میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

مصطفی رزمخواه ، زهرا صابرزاده

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده: در مباحث قابلیت اعتماد، سیستم‌های چند جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل چندین مؤلفه باشد به سیستم‌های مرکب معروف هستند. در این تحقیق سیستم‌های مرکبی در نظرگرفته می‌شوند که دارای n جزء بوده و هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو مؤلفه‌ی وابسته است. با شرط فعال بودن برخی مؤلفه‌ها در زمان مشخص t، میانگین مانده‌ی عمر این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ابتدا مدل دو جمله‌ای دومتغیره و تعمیم‌هایی از این مدل بیان و سپس میانگین مانده‌ی عمر سیستم‌های مرکب در حالت کلی بررسی می‌شود. رفتار این تابع تحت مدل فارلی–گامبل– مورگنشترن نسبت به پارامترهای مختلف با استفاده از روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های مرتب دومتغیره، پارامتر وابستگی، سیستم‌های مرکب، مدل دوجمله‌ای دومتغیره، مدل فارلی–گامبل–مورگنشترن.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ نشان دهنده‌ی طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم باشند، طوری‌که $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ آماره‌های مرتب متناظر باشند. دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) و آرنولد و همکاران

[*] آدرس الکترونیک مسئول مقاله: زهرا صابرزاده، saberzadez@yahoo.com

(۲۰۰۸) دو منبع کلیدی هستند که در زمینه آماره‌های مرتب می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. این آماره‌ها در قابلیت اعتماد و مدل‌بندی طول عمر سیستم‌های مهندسی نقش بسزایی دارند. یک سیستم شامل n مؤلفه که فعال بودن آن منوط به فعالیت حداقل $(n-k+۱)$ مؤلفه آن باشد، یک سیستم $(n-k+۱)$ از n نامیده می‌شود. بدیهی است که طول عمر چنین سیستمی برابر $X_{k:n}$ می‌باشد. در سال‌های اخیر محققین زیادی از جمله فرناندز (۲۰۱۰)، کوچار و زو (۲۰۱۰)، صالحی و همکاران (۲۰۱۱)، پرورده و بالاکربشنان (۲۰۱۴)، توانگر (۲۰۱۴)، هاشمی بصر و صالحی (۱۳۹۶) روی این سیستم‌ها مطالعات گسترده‌ای انجام داده‌اند.

در متون قابلیت اعتماد، میانگین مانده عمر (MRL) یک سیستم $(n-k+۱)$ از n به صورت

$$\Phi(t) = E(X_{k:n} - t | X_{k:n} > t).$$

تعریف می‌شود. بایراموف و همکاران (۲۰۰۲)، تابع MRL متفاوتی برای سیستم به صورت $E(X_{n:n} - t|X_{۱:n} > t)$ تعریف کرده‌اند، که نشان دهنده MRL سیستم موازی است به شرط این که هیچ یک از مؤلفه‌های آن در زمان t از کار نیفتاده باشد. لی و ژااو (۲۰۰۶) تابع MRL را به صورت

$$E(X_{s:n} - t | X_{r:n} > t); \qquad ۱ \leq r < s \leq n.$$

توسعه دادند. حالت‌های خاصی از توابع فوق توسط اسدی و بایراموف (۲۰۰۵، ۲۰۰۶) مورد توجه قرار گرفته است. تاکنون تحقیقات زیادی در مورد نسخه‌های مختلف میانگین مانده عمر انجام شده است. به عنوان مثال می‌توان به اسدی و گلی فروشانی (۲۰۰۸)، خنجری (۲۰۱۱)، اریلماز (۲۰۱۲)، توانگر و بایراموف (۲۰۱۵)، توانگر و اسدی (۲۰۱۶)، صالحی و هاشمی بصر (۲۰۱۷) اشاره کرد. همچنین بررسی ترتیب‌های تصادفی روی متغیرهای تصادفی مانده عمر توسط محققین زیادی مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال لی و ژااو (۲۰۰۸) مقایسه تصادفی زمان غیر فعال و طول عمر مانده یک G سیستم k از n را مورد توجه قرار داده‌اند و رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه تصادفی طول عمر مانده و گذشته یک سیستم $(n-k+۱)$ از n با مؤلفه‌های وابسته پرداخته‌اند. در اکثر پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده است، سیستم در نظر گرفته شده شامل n جزء بوده که هر یک از اجزای سیستم شامل یک مؤلفه می‌باشد. با این وجود در عمل ممکن است با سیستم‌های n جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو یا چند مؤلفه است، مواجه شویم. به عنوان مثال فرض کنید یک کارخانه لوازم الکتریکی شامل n خط تولید و هر خط به ترتیب دارای دو دستگاه وابسته A_i و B_i $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ باشد. همچنین فرض کنید در هر خط، هر یک از دو دستگاه یکی از دو

جزء اساسی محصول را تولید کنند و برای رسیدن به محصول نهایی لازم است که تعداد مشخصی از اجزا تولید شوند. اگر تعداد دستگاه‌های فعال $A_1, \cdots, A_n$ کمتر از r_1 و تعداد دستگاه‌های فعال $B_1, \cdots, B_n$ کمتر از r_2 باشند، فرایند متوقف می‌شود، به عبارتی سیستم از کار افتاده تلقی می‌شود. بنابراین، برای این که چنین سیستمی فعال باشد، باید حداقل r_1 دستگاه از بین دستگاه‌های $A_1, \cdots, A_n$ و حداقل r_2 دستگاه از بین دستگاه‌های $B_1, \cdots, B_n$ فعال باشند. چنین سیستم‌هایی سیستم‌های مرکب (r_1, r_2) از n نامیده می‌شوند. بایراموف (۲۰۱۳) تحقیق جالبی روی چنین سیستم‌هایی انجام داده است. وی به بررسی قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر در این سیستم‌ها پرداخته و تابع MRL این سیستم‌های مرکب را مشروط بر این که همه مؤلفه‌های آن‌ها در زمان t فعال باشند، مورد مطالعه قرار داده است. اریلماز (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن برخی قیدهای خاص روی تابع ساختار این سیستم‌ها، تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) را تعمیم داد. همچنین رزمخواه و صابرزاده (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن سیستم‌های مرکب سه مؤلفه‌ای به توسیع تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) پرداختند.

در این مقاله سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود که برخی از مؤلفه‌های آن‌ها، نه همه آن‌ها، در زمان مشخص t فعال هستند و میانگین مانده عمر چنین سیستم‌هایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور در بخش ۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای معرفی می‌شود. مدل دو جمله‌ای دومتغیره و برخی از تعمیم‌های آن در بخش ۳ ارائه می‌شود. میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب مورد نظر در بخش ۴ محاسبه می‌شود. در بخش ۵ رفتار این تابع تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن[1] (FGM) برای برخی حالات خاص با استفاده از محاسبات عددی بررسی می‌شود. در بخش ۶ بحث و نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای

سیستمی را در نظر بگیرید که دارای n جزء بوده و جزء iام $(i = 1, \cdots, n)$ آن شامل دو مؤلفه A_i و B_i باشد. فرض کنید X_i طول عمر مؤلفه A_i و Y_i طول عمر مؤلفه B_i باشد. همچنین، فرض کنید مؤلفه‌های iامین جزء به هم وابسته‌اند، یعنی X_i و Y_i متغیرهای تصادفی وابسته با تابع توزیع توأم $F(x, y)$ باشند، اما اجزای سیستم مستقل از هم کار کنند، به عبارتی $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ بردارهای تصادفی مستقل از هم باشند. در این سیستم‌ها، فرض بر این است که اولین مؤلفه هر جزء با اولین مؤلفه سایر اجزا هم‌توزیع بوده و

[1] Farlie-Gumbel-Morgenstern model

برای دومین مؤلفه اجزای سیستم نیز چنین رابطه‌ای برقرار باشد. به منظور بررسی ساختار این سیستم‌ها، برای i امین ($i = 1, \cdots, n$) جزء، متغیرهای نشانگر

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر اولین مؤلفه‌ی} i \text{ امین جزء، یعنی } A_i, \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر دومین مؤلفه } i \text{ امین جزء، یعنی } B_i, \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱. یک سیستم n جزئی با دو مؤلفه وابسته در هر جزء یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n نامیده می‌شود هرگاه سیستم فعال باشد اگر و تنها اگر حداقل r_1 تا از مؤلفه‌های $A_1, \cdots, A_n$ و حداقل r_2 تا از مؤلفه‌های $B_1, \cdots, B_n$ فعال باشند. تابع ساختار این سیستم برابر است با

$$\phi_{r_1,r_2}(s_1, u_1, ..., s_n, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } \sum_{i=1}^n s_i \geq r_1 \text{ و } \sum_{i=1}^n u_i \geq r_2 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

طول عمر یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n با $T_{r_1,r_2:n} = (X_{n-r_1+1:n}, Y_{n-r_2+1:n})$ نمایش داده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید قابلیت اعتماد این سیستم به توزیع توأم $(n - r_1 + 1)$ امین آماره مرتب از نمونه تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ و $(n - r_2 + 1)$ امین آماره مرتب بدست آمده از نمونه تصادفی $Y_1, \cdots, Y_n$ بستگی دارد. قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر این سیستم‌ها را می‌توان با استفاده از مدل دو جمله‌ای دومتغیره و دو تعمیم آن بدست آورد که در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳ مدل دوجمله‌ای دومتغیره و تعمیم‌های آن

مدل دو جمله‌ای دومتغیره اولین بار توسط آیتکن و گونین (۱۹۳۵) معرفی شد. فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1 و $E_0 = E_1^c$ و به طور همزمان یکی از دو پیشامد F_1 و $F_0 = F_1^c$ با احتمال‌های توأم $P(E_iF_j) =$

$p_{ij}(i,j=0,1)$ رخ دهند به قسمی که $\sum_{ij} p_{ij}=1$. اگر ξ_1 و ξ_2 به ترتیب نمایانگر تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای E_1 و F_1 در یک نمونه تصادفی n تایی با جایگذاری رخ می‌دهند، آنگاه

$$\begin{aligned} P(\xi_1=i,\xi_2=j) &= \sum_{k=\max\{0,i+j-n\}}^{\min\{i,j\}} c_1(n,k;i,j)\ \ p_{11}^{k} p_{10}^{i-k} p_{01}^{j-k} p_{00}^{n-i-j+k} \\ &= \eta(i,j;\underline{p}), \end{aligned} \qquad (1)$$

که در آن $\underline{p}=(p_{11},p_{10},p_{01},p_{00})$ و

$$c_1(n,k;i,j)=\frac{n!}{k!(i-k)!(j-k)!(n-i-j+k)!}. \qquad (2)$$

در ادامه دو تعمیم از مدل دوجمله‌ای دومتغیره ارائه می‌شوند که برای محاسبات این مقاله مفید هستند.

تعمیم ۱.۳. فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1، E_2 و E_3 و به طور همزمان یکی از دو پیشامد F_1 و F_2 با احتمالات توأم $P(E_iF_j)=q_{ij};\ i=1,2,3,\ j=1,2$ رخ دهند، طوری که $\sum_{ij} q_{ij}=1$. همچنین، فرض کنید ξ_1، ξ_2 و ξ_3 به ترتیب تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای E_1، E_2 و F_1 در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم n رخ می‌دهند، در این صورت تابع جرم احتمال توأم (ξ_1,ξ_2,ξ_3) را می‌توان از رابطه

$$\begin{aligned} P(\xi_1=i,\xi_2=j,\xi_3=k) &= \sum_{m=0}^{\min\{i,k\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{j,k\}} c_2(i,j,k,m,\ell)\ q_{11}^{m} q_{12}^{i-m} q_{21}^{\ell} \\ &\quad \times q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell} \\ &= \tau(i,j,k;\underline{q}), \end{aligned} \qquad (3)$$

بدست آورد، که در آن $\underline{q}=(q_{11},q_{12},q_{21},q_{22},q_{31},q_{32})$ و

$$c_2(i,j,k,m,\ell)=\frac{n!}{m!\ (i-m)!\ \ell!\ (j-\ell)!(k-m-\ell)!(n-i-j-k+m+\ell)!}.$$

توجه شود که رخداد پیشامد $\{\xi_1=i,\xi_2=j,\xi_3=k\}$ منوط به رخداد حالت‌های مختلفی از پیشامدهای E_i و F_j $(i=1,2,3,\ j=1,2)$ است، که در جدول ۱ نمایش داده شده است. با توجه به این جدول، مقادیر m و ℓ باید به گونه‌ای تغییر کنند تا در روابط زیر صدق کنند

$$m\geq 0,\ \ell\geq 0,\ (k-m-\ell)\geq 0,$$

$$(i-m)\geq 0,\ (j-\ell)\geq 0,\ (n-i-j-k+m+\ell)\geq 0.$$

جدول ۱: حالت‌های مختلف پیشامدهای E_i و F_j $(i=1,2,3,\ j=1,2)$ برای محاسبه رابطه (۳)

	E_1	E_2	E_3	مجموع
F_1	m	ℓ	$k-m-\ell$	k
F_2	$i-m$	$j-\ell$	$n-i-j-k+m+\ell$	$n-k$
مجموع	i	j	$n-i-j$	n

به طور معادل می‌توان حدود کامل‌تری برای m و ℓ به صورت زیر معرفی کرد

$$0 \le \max\{0, i+j+k-n-\ell\} \le m \le \min\{i, k-\ell\} \le \min\{i,k\},$$
$$0 \le \max\{0, i+j+k-n-m\} \le \ell \le \min\{j, k-m\} \le \min\{j,k\}.$$

به عبارتی تمام مقادیر ممکن (m,ℓ) در مجموعه زیر خلاصه می‌شود

$$A_{m,\ell} = \big\{(m,\ell): \quad \max\{0, i+j+k-n-\ell\} \le m \le \min\{i, k-\ell\}, \\ \max\{0, i+j+k-n-m\} \le \ell \le \min\{j, k-m\}\big\}$$

در نتیجه رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\begin{aligned} P(\xi_1=i, \xi_2=j, \xi_3=k) &= \sum_{A_{m,\ell}} c_2(i,j,k,m,\ell)\, q_{11}^{m} q_{12}^{i-m} q_{21}^{\ell} \\ &\times\ q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell}. \end{aligned}$$

تعمیم ۲.۳. در یک مدل سه‌جمله‌ای دومتغیره فرض کنید یکی از پیشامدهای E_1، E_2 و E_3 و به طور همزمان یکی از سه پیشامد F_1، F_2 و F_3 با احتمالات توأم $P(E_iF_j)=r_{ij};\ i,j=1,2,3$ رخ دهند، طوری که $\sum_{ij} r_{ij}=1$. همچنین، فرض کنید ξ_1، ξ_2، ξ_3 و ξ_4 به ترتیب تعداد پیشامدهای E_1، E_2، F_1 و F_2 در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم n را نشان دهند، در این صورت،

$$\begin{aligned} & P(\xi_1=k_1, \xi_2=k_2, \xi_3=k_3, \xi_4=k_4) \\ &= \sum_{m=0}^{\min\{k_1,k_3\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{k_1,k_4\}} \sum_{d=0}^{\min\{k_2,k_3\}} \sum_{c=0}^{\min\{k_2,k_4\}} c_3(k_1,k_2,k_3,k_4;n)\, r_{11}^{m} r_{12}^{\ell} \\ &\times r_{13}^{k_1-m-\ell} r_{21}^{d} r_{22}^{c} r_{23}^{k_2-d-c} r_{31}^{k_3-m-d} r_{32}^{k_4-\ell-c} r_{33}^{n-\sum_{i=1}^{4} k_i+m+\ell+d+c} \\ &= \Lambda(k_1,k_2,k_3,k_4;\underline{r}), \end{aligned} \tag{4}$$

که در آن $\underline{r} = (r_{۱۱}, r_{۱۲}, r_{۱۳}, r_{۲۱}, r_{۲۲}, r_{۲۳}, r_{۳۱}, r_{۳۲}, r_{۳۳})$ و

$$c_{۳}(k_{۱}, k_{۲}, k_{۳}, k_{۴}; n) = n!/\{m!\ \ell!\ (k_{۱} - m - \ell)!\ d!\ c!\ (k_{۲} - d - c)!$$
$$(k_{۳} - m - d)!(k_{۴} - \ell - c)!(n - \sum_{i=۱}^{۴} k_i + m + \ell + d + c)!\}.$$

تعداد حالاتی که پیشامدهای مختلف در یک نمونه به حجم n رخ می‌دهند تا رابطه (۴) برقرا باشد را می‌توان در جدول ۲ ملاحظه نمود.

جدول ۲: حالت‌های مختلف پیشامدهای E_i و F_j $(i, j = ۱, ۲, ۳)$ برای محاسبه رابطه (۴)

	$E_{۱}$	$E_{۲}$	$E_{۳}$	مجموع
$F_{۱}$	m	d	$k_{۳} - m - d$	$k_{۳}$
$F_{۲}$	ℓ	c	$k_{۴} - \ell - c$	$k_{۴}$
$F_{۳}$	$k_{۱} - m - \ell$	$k_{۲} - d - c$	$n - \sum_{i=۱}^{۴} k_i + m + \ell + d + c$	$n - k_{۳} - k_{۴}$
مجموع	$k_{۱}$	$k_{۲}$	$n - k_{۱} - k_{۲}$	n

توجه شود که حدود m، ℓ، d و c در روابط زیر صدق می‌کنند

$$m \geq ۰,\ d \geq ۰,\ (k_{۳} - m - d) \geq ۰,\ \ell \geq ۰,\ c \geq ۰,$$
$$(k_{۴} - \ell - c) \geq ۰,\ (k_{۱} - m - \ell) \geq ۰,\ (k_{۲} - d - c) \geq ۰,$$
$$(n - \textstyle\sum_{i=۱}^{۴} k_i + m + \ell + d + c) \geq ۰.$$

۴ میانگین مانده عمر

یک سیستم مرکب $(r_{۱}, r_{۲})$ از n را در نظر بگیرید که در آن حداقل $(n - s_{۱} + ۱)$ مؤلفه از X_iها $(i = ۱, \cdots, n)$ و حداقل $(n - s_{۲} + ۱)$ مؤلفه از Y_iها در زمان t فعال باشند. متغیر مانده عمر این سیستم به صورت

$$T_{r_{۱}, r_{۲}, s_{۱}, s_{۲}:n} = (X_{n-r_{۱}+۱:n} - t, Y_{n-r_{۲}+۱:n} - t | X_{s_{۱}:n} > t, Y_{s_{۲}:n} > t)$$

تعریف می‌شود. بنابراین تابع MRL برای $s_1 < (n-r_1+1)$ و $s_2 < (n-r_2+1)$ برابر است با

$$\Phi_{r_1,r_2,s_1,s_2:n}(t) = E(T_{r_1,r_2,s_1,s_2:n}) = \int_0^{\infty} P(T_{r_1,r_2,s_1,s_2:n} > x)\, dx. \tag{۵}$$

برای محاسبه تابع $\Phi_{r_1,r_2,s_1,s_2:n}(t)$ ابتدا لازم است تابع بقای متغیر شرطی $T_{r_1,r_2,s_1,s_2:n}$ مشخص گردد. توجه شود که

$$\begin{aligned} &P(T_{r_1,r_2,s_1,s_2:n} > x) = \\ &P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x | X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) = \\ &\frac{P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}{P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}. \end{aligned} \tag{۶}$$

احتمال مخرج کسر در رابطه (۶) قبلاً توسط بایراموف (۲۰۱۳) بدست آمده است. بدین منظور در مدل دوجمله‌ای دو متغیره پیشامدهای $E_1 = \{X_i > t\}$، $E_0 = \{X_i \leq t\}$، $F_1 = \{Y_i > t\}$ و $F_0 = \{Y_i \leq t\}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از (۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) =& \sum_{i=n-s_1+1}^{n} \sum_{j=n-s_2+1}^{n} \eta(i,j;\underset{\sim}{p}) \\ =& \sum_{i=n-s_1+1}^{n} \sum_{j=n-s_2+1}^{n} \sum_{k=\max\{0,i+j-n\}}^{\min\{i,j\}} c_1(n,k;i,j)\big(p_{11}(t)\big)^{i} \\ & \times \big(p_{10}(t)\big)^{i-k}\big(p_{01}(t)\big)^{j-k}\big(p_{00}(t)\big)^{n-i-j+k} \\ =& \Gamma(s_1, s_2, n; t), \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $c_1(n,k;i,j)$ در رابطه (۲) تعریف شده است. همچنین،

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= P(E_1F_1) = P(X > t, Y > t) = \bar{F}(t,t), \\ p_{10}(t) &= P(E_1F_0) = P(X > t, Y \leq t) = \bar{F}_X(t) - \bar{F}(t,t), \\ p_{01}(t) &= P(E_0F_1) = P(X \leq t, Y > t) = \bar{F}_Y(t) - \bar{F}(t,t), \\ p_{00}(t) &= P(E_0F_0) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t,t). \end{aligned}$$

اما برای محاسبه احتمال صورت کسر در رابطه (۶) توجه شود که پیشامدهای دلخواه M ، N و $D=D_1\cap D_2$ در رابطه زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned}P(M\cap N\cap D) &= P(M\cap N)-P(M\cap N\cap D^c)\\ &= P(M\cap N)-P\big((M\cap N\cap D_1^c)\cup(M\cap N\cap D_2^c)\big)\\ &= P(M\cap N)-P(M\cap N\cap D_1^c)-P(M\cap N\cap D_2^c)\\ &+ P(M\cap N\cap D_1^c\cap D_2^c).\end{aligned}\tag{8}$$

حال پیشامدهای $M=\{X_{n-r_1+1:n}>t+x\}$، $N=\{Y_{n-r_2+1:n}>t+x\}$، $D_1=\{X_{s_1:n}>t\}$ و $D_2=\{Y_{s_2:n}>t\}$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۸)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x, X_{s_1:n}>t, Y_{s_2:n}>t)\\ &=P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x)\\ &\quad -P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x, X_{s_1:n}\le t)\\ &\quad -P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x, Y_{s_2:n}\le t)\\ &\quad +P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x, X_{s_1:n}\le t, Y_{s_2:n}\le t).\end{aligned}\tag{9}$$

فرض کنید $(X_1,Y_1),\cdots,(X_n,Y_n)$ بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع توأم $F(x,y)$ و توابع توزیع حاشیه‌ای $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ باشند. در این صورت، موارد زیر نتیجه می‌شوند:

- جمله اول سمت راست در رابطه (۹) به راحتی با استفاده از (۷) بدست می‌آید. به عبارتی

$$P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x)=\Gamma(n-r_1+1, n-r_2+1, n; t+x).$$

- با استفاده از نتایج تعمیم ۱.۳، می‌توان جمله دوم سمت راست (۹) را با تعریف پیشامدهای $E_1=\{X\le t\}$، $E_2=\{X>t+x\}$، $E_3=\{t<X\le t+x\}$ و همچنین $F_1=\{Y>t+x\}$ و $F_2=\{Y\le t+x\}$ محاسبه نمود. با استفاده از (۳)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}&P(X_{n-r_1+1:n}>t+x, Y_{n-r_2+1:n}>t+x, X_{s_1:n}\le t)\\ &\quad=\sum_{i=s_1}^{n}\sum_{j=r_1}^{n-i}\sum_{k=r_2}^{n}\ \tau(i,j,k;\underline{q}(t,x)),\end{aligned}$$

که در آن $\underline{q}(t,x) = \left(q_{۱۱}(t,x), \cdots, q_{۳۲}(t,x)\right)$ ، به قسمی که

$$q_{۱۱}(t,x) = P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x),$$

$$q_{۱۲}(t,x) = P(X \leq t, Y \leq t+x) = F(t, t+x),$$

$$q_{۲۱}(t,x) = P(X > t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t+x, t+x),$$

$$q_{۲۲}(t,x) = P(X > t+x, Y \leq t+x) = F_Y(t+x) - F(t+x, t+x),$$

$$q_{۳۱}(t,x) = P(t < X \leq t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t, t+x) - \bar{F}(t+x, t+x),$$

$$q_{۳۲}(t,x) = P(t < X \leq t+x, Y \leq t+x) = F(t+x, t+x) - F(t, t+x).$$

- مشابه حالت قبل، با تعریف پیشامدهای $E_۱ = \{Y \leq t\}$، $E_۲ = \{Y > t+x\}$، $E_۳ = \{t < Y \leq t+x\}$، $F_۱ = \{X > t+x\}$ و $F_۲ = \{X \leq t+x\}$ و با استفاده از (۳)، رابطه

$$\begin{aligned} &P(X_{n-r_۱+۱:n} > t+x, Y_{n-r_۲+۱:n} > t+x, Y_{s_۲:n} \leq t) \\ &\quad = \sum_{i=s_۲}^{n} \sum_{j=r_۲}^{n-i} \sum_{k=r_۱}^{n} \tau(i,j,k; \underline{q}^*(t,x)) \end{aligned}$$

بدست می‌آید، که در آن $\underline{q}^*(t,x) = \left(q^*_{۱۱}(t,x), \cdots, q^*_{۳۲}(t,x)\right)$، طوری که

$$q^*_{۱۱}(t,x) = F_Y(t) - F(t+x, t), \quad q^*_{۱۲}(t,x) = F(t+x, t),$$

$$q^*_{۲۱}(t,x) = \bar{F}(t+x, t+x), \quad q^*_{۲۲}(t,x) = \bar{F}_Y(t+x) - \bar{F}(t+x, t+x),$$

$$q^*_{۳۱}(t,x) = \bar{F}(t+x, t) - \bar{F}(t+x, t+x),$$

$$q^*_{۳۲}(t,x) = F(t+x, t+x) - F(t+x, t).$$

- برای محاسبه جمله آخر سمت راست رابطه (۹) از مدل سه‌جمله‌ای دومتغیره استفاده میشود. به طور خاص در این مدل پیشامدهای

$$E_۱ = \{X \leq t\},\ E_۲ = \{X > t+x\},\ E_۳ = \{t < X \leq t+x\},$$

$$F_۱ = \{Y \leq t\},\ F_۲ = \{Y > t+x\},\ F_۳ = \{t < Y \leq t+x\}.$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوح ملاحظه می‌شود

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t, X_{s_2:n} \leq t)$$
$$= \sum_{k_1=s_1}^{n} \sum_{k_2=r_1}^{n-k_1} \sum_{k_3=s_2}^{n} \sum_{k_4=r_2}^{n-k_3} \Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t,x)),$$

که در آن $\Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t,x))$ در رابطه (۴) تعریف شده است، طوری که

$$r_{11}(t,x) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t,t),$$
$$r_{12}(t,x) = P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x),$$
$$r_{13}(t,x) = P(X \leq t, t < Y \leq t+x) = F(t, t+x) - F(t,t),$$
$$r_{21}(t,x) = P(X > t+x, Y \leq t) = F_Y(t) - F(t+x, t),$$
$$r_{22}(t,x) = P(X > t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t+x, t+x),$$
$$r_{23}(t,x) = P(X > t+x, t < Y \leq t+x) = \bar{F}(t+x, t) - \bar{F}(t+x, t+x),$$
$$r_{31}(t,x) = P(t < X \leq t+x, Y \leq t) = F(t+x, t) - F(t,t),$$
$$r_{32}(t,x) = P(t < X \leq t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t, t+x) - \bar{F}(t+x, t+x),$$
$$r_{33}(t,x) = P(t < X \leq t+x, t < Y \leq t+x)$$
$$= \bar{F}(t,t) - \bar{F}(t, t+x) - \bar{F}(t+x, t) + \bar{F}(t+x, t+x).$$

بنابراین با استفاده از نتایج فوق، می‌توان تابع MRL یک سیستم مرکب (r_1, r_2) از n که در زمان t برخی از مؤلفه‌ها آن فعال هستند را محاسبه نمود.

تذکر ۱.۴. با روش‌های عددی مقادیر $\Phi_{r_1,r_2,s_1,s_2:n}(t)$ به ازای $s_1 = s_2 = 1$ محاسبه شده است که دقیقاً بر نتایج بایراموف (۲۰۱۳) منطبق هستند.

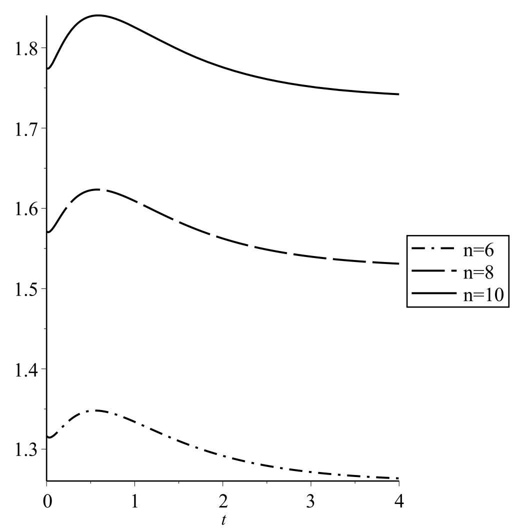
۵ محاسبات عددی

یک سیستم (r_1, r_2) از n که در زمان t حداقل $(n - s_1 + 1)$ مؤلفه اول و حداقل $(n - s_2 + 1)$ مؤلفه دوم هر جزء آن فعال هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید (X_i, Y_i) در iامین $(i = 1, \cdots, n)$ جزء، دارای

مدل FGM با تابع توزیع توأم

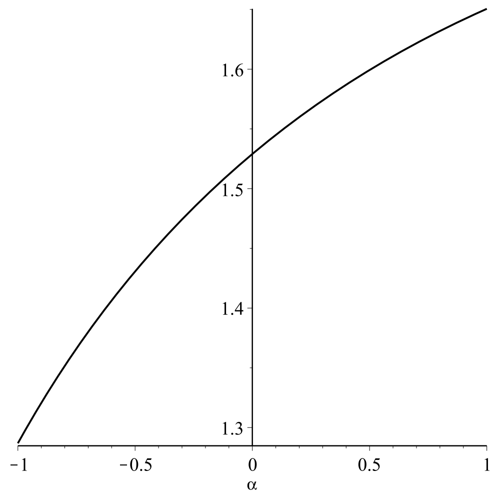
$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)\{۱ + \alpha(۱ - F_X(x))(۱ - F_Y(y))\},\ \alpha \in [-۱, ۱],$$

باشد، که در آن α پارامتر وابستگی بین متغیرهای تصادفی X و Y است. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل به ماری و کاتز (۲۰۰۱) و نلسن (۲۰۰۶) مراجعه نمایید. همچنین فرض کنید توابع توزیع حاشیه‌ای، نمایی استاندارد باشند. با استفاده از (۵) ، تغییرات تابع $\Phi_{۱,۲,۲,۱:n}(t)$ نسبت به t، به ازای مقدار ثابت $\alpha = ۰/۷$ و $n = ۶, ۸, ۱۰$ در شکل ۱ رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود رفتار این تابع نسبت به t صعودی $-$ نزولی است به گونه‌ای که برای مقادیر بسیار بزرگ t دارای یک مجانب افقی می‌باشد. همچنین به ازای یک مقدار ثابت t، با افزایش تعداد اجزای چنین سیستمی، میانگین مانده عمر آن نیز افزایش می‌یابد. در این سیستم اهمیت تعداد اجزای زیاد در رسیدن به یک سیستم کارآمد مشخص می‌شود.



شکل ۱: رفتار تابع $\Phi_{۱,۲,۲,۱:n}(t)$ نسبت به t، به ازای $\alpha = ۰/۷$ تحت حاشیه‌ای‌های نمایی

در شکل ۲ رفتار تابع $\Phi_{۱,۲,۲,۱:n}(t)$ را نسبت به پارامتر α مشاهده می‌کنید. با توجه به این شکل مشخص می‌شود که میانگین عمر سیستم با وابستگی بین دومتغیر X و Y رابطه‌ای مستقیم دارد. در حقیقت $\Phi_{۱,۲,۲,۱:۸}(t)$ تابعی صعودی از α است. به منظور بررسی تأثیر استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای مختلف در



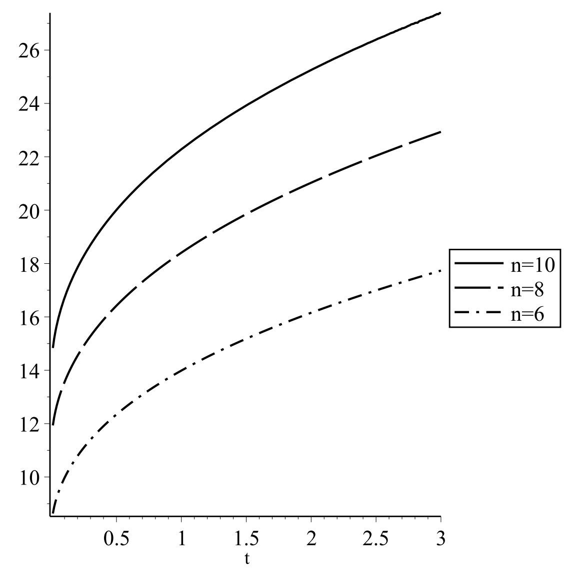
شکل ۲: رفتار تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به α، به ازای $n = 8$، $t = 0/7$

مدل FGM بر میانگین عمر مانده عمر یک سیستم مرکب، توزیع وایبول با تابع توزیع

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^{\beta}},\ x > 0.$$

نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات تابع $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$ نسبت به t، به ازای $\alpha = 0/7$، $(\beta, \lambda) = (0/5, 0/5)$ و $n = 6, 8, 10$ در شکل ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات این تابع نسبت به t اکیداً صعودی است که متفاوت از رفتار آن در موقعیتی است که توزیع‌های حاشیه مدل FGM، نمایی استاندارد باشند. اما مشابه آن موقعیت با افزایش تعداد اجزای سیستم، میانگین مانده عمر این سیستم نیز افزایش می‌یابد.

برای بررسی حساسیت MRL نسبت به تغییر پارامترها از سایر مقادیر (β, λ) نیز استفاده شده است. در حالتی که $\beta = 1$، به ازای مقادیر مختلف λ رفتار تابع MRL نسبت به t شبیه شکل ۱ است و در حالتی که $\beta < 1$ و $\lambda = 1$، نمودار MRL مشابه شکل ۳ می‌باشد. در پایان برای بررسی تغییرات تابع MRL نسبت به برخی مقادیر r_1, r_2, s_1, s_2 یک سیستم (r_1, r_2) از ۷ تحت مدل FGM با پارامتر وابستگی α و توابع توزیع حاشیه‌ای نمایی استاندارد در نظر گرفته شده است. میانگین مانده عمر این سیستم به ازای مقادیر مختلف r_1, r_2, s_1, s_2 در نقطه $t = 0/6$ در جدول ۳ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود که با ثابت نگه داشتن سه مقدار از بین r_1, r_2, s_1, s_2 و افزایش مقدار چهارم، MRL سیستم کاهش می‌یابد.



شکل ۳: رفتار تابع $\Phi_{۱,۲,۲,۱:n}(t)$ نسبت به t، به ازای $\alpha = ۰/۷$ تحت توزیع‌های حاشیه‌ای وایبول

جدول ۳: مقادیر $\Phi_{۱,۲,۲,۱:۷}(۰/۶)$ به ازای $\alpha = ۰/۷$ و برخی مقادیر $r_۱, r_۲, s_۱, s_۲$

$(s_۱, s_۲) = (۲, ۲)$				$(r_۱, r_۲) = (۲, ۲)$			
$r_۱$	$r_۲ = ۳$	$r_۲$	$r_۱ = ۱$	$s_۱$	$s_۲ = ۱$	$s_۲$	$s_۱ = ۳$
۱	۰/۹۸	۱	۱/۸۸	۱	۱/۲۸	۱	۱/۱۳
۲	۰/۸۸	۲	۱/۳۷	۲	۱/۲۱	۲	۱/۰۷
۳	۰/۷۴	۳	۰/۹۸	۳	۱/۱۳	۳	۱/۰۱
۴	۰/۵۷	۴	۰/۶۶	۴	۱/۰۶	۴	۰/۹۴
۵	۰/۳۸	۵	۰/۴۱	۵	۱/۰۰	۵	۰/۸۸
۶	۰/۲	۶	۰/۲	۶	۰/۹۶	۶	۰/۸۳

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های مرکب $(r_۱, r_۲)$ از n با این شرط که در زمان t برخی از مؤلفه‌های آن‌ها فعال باشند، مورد توجه قرار گرفت. با استفاده از مدل دوجمله‌ای دومتغیره و تعمیم‌هایی از آن، ابتدا تابع قابلیت اعتماد متغیر مانده عمر چنین سیستمی محاسبه شد و سپس میانگین این متغیر بدست آمد. در حقیقت این مطالعه تعمیمی بر تحقیق انجام شده توسط بایراموف (۲۰۱۳) بود که وی تابع MRL را مشروط بر فعال بودن همه‌ی

مؤلفه‌ها در زمان t بررسی کرد. با استفاده از محاسبات عددی رفتار تابع MRL بدست آمده در برخی حالات خاص مورد بررسی واقع شد. مشاهده شد در حالت خاص یک سیستم مرکب $(۱,۲)$ از n که حداقل $(n-۱)$ مؤلفه از جزء اول و همه‌ی مؤلفه‌های جزء دوم در زمان t فعال باشند، تابع MRL نسبت به همه پارامترهای زمان، تعداد اجزاء و پارامتر وابستگی در مدل FGM با توابع حاشیه‌ای وایبول صعودی است.

همان‌طور که ملاحظه شد سیستم‌های مورد مطالعه در این مقاله شامل دو مؤلفه وابسته در هر جزء بودند، در حالیکه در عمل می‌توان سیستم‌هایی با بیش از دو مؤلفه‌ی وابسته در هر جزء را نیز در نظر گرفت. همچنین، می‌توان از سایر مدل‌های وابستگی به غیر از مدل FGM به منظور توصیف ارتباط بین متغیرها استفاده نمود. به علاوه، تمرکز این مقاله بر محاسبه‌ی میانگین مانده‌ی عمر برخی از سیستم‌های مرکب دو مولفه‌ای بود، که به‌طور مشابه می‌توان تحقیقاتی در مورد میانگین گذشته‌ی عمر چنین سیستم‌هایی انجام داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی از داوران محترم مقاله و ویراستار مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند را دارند.

مراجع

هاشمی بصر، ش. و صالحی، ا. (۱۳۹۶)، نتایجی در تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم های n-k+۱)n) از n با واحدهای وابسته، مجله علوم آماری، **۱۱**، ۱۹۶-۱۷۵.

Aitken, A. C. and Gonin, H. T. (1935), On Fourfold Sampling with and without Replacement, *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, **55**, 114-125.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (2008), *A First Course in Order Statistics*, Philadelphia, SIAM.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2005), A Note on the Mean Residual Life Function of a Parallel System, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 475-484.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2006), The Mean Residual Life Function of a k-out-of-n Structure at the System Level, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314-318.

Asadi, M. and Goliforushani, S. (2008), On the Mean Residual Life Function of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 574-580.

Bairamov, I., Ahsanullah, M. and Akhundov I. (2002), A Residual Life Function of a System Having Parallel or Series Structures, *Journal of Statistical Theory and Application*, **2**, 119-132.

Bairamov, I. (2013), Reliability and Mean Residual Life of Complex Systems with Two Dependent Components Per Element, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**, 276-285.

David, H. and Nagaraja H. N. (2003), *Order Statistics*, John Wiley and Sons.

Eryilmaz, S. (2012), On the Mean Residual Life of a k-out-of-n: G System with a Single Cold Standby Component, *Journal of European Operational Research*, **222**, 273-277.

Eryilmaz, S. (2017), Reliability Analysis of Systems with Components Having Two Dependent Subcomponents, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 8005-8017.

Fernandez, A. J. (2010), Tolerance Limits for k-out-of-n Systems with Exponentially Distributed Component Lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability*, **59**, 331-337.

Kochar, S. and Xu, M., (2010), On Results Lifetimes of k-out-of-n Systems with Non-Identical Components, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **24**, 109-127.

Khanjari, M. (2011), A Note on Mean Residual Life Function of a Coherent System with Exchangeable or Nonidentical Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3267-3275.

Li, X. and Zhao, P., (2006), Some Aging Properties of the Residual Life of k-out-of-n System, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 535-541.

Li, X. and Zhao, P., (2008), Stochastic Comparison on General Inactivity Time and General Residual Life of k-out-of-n: G systems, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37** ,1005-1019.

Mari, D. D. and Kotz, S. (2001), *Correlation and Dependence*, London: Imperical College Press.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer.

Parvardeh, A. and Balakrishnan, N. (2014), On the Conditional Residual Life and Inactivity Time of Coherent Systems, *Journal of Applied Probability*, **51**, 990-998.

Razmkhah, M. and Saberzade, Z. (2017), On the Reliability of Complex Systems with Three Dependent Components Per Element, *Journal of the Iranian Statistical Society (JIRSS)*, **16**, 1-17.

Rezapour, M. Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013), Stochastic Comparison of Residual and Past Lifetimes of (n-k+1)-out-of-n Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 2185-2199.

Salehi, E., Asadi, M. and Eryilmaz, S. (2011), Reliability Analysis of Consecutive k-out-of-n Systems with Non-identical Components Lifetimes, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2920-2932.

Salehi, E. and Hashemi-Bosra, S. S., (2017), The Mean General Residual Lifetime of (n-k+1)-out-of-n Systems with Exchangeable Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 6382-6400.

Tavangar, M., (2014), Some Comparisons of Residual Life of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics*, **61**, 549-556.

Tavangar, M. and Bairamov, I., (2015), On Conditional Residual Lifetime and Conditional Inactivity Time of k-out-of-n Systems, *Reliability Engineering and System Safety*, **144**, 225-233.

Tavangar, M. and Asadi, M., (2016), Some Representation Theorems in Terms of Mean Residual Lifetime and Mean Inactivity Time of Coherent Systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 226-235.

Mean Residual Life of Complex Systems Containing two Components Per Element with Some Intact Components

Razmkhah, M. and Saberzadeh, Z.

Department of Statistics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract: The complex systems containing of n elements are considered, each having two dependent components. The main goal of this paper is to investigate the mean residual life of such systems with some intact components at time t. Toward this end, the bivariate binomial model and also two different generalizations are described. Finally, some graphical and numerical analyses are provided for mean residual life of such systems under Farlie-Gumbel-Morgenstern model.

Keywords: Bivariate binomial model, Bivariate order statistics, Dependence parameter, Farlie-Gumbel-Morgenstern model, Complex systems.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05