

میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

مصطفی رزمخواه، زهرا صابرزاده

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

چکیده: در مباحث قابلیت اعتماد، سیستم‌های چند جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل چندین مؤلفه باشد به سیستم‌های مرکب معروف هستند. در این تحقیق سیستم‌های مرکبی در نظر گرفته می‌شوند که دارای n جزء بوده و هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو مؤلفه‌ی وابسته است. با شرط فعال بودن برخی مؤلفه‌ها در زمان مشخص t ، میانگین مانده‌ی عمر این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ابتدا مدل دو جمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌هایی از این مدل بیان و سپس میانگین مانده‌ی عمر سیستم‌های مرکب در حالت کلی بررسی می‌شود. رفتار این تابع تحت مدل فارلی-گامبل - مورگنشترن نسبت به پارامترهای مختلف با استفاده از روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. **واژه‌های کلیدی:** آماره‌های مرتب دو متغیره، پارامتر وابستگی، سیستم‌های مرکب، مدل دو جمله‌ای دو متغیره، مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n نشان دهنده‌ی طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم باشند، طوری که $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر باشند. دیوید و ناگاراچا (۲۰۰۳) و آرنولد و همکاران (۲۰۰۸) دو منبع کلیدی هستند که در زمینه آماره‌های مرتب می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. این آماره‌ها در قابلیت اعتماد و مدل‌بندی طول عمر سیستم‌های مهندسی نقش بسزایی دارند. یک سیستم شامل n مؤلفه که فعال بودن آن منوط به فعالیت حداقل $(n - k + 1)$ مؤلفه آن باشد، یک سیستم $(n - k + 1)$ از

۱۴۰ میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

n نامیده می‌شود. بدیهی است که طول عمر چنین سیستمی برابر $X_{k:n}$ می‌باشد. در سال‌های اخیر محققین زیادی از جمله فرناندز (۲۰۱۰)، کوچار و زو (۲۰۱۰)، صالحی و همکاران (۲۰۱۱)، پرورده و بالاکربشنان (۲۰۱۴)، توانگر (۲۰۱۴)، هاشمی بصر و صالحی (۱۳۹۶) روی این سیستم‌ها مطالعات گسترده‌ای انجام داده‌اند.

در متون قابلیت اعتماد، میانگین مانده عمر (MRL) یک سیستم $(n - k + 1)$ از n به صورت

$$\Phi(t) = E(X_{k:n} - t | X_{k:n} > t).$$

تعریف می‌شود. بایراموف و همکاران (۲۰۰۲)، تابع MRL متفاوتی برای سیستم به صورت $E(X_{n:n} - t | X_{1:n} > t)$ تعریف کرده‌اند، که نشان دهنده MRL سیستم موازی است به شرط این که هیچ یک از مؤلفه‌های آن در زمان t از کار نیفتاده باشد. لی و ژاو (۲۰۰۶) تابع MRL را به صورت

$$E(X_{s:n} - t | X_{r:n} > t); \quad 1 \leq r < s \leq n.$$

توسعه دادند. حالت‌های خاصی از توابع فوق توسط اسدی و بایراموف (۲۰۰۵، ۲۰۰۶) مورد توجه قرار گرفته است. تاکنون تحقیقات زیادی در مورد نسخه‌های مختلف میانگین مانده عمر انجام شده است. به عنوان مثال می‌توان به اسدی و گلی فروشانی (۲۰۰۸)، خنجری (۲۰۱۱)، اريلماز (۲۰۱۲)، توانگر و بایراموف (۲۰۱۵)، توانگر و اسدی (۲۰۱۶)، صالحی و هاشمی بصر (۲۰۱۷) اشاره کرد. همچنین بررسی ترتیب‌های تصادفی روی متغیرهای تصادفی مانده عمر توسط محققین زیادی مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال لی و ژاو (۲۰۰۸) مقایسه تصادفی زمان غیر فعال و طول عمر مانده یک G سیستم k از n را مورد توجه قرار داده‌اند و رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه تصادفی طول عمر مانده و گذشته یک سیستم $(n - k + 1)$ از n با مؤلفه‌های وابسته پرداخته‌اند. در اکثر پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده است، سیستم در نظر گرفته شده شامل n جزء بوده که هر یک از اجزای سیستم شامل یک مؤلفه می‌باشد. با این وجود در عمل ممکن است با سیستم‌های n جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو یا چند مؤلفه است، مواجه شویم. به عنوان مثال فرض کنید یک کارخانه لوازم الکتریکی شامل n خط تولید و هر خط به ترتیب دارای دو دستگاه وابسته A_i و B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) باشد. همچنین فرض کنید در هر خط، هر یک از دو دستگاه یکی از دو جزء اساسی محصول را تولید کنند و برای رسیدن به محصول نهایی لازم است که تعداد مشخصی از اجزا تولید شوند. اگر تعداد دستگاه‌های فعال A_1, \dots, A_n کمتر از r_1

و تعداد دستگاه‌های فعال B_1, \dots, B_n کمتر از r_2 باشند، فرایند متوقف می‌شود، به عبارتی سیستم از کار افتاده تلقی می‌شود. بنابراین، برای این که چنین سیستمی فعال باشد، باید حداقل r_1 دستگاه از بین دستگاه‌های A_1, \dots, A_n و حداقل r_2 دستگاه از بین دستگاه‌های B_1, \dots, B_n فعال باشند. چنین سیستم‌هایی سیستم‌های مرکب (r_1, r_2) از n نامیده می‌شوند. بایراموف (۲۰۱۳) تحقیق جالبی روی چنین سیستم‌هایی انجام داده است. وی به بررسی قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر در این سیستم‌ها پرداخته و تابع MRL این سیستم‌های مرکب را مشروط بر این که همه مؤلفه‌های آن‌ها در زمان t فعال باشند، مورد مطالعه قرار داده است. اریلماز (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن برخی قیده‌های خاص روی تابع ساختار این سیستم‌ها، تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) را تعمیم داد. همچنین رزمخواه و صابرزاده (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن سیستم‌های مرکب سه مؤلفه‌ای به توسعه تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) پرداختند.

در این مقاله سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود که برخی از مؤلفه‌های آن‌ها، نه همه آن‌ها، در زمان مشخص t فعال هستند و میانگین مانده عمر چنین سیستم‌هایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور در بخش ۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای معرفی می‌شود. مدل دو جمله‌ای دومتغیره و برخی از تعمیم‌های آن در بخش ۳ ارائه می‌شود. میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب مورد نظر در بخش ۴ محاسبه می‌شود. در بخش ۵ رفتار این تابع تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن^۱ (FGM) برای برخی حالات خاص با استفاده از محاسبات عددی بررسی می‌شود. در بخش ۶ بحث و نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای

سیستمی را در نظر بگیرید که دارای n جزء بوده و جزء i ام ($i = 1, \dots, n$) آن شامل دو مؤلفه A_i و B_i باشد. فرض کنید X_i طول عمر مؤلفه A_i و Y_i طول عمر مؤلفه B_i باشد. همچنین، فرض کنید مؤلفه‌های i امین جزء به هم وابسته‌اند، یعنی X_i و Y_i متغیرهای تصادفی وابسته با تابع توزیع توأم $F(x, y)$ باشند، اما اجزای سیستم مستقل از هم کار کنند، به عبارتی $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ بردارهای تصادفی مستقل از هم باشند. در این سیستم‌ها، فرض بر این است که اولین مؤلفه هر جزء با اولین مؤلفه سایر اجزا هم‌توزیع بوده و برای دومین مؤلفه اجزای سیستم نیز چنین رابطه‌ای برقرار باشد. به منظور بررسی ساختار

¹Farlie-Gumbel-Morgenstern model

این سیستم‌ها، برای i امین $(i = 1, \dots, n)$ جزء، متغیرهای نشانگر

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر اولین مؤلفه‌ی } i \text{ امین جزء، یعنی } A_i \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر دومین مؤلفه } i \text{ امین جزء، یعنی } B_i \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱: یک سیستم n جزئی با دو مؤلفه وابسته در هر جزء یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n نامیده می‌شود هرگاه سیستم فعال باشد اگر و تنها اگر حداقل r_1 تا از مؤلفه‌های A_1, \dots, A_n و حداقل r_2 تا از مؤلفه‌های B_1, \dots, B_n فعال باشند. تابع ساختار این سیستم برابر است با

$$\phi_{r_1, r_2}(s_1, u_1, \dots, s_n, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } \sum_{i=1}^n u_i \geq r_2 \text{ و } \sum_{i=1}^n s_i \geq r_1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

طول عمر یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n با $(X_{n-r_1+1:n}, Y_{n-r_2+1:n})$ نمایش داده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید قابلیت اعتماد این سیستم به توزیع توأم $(n - r_1 + 1)$ امین آماره مرتب از نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n و $(n - r_2 + 1)$ امین آماره مرتب بدست آمده از نمونه تصادفی Y_1, \dots, Y_n بستگی دارد. قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر این سیستم‌ها را می‌توان با استفاده از مدل دو جمله‌ای دو متغیره و دو تعمیم آن بدست آورد که در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳ مدل دو جمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌های آن

مدل دو جمله‌ای دو متغیره اولین بار توسط آیتگن و گونین (۱۹۳۵) معرفی شد. فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1 و $E_1^c = E_0$ و به طور همزمان یکی از دو پیشامد F_1 و $F_1^c = F_0$ با احتمال‌های توأم $P(E_i F_j) = p_{ij}$ ($i, j = 0, 1$) رخ دهند به قسمی که $\sum_{ij} p_{ij} = 1$. اگر ξ_1 و ξ_2 به ترتیب نمایانگر

تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای E_1 و F_1 در یک نمونه تصادفی n تایی با جایگذاری رخ می‌دهند، آن‌گاه

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \sum_{k=\max\{0, i+j-n\}}^{\min\{i, j\}} c_1(n, k; i, j) p_{11}^k p_{10}^{i-k} p_{01}^{j-k} p_{00}^{n-i-j+k} \\ = \eta(i, j; \underline{p}), \quad (1)$$

که در آن $\underline{p} = (p_{11}, p_{10}, p_{01}, p_{00})$ و

$$c_1(n, k; i, j) = \frac{n!}{k!(i-k)!(j-k)!(n-i-j+k)!}. \quad (2)$$

در ادامه دو تعمیم از مدل دوجمله‌ای دومتغیره ارائه می‌شوند که برای محاسبات این مقاله مفید هستند.

تعمیم ۱: فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1, E_2, E_3 و به طور همزمان یکی از دو پیشامد F_1 و F_2 با احتمالات توأم $1, 2, 3, j = 1, 2$ $P(E_i F_j) = q_{ij}; i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ رخ دهند، طوری که $\sum_{ij} q_{ij} = 1$. همچنین، فرض کنید ξ_1, ξ_2 و ξ_3 به ترتیب تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای E_1, E_2, E_3 در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم n رخ می‌دهند، در این صورت تابع جرم احتمال توأم (ξ_1, ξ_2, ξ_3) را می‌توان از رابطه

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k) = \sum_{m=0}^{\min\{i, k\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} c_2(i, j, k, m, \ell) q_{11}^m q_{12}^{i-m} q_{21}^{\ell} \\ \times q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell} \\ = \tau(i, j, k; \underline{q}), \quad (3)$$

بدست آورد، که در آن $\underline{q} = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32})$ و

$$c_2(i, j, k, m, \ell) = \frac{n!}{m!(i-m)! \ell!(j-\ell)!(k-m-\ell)!(n-i-j-k+m+\ell)!}.$$

توجه شود که رخداد پیشامد $\{\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k\}$ منوط به رخداد حالت‌های مختلفی از پیشامدهای E_i و F_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) است، که در جدول ۱ نمایش داده شده است. با توجه به این

جدول ۱: حالت‌های مختلف پیشامدهای E_i و F_j ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) برای محاسبه رابطه (۳)

مجموع	E_3	E_2	E_1	
k	$k - m - \ell$	ℓ	m	F_1
$n - k$	$n - i - j - k + m + \ell$	$j - \ell$	$i - m$	F_2
n	$n - i - j$	j	i	مجموع

جدول، مقادیر m و ℓ باید به گونه‌ای تغییر کنند تا در روابط زیر صدق کنند

$$m \geq 0, \ell \geq 0, (k - m - \ell) \geq 0,$$

$$(i - m) \geq 0, (j - \ell) \geq 0, (n - i - j - k + m + \ell) \geq 0.$$

به طور معادل می‌توان حدود کامل‌تری برای m و ℓ به صورت زیر معرفی کرد

$$0 \leq \max\{0, i + j + k - n - \ell\} \leq m \leq \min\{i, k - \ell\} \leq \min\{i, k\},$$

$$0 \leq \max\{0, i + j + k - n - m\} \leq \ell \leq \min\{j, k - m\} \leq \min\{j, k\}.$$

به عبارتی تمام مقادیر ممکن (m, ℓ) در مجموعه زیر خلاصه می‌شود

$$A_{m,\ell} = \{(m, \ell) : \max\{0, i + j + k - n - \ell\} \leq m \leq \min\{i, k - \ell\},$$

$$\max\{0, i + j + k - n - m\} \leq \ell \leq \min\{j, k - m\}\}$$

در نتیجه رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k) = \sum_{A_{m,\ell}} c_2(i, j, k, m, \ell) q_{11}^m q_{12}^{i-m} q_{21}^\ell$$

$$\times \frac{q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell}}{q_{33}}.$$

تعمیم ۲: در یک مدل سه جمله‌ای دو متغیره فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1, E_2 و E_3 و به طور همزمان یکی از سه پیشامد F_1, F_2 و F_3 با احتمالات توأم $i, j = 1, 2, 3$ رخ دهند، طوری

که $\sum_{ij} r_{ij} = 1$. همچنین، فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ به ترتیب تعداد پیشامدهای E_1, E_2, E_3 و F_1 و F_2 در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم n را نشان دهند، در این صورت،

$$\begin{aligned}
 & P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \xi_3 = k_3, \xi_4 = k_4) \\
 &= \sum_{m=0}^{\min\{k_1, k_3\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{k_1, k_4\}} \sum_{d=0}^{\min\{k_2, k_3\}} \sum_{c=0}^{\min\{k_2, k_4\}} c_3(k_1, k_2, k_3, k_4; n) r_{11}^m r_{12}^\ell \\
 &\times r_{13}^{k_1-m-\ell} r_{21}^d r_{22}^c r_{23}^{k_2-d-c} r_{31}^{k_2-m-d} r_{32}^{k_4-\ell-c} r_{33}^{n-\sum_{i=1}^4 k_i+m+\ell+d+c} \\
 &= \Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}), \tag{۴}
 \end{aligned}$$

که در آن $\underline{r} = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33})$ و

$$\begin{aligned}
 c_3(k_1, k_2, k_3, k_4; n) &= n! / \{m! \ell! (k_1 - m - \ell)! d! c! (k_2 - d - c)! \\
 &(k_3 - m - d)! (k_4 - \ell - c)! (n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c)!\}.
 \end{aligned}$$

تعداد حالاتی که پیشامدهای مختلف در یک نمونه به حجم n رخ می‌دهند تا رابطه (۴) برقرار باشد را می‌توان در جدول ۲ ملاحظه نمود.

جدول ۲: حالت‌های مختلف پیشامدهای E_i و F_j ($i, j = 1, 2, 3$) برای محاسبه رابطه (۴)

مجموع	E_3	E_2	E_1	
k_3	$k_3 - m - d$	d	m	F_1
k_4	$k_4 - \ell - c$	c	ℓ	F_2
$n - k_3 - k_4$	$n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c$	$k_2 - d - c$	$k_1 - m - \ell$	F_3
n	$n - k_1 - k_2$	k_2	k_1	مجموع

توجه شود که حدود m, ℓ, d, c در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}
 & m \geq 0, d \geq 0, (k_3 - m - d) \geq 0, \ell \geq 0, c \geq 0, \\
 & (k_4 - \ell - c) \geq 0, (k_1 - m - \ell) \geq 0, (k_2 - d - c) \geq 0, \\
 & (n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c) \geq 0.
 \end{aligned}$$

۴ میانگین مانده عمر

یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n را در نظر بگیرید که در آن حداقل $(n - s_1 + 1)$ مؤلفه از X_i ها و حداقل $(n - s_2 + 1)$ مؤلفه از Y_i ها در زمان t فعال باشند. متغیر مانده عمر این سیستم به صورت

$$T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} = (X_{n-r_1+1:n} - t, Y_{n-r_2+1:n} - t | X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)$$

تعریف می‌شود. بنابراین تابع MRL برای $(n - r_1 + 1) > s_1$ و $(n - r_2 + 1) > s_2$ برابر است با

$$\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t) = E(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}) = \int_0^{\infty} P(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} > x) dx. \quad (5)$$

برای محاسبه تابع $\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t)$ ابتدا لازم است تابع بقای متغیر شرطی $T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}$ مشخص گردد. توجه شود که

$$\begin{aligned} P(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} > x) &= \\ P(X_{n-r_1+1:n} > t + x, Y_{n-r_2+1:n} > t + x | X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) &= \\ \frac{P(X_{n-r_1+1:n} > t + x, Y_{n-r_2+1:n} > t + x, X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}{P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}. & \quad (6) \end{aligned}$$

احتمال مخرج کسر در رابطه (۶) قبلاً توسط بایراموف (۲۰۱۳) بدست آمده است. بدین منظور در مدل دو جمله‌ای دو متغیره پیشامدهای $\{X_i > t\}$, $E_1 = \{X_i > t\}$, $E_0 = \{X_i \leq t\}$ و $F_1 = \{Y_i > t\}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از (۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) &= \sum_{i=n-s_1+1}^n \sum_{j=n-s_2+1}^n \eta(i, j; \tilde{p}) \\ &= \sum_{i=n-s_1+1}^n \sum_{j=n-s_2+1}^n \sum_{k=\max\{s_1, i+j-n\}}^{\min\{i, j\}} c_1(n, k; i, j) (p_{11}(t))^i \\ &\quad \times (p_{10}(t))^{i-k} (p_{01}(t))^{j-k} (p_{00}(t))^{n-i-j+k} \end{aligned}$$

$$= \Gamma(s_1, s_2, n; t), \tag{۷}$$

که در آن $c_1(n, k; i, j)$ در رابطه (۲) تعریف شده است. همچنین،

$$\begin{aligned} p_{\wedge\wedge}(t) &= P(E \setminus F \setminus) = P(X > t, Y > t) = \bar{F}(t, t), \\ p_{\wedge\circ}(t) &= P(E \setminus F \circ) = P(X > t, Y \leq t) = \bar{F}_X(t) - \bar{F}(t, t), \\ p_{\circ\wedge}(t) &= P(E \circ F \setminus) = P(X \leq t, Y > t) = \bar{F}_Y(t) - \bar{F}(t, t), \\ p_{\circ\circ}(t) &= P(E \circ F \circ) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t, t). \end{aligned}$$

اما برای محاسبه احتمال صورت کسر در رابطه (۶) توجه شود که پیشامدهای دلخواه M ، N و D در $D_1 \cap D_2$ زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned} P(M \cap N \cap D) &= P(M \cap N) - P(M \cap N \cap D^c) \\ &= P(M \cap N) - P((M \cap N \cap D_1^c) \cup (M \cap N \cap D_2^c)) \\ &= P(M \cap N) - P(M \cap N \cap D_1^c) - P(M \cap N \cap D_2^c) \\ &\quad + P(M \cap N \cap D_1^c \cap D_2^c). \end{aligned} \tag{۸}$$

حال پیشامدهای $M = \{X_{n-r_1+1:n} > t+x\}$ ، $N = \{Y_{n-r_2+1:n} > t+x\}$ و $D_1 = \{X_{s_1:n} > t\}$ و $D_2 = \{Y_{s_2:n} > t\}$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۸)، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} &P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) \\ &= P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x) \\ &\quad - P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t) \\ &\quad - P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, Y_{s_2:n} \leq t) \\ &\quad + P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t, Y_{s_2:n} \leq t). \end{aligned} \tag{۹}$$

فرض کنید $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع توأم $F(x, y)$ و توابع توزیع حاشیه‌ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ باشند. در این صورت، موارد زیر نتیجه می‌شوند:

- جمله اول سمت راست در رابطه (۹) به راحتی با استفاده از (۷) بدست می‌آید. به عبارتی

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x) = \Gamma(n-r_1+1, n-r_2+1, n; t+x).$$

- با استفاده از نتایج تعمیم ۱، می‌توان جمله دوم سمت راست (۹) را با تعریف پیشامدهای $E_1 = \{Y > t+x\}$ و همچنین $F_1 = \{X > t+x\}$ ، $E_2 = \{X > t+x\}$ ، $F_2 = \{Y > t+x\}$ و $F_2 = \{Y \leq t+x\}$ محاسبه نمود. با استفاده از (۳)، نتیجه می‌شود

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t) = \sum_{i=s_1}^n \sum_{j=r_1}^{n-i} \sum_{k=r_2}^n \tau(i, j, k; \underline{q}(t, x)),$$

که در آن $\underline{q}(t, x) = (q_{11}(t, x), \dots, q_{r_2 r_2}(t, x))$ به قسمی که

$$\begin{aligned} q_{11}(t, x) &= P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x), \\ q_{12}(t, x) &= P(X \leq t, Y \leq t+x) = F(t, t+x), \\ q_{21}(t, x) &= P(X > t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{22}(t, x) &= P(X > t+x, Y \leq t+x) = F_Y(t+x) - F(t+x, t+x), \\ q_{r_1 r_1}(t, x) &= P(t < X \leq t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t, t+x) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_2 r_2}(t, x) &= P(t < X \leq t+x, Y \leq t+x) = F(t+x, t+x) - F(t, t+x). \end{aligned}$$

- مشابه حالت قبل، با تعریف پیشامدهای $E_1 = \{Y \leq t\}$ ، $E_2 = \{Y > t+x\}$ ، $F_1 = \{X > t+x\}$ و $F_2 = \{X \leq t+x\}$ و با استفاده

از (۳)، رابطه

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, Y_{s_1:n} \leq t) \\ = \sum_{i=s_1}^n \sum_{j=r_1}^{n-i} \sum_{k=r_1}^n \tau(i, j, k; \underline{q}^*(t, x))$$

بدست می‌آید، که در آن $\underline{q}^*(t, x) = (q_{11}^*(t, x), \dots, q_{r_2 r_2}^*(t, x))$ طوری که

$$q_{11}^*(t, x) = F_Y(t) - F(t+x, t), \quad q_{1r_2}^*(t, x) = F(t+x, t), \\ q_{r_1 r_1}^*(t, x) = \bar{F}(t+x, t+x), \quad q_{r_1 r_2}^*(t, x) = \bar{F}_Y(t+x) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_2 r_1}^*(t, x) = \bar{F}(t+x, t) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_2 r_2}^*(t, x) = F(t+x, t+x) - F(t+x, t).$$

- برای محاسبه جمله آخر سمت راست رابطه (۹) از مدل سه‌جمله‌ای دومتغیره استفاده میشود. به طور خاص در این مدل پیشامدهای

$$E_1 = \{X \leq t\}, \quad E_2 = \{X > t+x\}, \quad E_3 = \{t < X \leq t+x\}, \\ F_1 = \{Y \leq t\}, \quad F_2 = \{Y > t+x\}, \quad F_3 = \{t < Y \leq t+x\}.$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوح ملاحظه می‌شود

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t, X_{s_2:n} \leq t) \\ = \sum_{k_1=s_1}^n \sum_{k_2=r_1}^{n-k_1} \sum_{k_3=s_2}^n \sum_{k_4=r_2}^{n-k_3} \Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t, x)),$$

که در آن $\Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t, x))$ در رابطه (۴) تعریف شده است، طوری که

$$r_{11}(t, x) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t, t), \\ r_{12}(t, x) = P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x),$$

$$\begin{aligned}
 r_{12}(t, x) &= P(X \leq t, t < Y \leq t + x) = F(t, t + x) - F(t, t), \\
 r_{21}(t, x) &= P(X > t + x, Y \leq t) = F_Y(t) - F(t + x, t), \\
 r_{22}(t, x) &= P(X > t + x, Y > t + x) = \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{23}(t, x) &= P(X > t + x, t < Y \leq t + x) = \bar{F}(t + x, t) - \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{31}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, Y \leq t) = F(t + x, t) - F(t, t), \\
 r_{32}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, Y > t + x) = \bar{F}(t, t + x) - \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{33}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, t < Y \leq t + x) \\
 &= \bar{F}(t, t) - \bar{F}(t, t + x) - \bar{F}(t + x, t) + \bar{F}(t + x, t + x).
 \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نتایج فوق، می‌توان تابع MRL یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n که در زمان t برخی از مؤلفه‌ها آن فعال هستند را محاسبه نمود.

تذکر ۱: با روش‌های عددی مقادیر $\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t)$ به ازای $s_1 = s_2 = 1$ محاسبه شده است که دقیقاً بر نتایج بایراموف (۲۰۱۳) منطبق هستند.

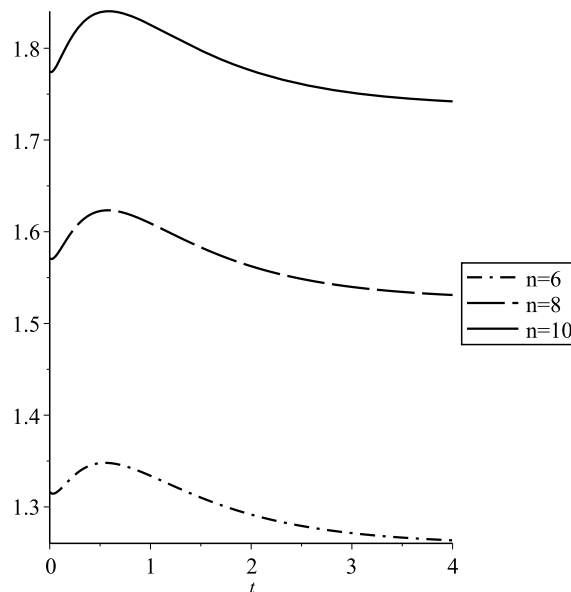
۵ محاسبات عددی

یک سیستم (r_1, r_2) از n که در زمان t حداقل $(n - s_1 + 1)$ مؤلفه اول و حداقل $(n - s_2 + 1)$ مؤلفه دوم هر جزء آن فعال هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید (X_i, Y_i) در i امین $(i = 1, \dots, n)$ جزء، دارای مدل FGM با تابع توزیع توأم

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)\{1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))\}, \alpha \in [-1, 1],$$

باشد، که در آن α پارامتر وابستگی بین متغیرهای تصادفی X و Y است. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل به ماری و کاتز (۲۰۰۱) و نلسن (۲۰۰۶) مراجعه نمایید. همچنین فرض کنید توابع توزیع حاشیه‌ای، نمایی استاندارد باشند. با استفاده از (۵)، تغییرات تابع $\Phi_{1, 2, 1; n}(t)$ نسبت به t ، به ازای مقدار ثابت $\alpha = 0/7$ و $n = 6, 8, 10$ رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود رفتار این تابع نسبت به t صعودی - نزولی است به گونه‌ای که برای مقادیر بسیار بزرگ t دارای یک مجانب افقی می‌باشد. همچنین به ازای یک مقدار ثابت t ، با افزایش تعداد اجزای چنین سیستمی، میانگین مانده عمر آن نیز

افزایش می‌یابد. در این سیستم اهمیت تعداد اجزای زیاد در رسیدن به یک سیستم کارآمد مشخص می‌شود.

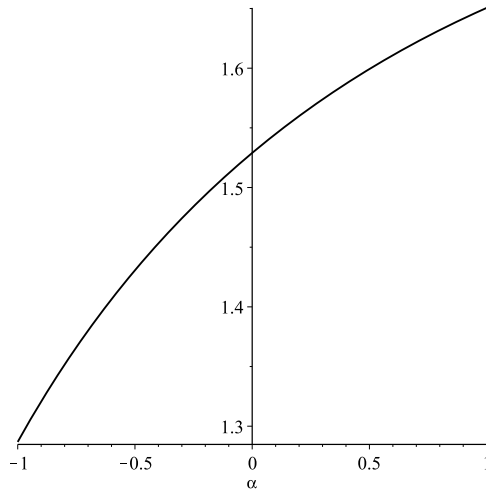


شکل ۱: رفتار تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به t ، به ازای $\alpha = 0.7$ تحت حاشیه‌های نمایشی

در شکل ۲ رفتار تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ را نسبت به پارامتر α مشاهده می‌کنید. با توجه به این شکل مشخص می‌شود که میانگین عمر سیستم با وابستگی بین دو متغیر X و Y رابطه‌ای مستقیم دارد. در حقیقت $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ تابعی صعودی از α است. به منظور بررسی تأثیر استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای مختلف در مدل FGM بر میانگین عمر مانده عمر یک سیستم مرکب، توزیع وایبول با تابع توزیع

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\beta}, \quad x > 0.$$

نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به t ، به ازای $\alpha = 0.7$ ، $(\beta, \lambda) = (0.5, 0.5)$ و $n = 6, 8, 10$ در شکل ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات این تابع نسبت به t اکیداً صعودی است که متفاوت از رفتار آن در موقعیتی است که توزیع‌های حاشیه مدل FGM ، نمایشی استاندارد باشند. اما مشابه آن موقعیت با افزایش تعداد اجزای سیستم، میانگین مانده عمر این سیستم نیز افزایش می‌یابد.

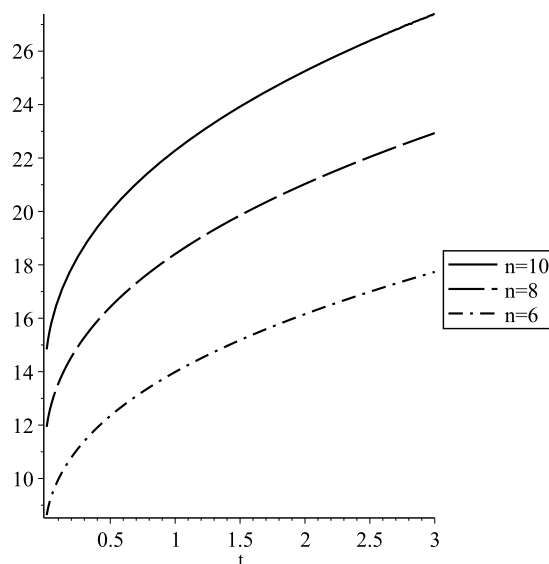


شکل ۲: رفتار تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به α ، به ازای $n = 8$ ، $t = 0.7$

برای بررسی حساسیت MRL نسبت به تغییر پارامترها از سایر مقادیر (β, λ) نیز استفاده شده است. در حالتی که $\beta = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف λ رفتار تابع MRL نسبت به t شبیه شکل ۱ است و در حالتی که $\lambda = 1$ و $\beta < 1$ ، نمودار MRL مشابه شکل ۳ می‌باشد. در پایان برای بررسی تغییرات تابع MRL نسبت به برخی مقادیر r_1, r_2, s_1, s_2 یک سیستم (r_1, r_2) از γ تحت مدل FGM با پارامتر وابستگی α و توابع توزیع حاشیه‌ای نمایی استاندارد در نظر گرفته شده است. میانگین مانده عمر این سیستم به ازای مقادیر مختلف r_1, r_2, s_1, s_2 در نقطه $t = 0.6$ در جدول ۳ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود که با ثابت نگه داشتن سه مقدار از بین r_1, r_2, s_1, s_2 و افزایش مقدار چهارم، MRL سیستم کاهش می‌یابد.

جدول ۳: مقادیر $\Phi_{1,2,2,1:\gamma}(0.6)$ به ازای $\alpha = 0.7$ و برخی مقادیر r_1, r_2, s_1, s_2

$(r_1, r_2) = (2, 2)$				$(s_1, s_2) = (2, 2)$			
$s_1 = 3$	s_2	$s_2 = 1$	s_1	$r_1 = 1$	r_2	$r_2 = 3$	r_1
1/13	1	1/28	1	1/88	1	0/98	1
1/07	2	1/21	2	1/37	2	0/88	2
1/01	3	1/13	3	0/98	3	0/74	3
0/94	4	1/06	4	0/66	4	0/57	4
0/88	5	1/00	5	0/41	5	0/38	5
0/83	6	0/96	6	0/2	6	0/2	6



شکل ۳: رفتار تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به t ، به ازای $\alpha = 0.7$ تحت توزیع‌های حاشیه‌ای وایبول

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های مرکب (r_1, r_2) از n با این شرط که در زمان t برخی از مؤلفه‌های آن‌ها فعال باشند، مورد توجه قرار گرفت. با استفاده از مدل دوجمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌هایی از آن، ابتدا تابع قابلیت اعتماد متغیر مانده عمر چنین سیستمی محاسبه شد و سپس میانگین این متغیر بدست آمد. در حقیقت این مطالعه تعمیمی بر تحقیق انجام شده توسط بایراموف (۲۰۱۳) بود که وی تابع MRL را مشروط بر فعال بودن همه‌ی مؤلفه‌ها در زمان t بررسی کرد. با استفاده از محاسبات عددی رفتار تابع MRL بدست آمده در برخی حالات خاص مورد بررسی واقع شد. مشاهده شد در حالت خاص یک سیستم مرکب $(1, 2)$ از n که حداقل $(n - 1)$ مؤلفه از جزء اول و همه‌ی مؤلفه‌های جزء دوم در زمان t فعال باشند، تابع MRL نسبت به همه پارامترهای زمان، تعداد اجزاء و پارامتر وابستگی در مدل FGM با توابع حاشیه‌ای وایبول صعودی است.

همان‌طور که ملاحظه شد سیستم‌های مورد مطالعه در این مقاله شامل دو مؤلفه وابسته در هر جزء بودند، در حالیکه در عمل می‌توان سیستم‌هایی با بیش از دو مؤلفه‌ی وابسته در هر جزء را نیز در نظر گرفت. همچنین، می‌توان از سایر مدل‌های وابستگی به غیر از مدل FGM به منظور توصیف ارتباط بین متغیرها

۱۵۴ میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

استفاده نمود. به علاوه، تمرکز این مقاله بر محاسبه‌ی میانگین مانده‌ی عمر برخی از سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای بود، که به‌طور مشابه می‌توان تحقیقاتی در مورد میانگین گذشته‌ی عمر چنین سیستم‌هایی انجام داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی از داوران محترم مقاله و ویراستار مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند را دارند.

مراجع

هاشمی بصر، ش. و صالحی، ا. (۱۳۹۶)، نتایجی در تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم های $(n-k+1)$ از n با واحدهای وابسته، مجله علوم آماری، ۱۱، ۱۹۶-۱۷۵.

Aitken, A. C. and Gonin, H. T. (1935), On Fourfold Sampling with and without Replacement, *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, **55**, 114-125.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (2008), *A First Course in Order Statistics*, Philadelphia, SIAM.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2005), A Note on the Mean Residual Life Function of a Parallel System, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 475-484.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2006), The Mean Residual Life Function of a k -out-of- n Structure at the System Level, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314-318.

Asadi, M. and Goliforushani, S. (2008), On the Mean Residual Life Function of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 574-580.

Bairamov, I. (2013), Reliability and Mean Residual Life of Complex Systems with Two Dependent Components Per Element, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**, 276-285.

Bairamov, I., Ahsanullah, M. and Akhundov I. (2002), A Residual Life Function of a System Having Parallel or Series Structures, *Journal of Statistical Theory and Application*, **2**, 119-132.

David, H. and Nagaraja H. N. (2003), *Order Statistics*, John Wiley and Sons.

- Eryilmaz, S. (2012), On the Mean Residual Life of a k-out-of-n: G System with a Single Cold Standby Component, *Journal of European Operational Research*, **222**, 273-277.
- Eryilmaz, S. (2017), Reliability Analysis of Systems with Components Having Two Dependent Subcomponents, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 8005-8017.
- Fernandez, A. J. (2010), Tolerance Limits for k-out-of-n Systems with Exponentially Distributed Component Lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability*, **59**, 331-337.
- Kochar, S. and Xu, M., (2010), On Results Lifetimes of k-out-of-n Systems with Non-Identical Components, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **24**, 109-127.
- Khanjari, M. (2011), A Note on Mean Residual Life Function of a Coherent System with Exchangeable or Nonidentical Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3267-3275.
- Li, X. and Zhao, P., (2006), Some Aging Properties of the Residual Life of k-out-of-n System, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 535-541.
- Li, X. and Zhao, P., (2008), Stochastic Comparison on General Inactivity Time and General Residual Life of k-out-of-n: G systems, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37**, 1005-1019.
- Mari, D. D. and Kotz, S. (2001), *Correlation and Dependence*, London: Imperial College Press.
- Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer.
- Parvardeh, A. and Balakrishnan, N. (2014), On the Conditional Residual Life and Inactivity Time of Coherent Systems, *Journal of Applied Probability*, **51**, 990-998.
- Razmkhah, M. and Saberzade, Z. (2017), On the Reliability of Complex Systems with Three Dependent Components Per Element, *Journal of the Iranian Statistical Society (JIRSS)*, **16**, 1-17.
- Rezapour, M. Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013), Stochastic Comparison of Residual and Past Lifetimes of (n-k+1)-out-of-n Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 2185-2199.
- Salehi, E., Asadi, M. and Eryilmaz, S. (2011), Reliability Analysis of Consecutive k-out-of-n Systems with Non-identical Components Lifetimes, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2920-2932.

Salehi, E. and Hashemi-Bosra, S. S., (2017), The Mean General Residual Lifetime of $(n-k+1)$ -out-of- n Systems with Exchangeable Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 6382-6400.

Tavangar, M., (2014), Some Comparisons of Residual Life of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics*, **61**, 549-556.

Tavangar, M. and Bairamov, I., (2015), On Conditional Residual Lifetime and Conditional Inactivity Time of k -out-of- n Systems, *Reliability Engineering and System Safety*, **144**, 225-233.

Tavangar, M. and Asadi, M., (2016), Some Representation Theorems in Terms of Mean Residual Lifetime and Mean Inactivity Time of Coherent Systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 226-235.