ در (۳)، تابع میانگین از کار افتادگی این سیستم برای $v \in [0, 1]$ ، به صورت

$$\begin{aligned} \Psi^C(v) &= \int_0^v \psi^C(F^{-1}(v) - F^{-1}(u), F^{-1}(v)) du \\ &= \frac{1}{C(v, v)} \int_0^v (2C(u, v) - C(u, u)) du \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \alpha)v^3 - 3\alpha v^4 + 14\alpha v^5}{3 \cdot ((1 + \alpha)v^2 - 2\alpha v^3 + \alpha v^4)}, \end{aligned}$$



شکل ۱. منحنی‌های توابع MGIT سیستم موازی شامل دو واحد تبادل‌پذیر تحت مفصل FGM.

است، که در آن $C(u, v)$ تابع مفصل FGM است، یعنی

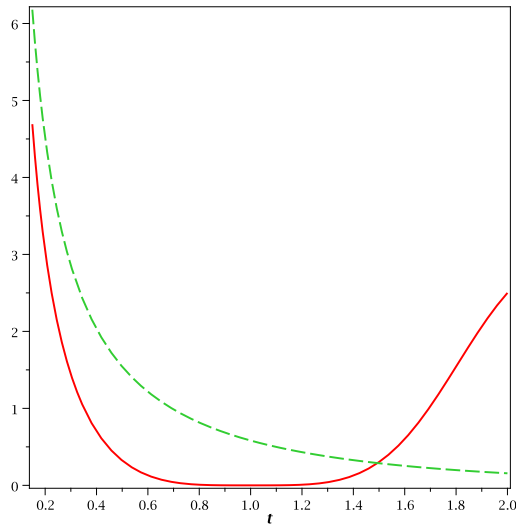
$$C(u, v) = uv(1 + \alpha(1 - u)(1 - v)), \quad u, v \in [0, 1].$$

از آنجائی که تابع $\Psi^C(v)$ در بازه $[0, 1]$ پیوسته است، مشتق آن وجود دارد و می‌توان نشان داد به ازای مقادیر $v \in [0, 1]$ مثبت است. در نتیجه تابع $\Psi^C(v)$ در بازه $[0, 1]$ صعودی است. نمودار این تابع برای مقادیر $\alpha = 0, 0/9, -0/8$ در شکل ۱ رسم شده است.

برای مطالعه زمان از کار افتادگی سیستم‌های موازی شامل دو واحد وابسته، فرض کنید T_1 و T_2 دارای توزیع دومتغیره FGM باشند. با توجه به تعریف ۲، میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی با دو واحد تبادل‌پذیر به صورت

$$\Psi(t) = \frac{1}{F^\alpha(t)(1 + \alpha\bar{F}^\alpha(t))} \times \int_0^t (\alpha F(t)F(x)[1 + \alpha\bar{F}(t)\bar{F}(x)] - F^\alpha(x)[1 + \alpha\bar{F}^\alpha(x)]) dx \quad (4)$$

است. در ادامه ویژگی‌های تابع MGIT بر اساس تابع MIT واحدهای تبادل‌پذیر تحت توزیع دومتغیره



شکل ۲. نمودار توابع نرخ خطر معکوس توزیع نمایی $\lambda = 1$ با خط چین و توزیع ارائه شده در مثال ۵ با خط ممتد.

FGM بررسی می‌شود.

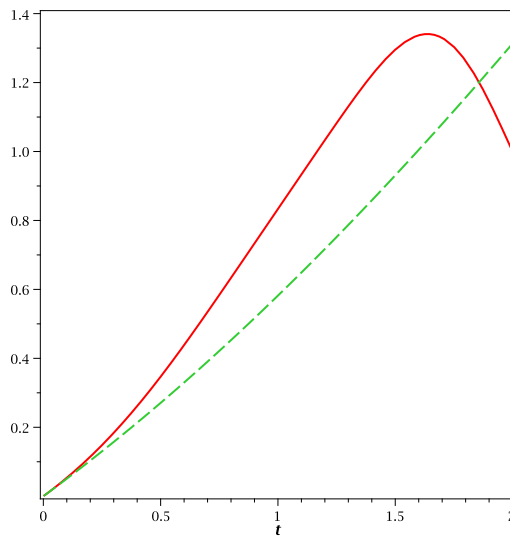
قضیه ۴: فرض کنید T_1 و T_2 دارای توزیع دومتغیره FGM با پارامتر $|\alpha| \leq 1$ باشند. در این صورت میانگین زمان از کار افتادگی سیستم موازی با واحدهای تبادلی پذیر، برای هر $t > 0$ ، عبارت است از

$$\Psi(t) = \frac{1}{(1 + \alpha \bar{F}^2(t))} \left[2M_1(t) - M_2(t) + 2\alpha\phi(t)\mu_1(t) - \frac{\alpha}{\bar{F}^2(t)}\mu_2(t) \right],$$

که در آن $\phi(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$ و $M_i(t)$ ، $i = 1, 2$ ، میانگین زمان از کار افتادگی یک سیستم موازی شامل i واحد مستقل است. بعلاوه برای $j = 1, 2$ ،

$$\mu_j(t) = \int_0^t (F(x)\bar{F}(x))^j dx.$$

برهان: با توجه به تعریف مفصل FGM و با کمی محاسبات ساده اثبات کامل خواهد شد.



شکل ۳. نمودار توابع MIT برای توزیع نمایی با $\lambda = 1$ با خط چین و توزیع ارائه شده در مثال ۵ با خط ممتد.

مثال ۴: فرض کنید T_1 و T_2 طول عمرهای تبادل‌پذیر دو واحد یک سیستم موازی، دارای تابع توزیع توام FGM نمایی با پارامترهای $\lambda > 0$ و $|\alpha| \leq 1$ باشند. با استفاده از قضیه ۴، میانگین زمان از کار افتادگی این سیستم برای $t > 0$ عبارت است از

$$\Psi(t) = \frac{1}{\lambda(1 + \alpha \bar{F}^\alpha(t))} \left[2\lambda M(t) - \frac{2\lambda t - 4F(t) + F(2t)}{2F^\alpha(t)} + \alpha \left(F(t)\bar{F}(t) - \frac{6F(2t) - 8F(3t) + 3F(4t)}{12F(t)^2} \right) \right],$$

که در آن $M(t) = \frac{\lambda t - F(t)}{\lambda F(t)}$ میانگین زمان از کار افتادگی توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ ، و F و \bar{F} به ترتیب توابع توزیع و بقاء توزیع نمایی مورد نظر است.

مثال ۵: فرض کنید T_1 و T_2 دارای توزیع توام دو متغیره FGM با پارامتر $|\alpha| \leq 1$ و T_1 و T_2 هم‌توزیع

با تابع چگالی به صورت

$$f(t) = 5(1-t)^4/2, \quad 0 < t < 2, \quad (5)$$

باشند، برای $0 < t < 2$ ، تابع میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی شامل دو واحد وابسته با طول عمرهای T_1 و T_2 عبارت است از

$$\Psi(t) = \frac{1}{4F^2(t)(1 + \alpha\bar{F}^2(t))} \left(2F^2(t)[4M(t) + \alpha\phi(t)(t - \delta(t, 11))] - t - \delta(t, 11) + 2\delta(t, 6) - \frac{\alpha}{4}(t + \delta(t, 21) - 2\delta(t, 11)) \right),$$

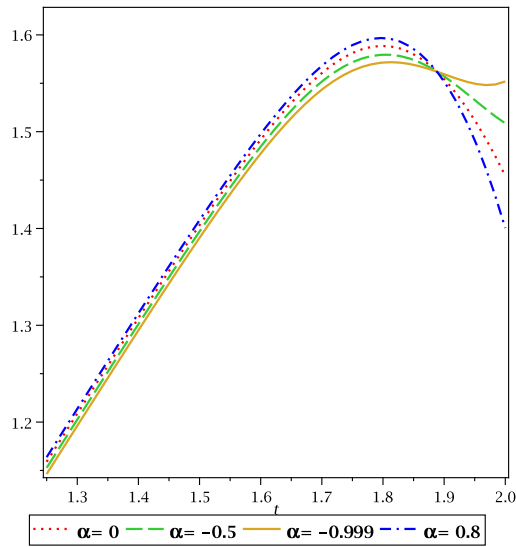
که در آن $\phi(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$ ، برای $n \in \mathbb{N}$

$$\delta(n, t) = \frac{1 - (1-t)^n}{n},$$

و $M(t) = \frac{6t-1+(1-t)^6}{6(1-(1-t)^2)}$ تابع MIT طول عمر واحدها است.

تذکر ۱: صالحی و اسدی (۲۰۱۲) ثابت کردند هنگامی که تابع نرخ خطر معکوس یک متغیر تصادفی وانی-شکل باشد، آنگاه میانگین زمان از کارافتادگی این متغیر همانند شکل‌های ۲ و ۳ و ارون وانی-شکل است. همچنین آنها با ارائه یک مثال عددی نشان دادند این ویژگی برای تابع MGIT سیستم $(n-k+1)$ از n شامل واحدهای مستقل و غیر هم‌توزیع حفظ نمی‌شوند. بنابراین در اینجا انتظار داریم این ویژگی هنگامی که واحدها وابسته تبادل‌پذیر، بویژه وابسته هم‌توزیع، باشند نیز برقرار نباشد (شکل ۴).

توابع نرخ خطر معکوس و MIT متناظر با توزیع به فرم رابطه (۵)، در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند که به ترتیب وانی-شکل و ارون وانی-شکل هستند. همان طور که مشاهده می‌کنید منحنی‌های رسم شده در شکل ۴ نشان می‌دهد تابع MGIT سیستم موازی در مثال ۵ لزوماً ارون وانی-شکل نیست. در این شکل تابع MGIT سیستم موازی مربوط به توزیعی به فرم رابطه (۵) برای $\alpha = -0.999$ ، در ابتدا ارون وانی-شکل بوده اما پس از مدتی منحنی دارای روند افزایشی می‌شود.



شکل ۴. منحنی‌های توابع MGIT سیستم موازی شامل دو واحد همسان تحت توزیع توام FGM با توزیع حاشیه‌ای به فرم رابطه (۵) و مقادیر مختلف α .

۴ مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n شامل واحدهای تبادلی پذیر

فرض کنید سیستم قبل از زمان t از کار بیافتد. توانگر و اسدی (۲۰۱۵) تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم $\{t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t\}$ ، $r = 1, \dots, k$ ، را با فرض تبادلی‌پذیری واحدها به صورت

$$\psi_{k:n}^r(x|t) = P(t - T_{r:n} > x | T_{k:n} \leq t) = \frac{\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} P\{A_i^{(t)}\} \bar{F}_{i-r+1:i}^{(i,t)}(x)}{\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} P\{A_i^{(t)}\}}, \quad (۶)$$

ارائه کردند، که در آن

$$A_i^{(t)} = [T_1 \leq t, \dots, T_i \leq t, T_{i+1} > t, \dots, T_n > t],$$

۱۸۸ تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n

و $\bar{F}_{i-r+1:i}^{(i,t)}(x)$ تابع بقاء $(i - r + 1)$ امین آماره ترتیبی بردار تصادفی $(t - T_1, \dots, t - T_i | A_i^{(t)})$ است.

علاوه بر این، توانگر و اسدی (۲۰۱۵) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول فرم دیگری برای تابع $\psi_{k:n}^r(x|t)$ به صورت

$$\psi_{k:n}^r(x|t) = \frac{\sum_{i=k}^n \sum_{j=r}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} p_{i,j}(x, t)}{\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p_i(t)}, \quad (7)$$

ارائه کردند، که در آن

$$p_i(t) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \bar{F}(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i+j}, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-j}),$$

و برای $j \leq i$

$$p_{i,j}(x, t) = \sum_{l_1=0}^j \sum_{l_2=0}^{i-j} (-1)^{l_1+l_2} \binom{j}{l_1} \binom{i-j}{l_2} \bar{F}(\underbrace{t-x, \dots, t-x}_{i-j+l_1-l_2}, \underbrace{t, \dots, t}_{n-i+l_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{j-l_1}).$$

میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم $(n - k + 1)$ از n هم برای $t > 0$ به صورت

$$\Psi_{k:n}^r(t) = E(t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t),$$

تعریف می‌شود. در ادامه برخی ویژگی‌های میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی، $\Psi_{k:n}^r(t)$ را ارائه می‌دهیم. ابتدا به مقایسه تابع MIGT براساس یک نمونه می‌پردازیم.

نتیجه ۱: فرض کنید T_1, \dots, T_n متغیرهای تصادفی تبادلی پذیر باشند. آنگاه برای $0 < x < t$ داریم:

$$P(t - T_1 > x | T_{n:n} \leq t) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n P(t - T_{r:n} > x | T_{n:n} \leq t).$$

برهان: با استفاده از ویژگی‌های مربوط به آماره‌های ترتیبی متغیرهای تصادفی تبادلی پذیر اثبات واضح

است.

قضیه ۵: فرض کنید T_1, \dots, T_n طول عمرهای تبادلی پذیر واحدهای یک سیستم $(n - k + 1)$ از n باشند. اگر تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی T_1, \dots, T_n دارای ویژگی MTP_2 باشد، آنگاه برای $t > 0$ و $1 \leq \ell \leq r \leq k \leq p \leq n - 1$

$$\Psi_{k:n-1}^{\ell}(t) \geq \frac{n-k}{n} \Psi_{p:n}^r(t).$$

برهان: با استفاده $(\Delta, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ در دیوید و ناگاراچا (2003) داریم:

$$\begin{aligned} nP(T_{r:n-1} \leq t - x, T_{k:n-1} \leq t) &= rP(T_{r+1:n} \leq t - x, T_{k+1:n} \leq t) \\ &+ (k - r)P(T_{r:n} \leq t - x, T_{k+1:n} \leq t) \\ &+ (n - k)P(T_{r:n} \leq t - x, T_{k:n} \leq t). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $F_{k:n-1}(t) \leq F_{k:n}(t)$ (ببینید لم ۱)، می توان نتیجه گرفت که برای $t > 0$

$$P(T_{r:n-1} \leq t - x | T_{k:n-1} \leq t) \geq \frac{n-k}{n} P(T_{r:n} \leq t - x | T_{k:n} \leq t).$$

با به کار بردن قضیه های ۳ و ۴ در توانگر و اسدی (2015) ، برای $1 \leq \ell \leq r$ و $k \leq p$ داریم:

$$P(T_{\ell:n-1} \leq t - x | T_{k:n-1} \leq t) \geq \frac{n-k}{n} P(T_{r:n} \leq t - x | T_{p:n} \leq t).$$

با انتگرال گیری از t نسبت به x از نامساوی فوق اثبات کامل خواهد شد.

تذکر ۲: در قضیه ۵، اگر $p = n$ باشد، نتیجه قضیه همچنان برای $n > k > r \geq 1$ برقرار است.

نتیجه ۲: فرض کنید T_1, \dots, T_n متغیرهای تصادفی تبادلی پذیر باشند و T_{n+1} مستقل از T_1, \dots, T_n

۱۹۰ تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n

باشد. آنگاه برای $0 < x < t$,

$$\tilde{\Psi}_{n+1:n+1}^r(t) \geq \frac{1}{n+1} \Psi_{n:n+1}^r(t),$$

$$\cdot \tilde{\Psi}_{n+1:n+1}^r(t) = E\{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n+1:n+1} \leq t\}$$
 که در آن

برهان: با توجه به استقلال T_{n+1} و (T_1, \dots, T_n) ، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n+1:n+1} \leq t\} =_{st} \{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n:n} \leq t\},$$

یعنی $\tilde{\Psi}_{n+1:n+1}^r(t) = \Psi_{n:n}^r(t)$. سپس با در نظر گرفتن یک سیستمی با $n + 1$ واحد تبادلی پذیر و قرار دادن $k = p = n$ در قضیه ۵، اثبات کامل خواهد شد.

توانگر و اسدی (۲۰۱۵) نشان دادند اگر T_1, \dots, T_n متغیرهای تصادفی تبادلی پذیر و T_{n+1} مستقل از (T_1, \dots, T_n) باشد، متغیر شرطی $\{t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t\}$ برای r و k ‌های ثابت نسبت به n به طور تصادفی صعودی است. در ادامه نشان داده می‌شود که بدون فرض استقلال بین T_{n+1} و (T_1, \dots, T_n) نتیجه فوق برای سیستم‌های موازی برقرار است. یعنی ثابت می‌شود متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی $\{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\}$ ، با فرض تبادلی بودن طول عمرهای T_1, \dots, T_n ، برای r ‌های ثابت نسبت به n به طور تصادفی صعودی است.

قضیه ۶: فرض کنید T_1, \dots, T_{n+1} متغیرهای تصادفی تبادلی پذیر باشند. آنگاه برای $t > 0$,

$$\begin{aligned} \{t - T_{r+1:n+1} | T_{n+1:n+1} \leq t\} &\leq_{st} \{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t - T_{r:n+1} | T_{n+1:n+1} \leq t\}. \end{aligned}$$

برهان: با توجه به رابطه (۶)، برای $0 < x < t$ داریم:

$$\psi_{n+1:n+1}^r(x|t) - \psi_{n:n}^r(x|t) = \bar{F}_{n-r+2:n+1}^{(n+1,t)}(x) - \bar{F}_{n-r+1:n}^{(n,t)}(x), \quad (۸)$$

$$\psi_{n:n}^r(x|t) - \psi_{n+1:n+1}^{r+1}(x|t) = \bar{F}_{n-r+1:n}^{(n,t)}(x) - \bar{F}_{n-r+1:n+1}^{(n+1,t)}(x). \quad (۹)$$

بنابراین لم ۱، برای $0 < x < t$ ،

$$\begin{aligned} \bar{F}_{n-r+\nu:n+\nu}^{(n+\nu,t)}(x) &\geq \bar{F}_{n-r+\nu:n}^{(n,t)}(x), \\ \bar{F}_{n-r+\nu:n}^{(n,t)}(x) &\geq \bar{F}_{n-r+\nu:n+\nu}^{(n+\nu,t)}(x). \end{aligned}$$

بنابراین عبارتهای (۸) و (۹) مثبت هستند و اثبات کامل است.

مثال ۶: فرض کنید طول عمرهای تبادل پذیر واحدها، T_1, \dots, T_n ، دارای تابع توزیع توام FGM نمایی چند متغیره به صورت

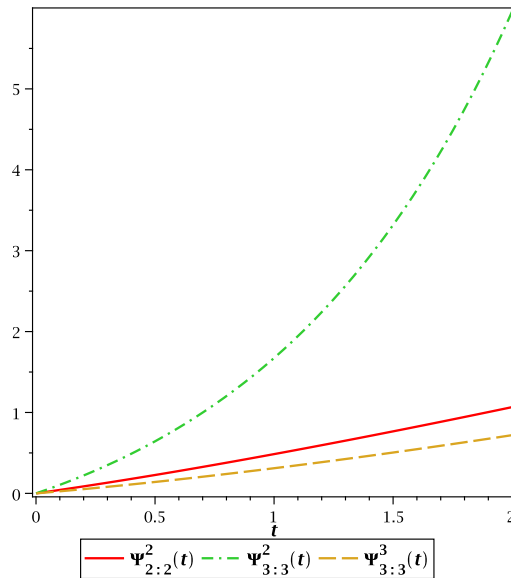
$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, \dots, t_n) &= 1 + \sum_{p=1}^n (-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \prod_{l=1}^p F_{i_l}(t) \\ &\times \left[1 + \sum_{d=2}^p \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq p} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_d} \bar{F}_{j_1}(t) \dots \bar{F}_{j_d}(t) \right], \end{aligned}$$

باشند، که در آن $j_1, \dots, j_d \in \{i_1, \dots, i_p\}$ ، $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ ، خاص، فرض کنید $\alpha_{12} = \dots = \alpha_{12\dots n} = \alpha$ اگر $n = 3$ آنگاه $\alpha \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ (مانزی ۲۰۱۱). آنگاه با استفاده از رابطه (۷)، برای $0 < x < t$ داریم:

$$\begin{aligned} \psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(x|t) &= P(t - T_{\nu:\nu} | T_{\nu:\nu} \leq t) \\ &= \frac{\nu F(t-x, t-x, t) - F(t-x, t-x, t-x)}{F(t, t, t)}, \\ \psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(x|t) &= P(t - T_{\nu:\nu} | T_{\nu:\nu} \leq t) = \frac{F(t-x, t-x)}{F(t, t)}, \\ \psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(x|t) &= P(t - T_{\nu:\nu} | T_{\nu:\nu} \leq t) = \frac{F(t-x, t-x, t-x)}{F(t, t, t)}. \end{aligned}$$

به سادگی می توان نشان داد $\Psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(t) \geq \Psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(t) \geq \Psi_{\nu:\nu}^{\lambda}(t)$ (شکل ۵).

قضیه ۷: فرض کنید \mathcal{S}_1 و \mathcal{S}_2 دو سیستم موازی به ترتیب شامل n و m واحد با طول عمرهای تبادل پذیر



شکل ۵. منحنی‌های تابع $\Psi_{n:n}^r(t)$ ، برای $n = 2, 3$ و $r = 2, 3$ ، برای $\alpha = 0.25$ و $\lambda = 0.5$ در مثال ۶.

اگر (Z_1, \dots, Z_m) و (T_1, \dots, T_n) باشند.

$$(T_1, \dots, T_q) \leq_{lr} (Z_1, \dots, Z_q),$$

که در آن $q = \min\{m, n\}$. آنگاه برای $t > 0$ و $\ell \leq r$ و $m - r \geq n - \ell$

$$\{t - Z_{r:m} | Z_{m:m} \leq t\} \leq_{st} \{t - T_{\ell:n} | T_{n:n} \leq t\}.$$

برهان: با توجه به $(T_1, \dots, T_q) \leq_{lr} (Z_1, \dots, Z_q)$ و با به کار بردن قضیه ۲ و سپس قضیه ۱، داریم:

$$\{t - Z_1, \dots, t - Z_q | Z_1 \leq t, \dots, Z_q \leq t\} \leq_{st} \{t - T_1, \dots, t - T_q | T_1 \leq t, \dots, T_q \leq t\}.$$

این رابطه را می‌توان به صورت

$$\{t - Z_1, \dots, t - Z_q | Z_{q;q} \leq t\} \leq_{st} \{t - T_1, \dots, t - T_q | T_{q;q} \leq t\},$$

نیز نوشت. بعلاوه با به کاربردن قضیه ۳ نتیجه می‌شود که

$$\{t - Z_{r;q} | Z_{q;q} \leq t\} \leq_{st} \{t - T_{r;q} | T_{q;q} \leq t\}. \quad (10)$$

حال اگر $m \leq n$ آنگاه

$$\begin{aligned} \{t - Z_{r:m} | Z_{m:m} \leq t\} &\leq_{st} \{t - Z_{r:n} | Z_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t - T_{l:n} | T_{n:n} \leq t\}, \end{aligned}$$

که در آن اولین و سومین نامساوی تصادفی با توجه به قضیه ۶ و دومین نامساوی تصادفی با توجه به رابطه (۱۰) برقرار است. همچنین اگر $m > n$ آنگاه

$$\begin{aligned} \{t - Z_{r:m} | Z_{m:m} \leq t\} &\leq_{st} \{t - T_{r:m} | T_{m:m} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t - T_{l:n} | T_{n:n} \leq t\}. \end{aligned}$$

اولین نامساوی تصادفی با توجه به رابطه (۱۰) و دومین نامساوی تصادفی با توجه به قضیه ۶ برقرار می‌باشد. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر پرداخته شد. ابتدا فرم تابع MIGT برای سیستم‌های موازی با دو واحد تبادل‌پذیر بر اساس تابع مفصل FGM بدست آورده شد. سپس رفتار این تابع با ارائه نمودار بررسی شده و با مثال نقض نشان داده شد که

هرگاه تابع نرخ خطر معکوس طول عمر واحدهای وابسته تبادلی پذیر وانی-شکل باشد، تابع MIGT سیستم وارون وانی-شکل نخواهد بود. با ارائه فرم بسته‌ای برای تابع قابلیت اعتماد تعمیم زمان از کار افتادگی یک سیستم $(n - k + 1)$ از n با واحدهای تبادلی پذیر، به مقایسه توابع MIGT این نوع سیستم‌ها بر اساس یک نمونه پرداخته شد. همچنین نشان داده شد که متغیر تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی، $\{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\}$ ، برای r های ثابت به طور تصادفی نسبت به n صعودی است. توجه داشته باشید که برای برقراری این نتیجه کافی است فقط شرط تبادلی پذیر بودن واحدها وجود داشته باشد. بنابراین این نتیجه حالت کلی‌تری نسبت به قضیه ۵ توانگر و اسدی (۲۰۱۵) برای سیستم‌های موازی است. علاوه بر این، تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n - k + 1)$ از n بر اساس دو نمونه به طور تصادفی مقایسه شد. لازم بذکر است که بجز فرض تبادلی‌پذیری هیچ فرضی و یا شرطی روی نوع ساختار وابستگی طول عمر واحدهای سیستم وجود ندارد، در حالی که رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) تحت اینکه ساختار وابستگی طول عمر واحدها مفصل ارشمیدوسی باشد، نتایج‌شان را بدست آوردند. بنابراین، نتایج بخش ۴ بویژه قضیه‌های ۵-۷، از دیدگاه متفاوتی نسبت به نتایج زیر بخش ۳، ۱ رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) بدست آمده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر و ویراستار محترم نشریه و داوران گرامی که نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان باعث بهبود کیفیت مقاله گردید، صمیمانه کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- Asadi, M. (2006), On the Mean Past Lifetime of the Components of Parallel System, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 1197-1206.
- Asadi, M. and Bairamov, I. (2006), The Mean Residual Life Function of k -Out-of- n Structure at the System Level, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314-318.
- Bairamov, I. G. and Kotz, S. (2002), Dependence Structure and Symmetry of Huang-Kotz FGM Distribution and Their Extensions, *Metrika*, **56**, 55-72.
- David, H. A. and Nagaraja, H. N. A. (2003), *Order Statistics*, New York: John Wiley.

- Farlie, D. G. J. (1960), The Performance of Some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution, *Biometrika*, **47**, 307-323.
- Gumbel, E. J. (1960), Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.
- Huang, J. S. and Kotz, S. (1984), Correlation Structure in Iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern Distribution, *Biometrika*, **71**, 633-636.
- Jia, X., Wang, L. and Wei, C. (2014), Reliability Research of Dependent Failure System Using Copula, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **43**, 1838-1851.
- Johnson, N. and Kotz, S. (1975), On Some Generalized Fairlie-Gumbel-Morgenstern Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **4**, 415-427.
- Khaledi, B-E. and Shaked, M. (2007), Ordering Conditional Lifetime of Coherent Systems, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1173-1184.
- Kochar, S. and Xu, M. (2010), On the Residual Lifetimes of k -Out-of- n Systems with Nonidentical Components, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **24**, 109-124.
- Kotz, S. and Lai, C. D. and Xie, M. (2003), On the Effect of Redundancy for Systems with Dependent Components, *IIE Transactions*, **35**, 1103-1110.
- Li, X. and Zhang, Z. (2008), Some Stochastic Comparisons of Conditional Coherent Systems, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**, 541-549.
- Li, X. and Zhao, P. (2008), Stochastic Comparisons on General Inactivity Time and General Residual Life of k -Out-of- n Systems, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37**, 1005-1019.
- Morgenstern, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, **8**, 234-235.
- Navarro, J. and Gomis, M. C. (2015), Comparison in the Mean Residual Life Order of Coherent Systems with Identically Distributed Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 33-47.
- Navarro, J. and Rubio, R. (2011), A Note on Necessary and Sufficient Conditions for Ordering Properties of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics*, **58**, 478 -489.
- Navarro, J. and Spizzichino, F. (2010), Comparison of Series and Parallel Systems with Components Sharing the Some Copula, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **26**, 775-791.

- Navarro, J., Ruiz, J. M. and Sandoval, C. J. (2007), Properties of Coherent Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 175-191.
- Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copula*, New York: Springer.
- Rezapour, M., Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013), Stochastic Comparisons of Residual and Past Lifetimes of $(n-k+1)$ -Out-of- n Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **42**, 2185-2199.
- Sadegh, M. K. (2011), A Note on the Mean Residual Life Function of a Coherent System with Exchanable or Nonidentical Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3267-3275.
- Salehi, E. T. and Asadi, M. (2012), Results on the Past Lifetime of $(n-k+1)$ -Out-of- n Structure with Nonidentical Components, *Metrika*, **75**, 439-454.
- Salehi, E. and Hashemi-Bosra, S. S. (2017), The Mean General Residual Lifetime of $(n-k+1)$ -Out-of- n Systems with Exchangeable Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **46**, 6382-6400.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, New York: Springer.
- Tavangar, M. (2016), Conditional Inactivity Time of Components in a Coherent Operating System, *IEEE Transactions on Reliability*, **65**, 359-369.
- Tavangar, M. and Asadi, M. (2010), A Study on the Mean Past Lifetime of the Components of $(n-k+1)$ -Out-of- n System at the Level System, *Metrika*, **72**, 59-73.
- Tavangar, M. and Asadi, M. (2015), The Inactivity Time of Exchangeable Components of k -Out-of- n Structure, *Sankhya*, **77**, 141-164.
- Zhang, Z. (2010), Ordering Conditional General Coherent Systems with Exchangeable Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 454-460.
- Zhao, P. Li, X. and Balakerishnan, N. (2008), Conditional Ordering of k -Out-of- n Systems with Independent But Non-identical Components, *Journal of Applied Probability*, **45**, 1113-1125.