

## برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده

آزاده کیاپور

گروه آمار، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۹/۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۱/۳۰

**چکیده:** معمولاً با مشاهده یک نمونه تصادفی و با استفاده از روش‌های معمول برآوردیابی مانند روش ماکسیمم درست‌نمایی به برآورد پارامتر نامعلوم می‌پردازند. در بعضی مواقع اطلاعاتی در مورد پارامتر واقعی به صورت یک حدس در اختیار داریم. در چنین حالت‌هایی می‌توان برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی یا هر برآوردگر دیگری را در جهت مقدار حدسی منقبض کرد و برآوردگرهای انقباضی را ساخت. در این مقاله، به مطالعه رفتار یک برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس نمونه‌های سانسور شده تحت یک تابع زیان نامتقارن ناوردای مقیاس می‌پردازیم. برای این منظور، برآوردگر انقباضی بیزی معرفی و کارایی نسبی بین این برآوردگر و بهترین برآوردگر خطی با توجه به حجم نمونه، ابرپارامترهای توزیع پیشین و میزان نزدیکی مقدار حدسی به مقدار واقعی پارامتر محاسبه می‌شود. همچنین نتایج به دست آمده به توزیع‌های طول عمر رایلی و وایبول تعمیم داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** برآوردگر انقباضی بیزی، توزیع نمایی، داده‌های سانسور شده.

## ۱ مقدمه

در بعضی از موقعیت‌های کاربردی، محقق دارای اطلاعاتی درباره پارامتر نامعلوم  $\theta$  به صورت یک حدس یا گمان  $\theta_0$  است. برآوردگرهای انقباضی<sup>۱</sup> برای پارامتر نامعلوم  $\theta$  وقتی که مقدار حدسی  $\theta_0$  برای  $\theta$  در اختیار

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: آزاد کیاپور، kiapour@baboliau.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10

<sup>۱</sup>Shrinkage estimators

۱۲۰ ..... برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده

باشد، توسط تامسون (۱۹۶۸) به صورت

$$\hat{\theta}_s = k\hat{\theta} + (1-k)\theta_0, \quad 0 \leq k \leq 1,$$

تعریف می‌شود، که در آن  $\hat{\theta}$  یک برآوردگر معمول مانند ماکسیمم درست‌نمایی و  $k$  ضریب انقباضی است که توسط محقق با توجه به عقیده‌اش نسبت به مقدار حدسی  $\theta_0$  تعیین می‌شود. در صورتی که مقدار حدسی پارامتر به مقدار واقعی آن نزدیک باشد، برآوردگرهای انقباضی رفتار بهتری نسبت به برآوردگرهای معمول مانند برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی از خود نشان می‌دهند به این مفهوم که دارای مخاطره کمتری هستند. فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  طول عمر  $n$  مولفه یک سیستم در حال کار تحت مدل نمایی با پارامتر نامعلوم  $\theta$  با تابع چگالی

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x > 0, \theta > 0.$$

باشند. مجموعه نمونه سانسور شده از راست نوع دوم<sup>۲</sup> را در نظر بگیرید که در آن فقط  $r$  تا از کوچکترین مشاهدات از نمونه تصادفی  $n$  تایی قابل مشاهده هستند. این نوع سانسور اغلب در انجام آزمون‌های طول عمر به کار می‌رود. در این حالت تمام  $n$  مولفه در آزمایش قرار می‌گیرند اما به جای آن که آزمایش تا پایان از کارافتادگی (شکست) تمام مولفه‌ها ادامه داده شود، این کار تا زمانی انجام می‌شود که  $r$  مولفه از کار بیفتند. زمان کل آزمایش به صورت

$$T_r = \sum_{i=1}^r x_{(i)} + (n-r)x_{(r)}, \quad n > r.$$

است. اسپون و سوبل (۱۹۵۳) نشان دادند که  $T_r$  آماره بسنده کامل برای  $\theta$  است.

همچنین  $T^* = T_r/r$  یک برآوردگر ناریب دارای کمترین واریانس برای  $\theta$  است. با فرض مشاهده نمونه سانسور شده  $x_{(1)}, \dots, x_{(r)}$  تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\theta|x_{(1)}, \dots, x_{(r)}) \propto \theta^{-r} \exp\left(-\frac{T_r}{\theta}\right), \quad (1)$$

<sup>۲</sup>Type-II right censored samples

است. بنابراین برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$ ،  $T^* = T_r/r$  است و  $\sqrt{2r}T^*/\theta = \sqrt{2}T_r/\theta \sim \chi^2_{2r}$ . پراکاش و سینگ (۲۰۰۸) به برآوردیابی انقباضی براساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان لاینکس پرداختند. آن‌ها چهار آزمون-برآوردگر انقباضی برای میانگین توزیع نمایی، معرفی و آن‌ها را با بهترین برآوردگر خطی براساس برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی به فرم  $cT^*$  مقایسه کردند. روش آن‌ها یک روش کلاسیک و براساس پذیرش یا رد فرضیه  $\theta = \theta_0$  :  $H_0$  است. از کارهای جدید در این زمینه می‌توان به کبیریا و همکاران (۲۰۱۰)، میرفره و احمدی (۲۰۱۴)، بلاغی و همکاران (۲۰۱۵) و کیاپور و نقی‌زاده قمی (۲۰۱۶) اشاره کرد.

نورستروم (۱۹۹۶) کلاسی از توابع زیان به فرم

$$L(\theta, \delta) = w(\theta) \frac{(\delta - \theta)^2}{\delta^i}, \quad 0 \leq i \leq 2, \quad w(\theta) > 0, \quad (2)$$

را معرفی کرد. کریم‌نژاد و همکاران (۲۰۱۴) پیشگوی بیزی و بیزی استوار<sup>۳</sup> را برای خانواده‌ای از مدل‌های با پارامتر مقیاس تحت تابع زیان (۲) مورد بررسی قرار دادند. تابع زیان (۲) تنها در سه حالت  $i = 0$  و  $i = 1$ ،  $w(\theta) = \frac{1}{\theta}$  و  $i = 2$  و  $w(\theta) = 1$  ناوردای مقیاس<sup>۴</sup> است. تابع زیان (۲) در حالت دوم یعنی  $i = 1$  و  $w(\theta) = \frac{1}{\theta}$  به یک تابع زیان نامتقارن و ناوردای مقیاس به فرم

$$L(\theta, \delta) = \left( \sqrt{\frac{\delta}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{\delta}} \right)^2 = \frac{\delta}{\theta} + \frac{\theta}{\delta} - 2 = \Delta + \frac{1}{\Delta} - 2 \quad (3)$$

تبدیل می‌شود، که یک تابع زیان اکیداً محدب و نامتقارن نسبت به  $\frac{\delta}{\theta} = \Delta$  است و به عنوان تابعی از  $\Delta$  دارای مینیمم یکتا در نقطه‌ی  $\Delta = 1$  است. این تابع زیان در موقعیت‌هایی که کم‌برآوردی دارای اهمیت بیشتری نسبت به بیش‌برآوردی باشد مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به این‌که (۳) یک تابع زیان ناوردای مقیاس است، به خوبی می‌تواند برای برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی مورد استفاده قرار گیرد. نقی‌زاده قمی و همکاران (۲۰۱۰) و الموسوی و خان (۲۰۱۶) به برآوردیابی پس از گزینش<sup>۵</sup> به‌ترتیب در توزیع‌های گاما و پارتو تحت تابع زیان (۳) پرداختند.

پراکاش و سینگ (۲۰۰۹) از یک روش بیزی برای ساختن برآوردگرهای انقباضی در توزیع وایبول

<sup>۳</sup>Robust Bayes

<sup>۴</sup>Scale invariant

<sup>۵</sup>Estimation after selection

براساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان لاینکس استفاده کردند و برآوردگر پیشنهادی خود را برآوردگر انقباضی بیزی<sup>۶</sup> نامیدند. آن‌ها نقش حجم نمونه را مورد بررسی قرار ندادند و رفتار برآوردگرهای انقباضی بیزی را با برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی مقایسه کردند. در این مقاله، برآوردیابی انقباضی بیزی پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده تحت تابع زیان (۳) و با در نظر گرفتن حجم نمونه، پارامترهای توزیع پیشین و نزدیکی مقدار حدسی به مقدار واقعی پارامتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۲، بهترین برآوردگر خطی به فرم  $cT^*$  تحت تابع زیان (۳) ارائه و مخاطره آن محاسبه می‌شود. سپس براساس روش ارائه شده توسط پراکاش و سینگ (۲۰۰۹)، یک برآوردگر انقباضی بیزی در بخش ۳ معرفی می‌شود. در بخش ۴، رفتار برآوردگر انقباضی بیزی نسبت به بهترین برآوردگر خطی به فرم  $cT^*$  با استفاده از ویژگی کارایی نسبی تحت تابع زیان (۳) مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۵، نتایج به دست آمده به توزیع‌های طول عمر رایلی و وایبول تعمیم داده می‌شود. در پایان، یک مثال عددی برای تشریح بیشتر نتایج، ارائه شده است.

## ۲ بهترین برآوردگر خطی به فرم $cT^*$

یک برآوردگر خطی از  $T^*$  به فرم  $cT^*$  را در نظر بگیرید. مخاطره این برآوردگر تحت تابع زیان (۳) به صورت

$$\begin{aligned} R(\theta, cT^*) &= E\left(\frac{cT^*}{\theta}\right) + E\left(\frac{\theta}{cT^*}\right) - 2 \\ &= \frac{c}{r} E\left(\frac{rT^*}{\theta}\right) + \frac{r}{c} E\left(\frac{1}{rT^*/\theta}\right) - 2 \\ &= c + \frac{r}{c(r-1)} - 2 \end{aligned}$$

است، که تابعی محدب نسبت به  $c$  و دارای نقطه مینیمم در  $c = c_1$  به فرم

$$c_1 = \sqrt{\frac{r}{r-1}}, \quad r > 1$$

<sup>۶</sup>Bayes shrinkage estimator

است. همچنین مخاطره برآوردگر  $c_1 T^*$  به صورت

$$R(\theta, c_1 T^*) = c_1 + \frac{r}{c_1(r-1)} - 2 = 2\left(\sqrt{\frac{r}{r-1}} - 1\right), \quad r > 1$$

است. با توجه به تعریف لهن (۱۹۵۱) برآوردگر  $\delta$  را تحت تابع زیان (۳) برای  $\theta$  مخاطره ناریب<sup>۷</sup> گویند اگر

$$\sqrt{\frac{E(\delta)}{E(\delta^{-1})}} = \theta. \quad (۴)$$

با قراردادن  $\delta = c_1 T^*$  در رابطه (۴) داریم

$$\sqrt{\frac{E(c_1 T^*)}{E((c_1 T^*)^{-1})}} = c_1 \sqrt{\frac{\theta}{r/(r-1)\theta}} = c_1 \sqrt{\frac{(r-1)\theta^2}{r}} = \theta.$$

بنابراین برآوردگر  $c_1 T^*$  تحت تابع زیان (۳) برای  $\theta$  مخاطره ناریب است، در نتیجه  $c_1 T^*$  یک برآوردگر مخاطره ناریب با کمترین مخاطره در کلاس برآوردگرهای به فرم  $cT^*$  است.

### ۳ برآوردگر انقباضی بیزی

اگر توزیع پیشین مزدوج گامای وارون،  $IGamma(\alpha, \beta)$ ، با تابع چگالی احتمال

$$\pi^{\alpha, \beta}(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha+1}} e^{-\frac{\beta}{\theta}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

را برای  $\theta$  در نظر بگیریم، آنگاه با توجه به تابع درستنمایی (۱)، توزیع پسین  $\theta$  نیز گامای وارون به صورت  $IGamma(\alpha + r, \beta + T_r)$  با تابع چگالی

$$\pi(\theta|x_{(1)}, \dots, x_{(r)}) = \frac{(\beta + T_r)^{\alpha+r}}{\Gamma(\alpha + r)\theta^{\alpha+r+1}} e^{-\frac{\beta+T_r}{\theta}}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

<sup>۷</sup>Risk unbiased

۱۲۴ ..... برآوردگر انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده

خواهد بود. با پیروی از کار نقی‌زاده قمی و همکاران (۲۰۱۰)، برآورد بیزی  $\theta$  تحت تابع زیان (۳) برابر است با

$$\begin{aligned} \delta^\pi(x_{(1)}, \dots, x_{(r)}) &= \sqrt{\frac{E(\theta|x_{(1)}, \dots, x_{(r)})}{E(\theta^{-1}|x_{(1)}, \dots, x_{(r)})}} \\ &= \sqrt{\frac{(\beta + T_r)/(\alpha + r - 1)}{(\alpha + r)/(\beta + T_r)}} \\ &= \frac{\beta + T_r}{\sqrt{(\alpha + r)(\alpha + r - 1)}}, \quad \alpha + r > 1. \end{aligned} \quad (5)$$

با در نظر گرفتن پیشین ناآگاهی‌بخش جفریز برای  $\theta$  به صورت  $\theta > 0$ ،  $\pi^{\circ, \circ}(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ ، یعنی حالت  $\alpha = \beta = 0$ ، برآوردگر بیز تعمیم‌یافته به صورت

$$\delta^{\pi^{\circ, \circ}}(x_{(1)}, \dots, x_{(r)}) = \frac{T_r}{\sqrt{r(r-1)}} = \sqrt{\frac{r}{r-1}} T^* = c_1 T^*,$$

است. اگر مقدار حدسی  $\theta_0$  در مورد پارامتر  $\theta$  در اختیار باشد آن‌گاه داریم  $\frac{2T_r}{\theta_0} \sim \chi^2_{2r}$ . با استفاده از روش پراکاش و سینگ (۲۰۰۹) و قرار دادن  $\theta = E(\delta^\pi(x_{(1)}, \dots, x_{(r)}))$ ، داریم

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha + r)(\alpha + r - 1)}} \left[ \frac{\beta}{\theta_0} + \frac{1}{2} E\left(\frac{2T_r}{\theta_0}\right) \right] = 1,$$

مقدار  $\beta$  با کمی محاسبات به صورت

$$\beta = (A^{-1} - r)\theta_0, \quad (6)$$

است، که در آن  $A^{-1} = \sqrt{(\alpha + r)(\alpha + r - 1)}$ . با جایگذاری مقدار  $\beta$  از (۶) در برآوردگر بیز (۵)، برآوردگر انقباضی بیزی به صورت

$$\hat{\theta}_{BS} = A[(A^{-1} - r)\theta_0 + rT^*] = kT^* + (1 - k)\theta_0, \quad (7)$$

به دست می آید، که در آن  $T^* = T_r/r$  و  $k = rA$ . مخاطره برآوردگر انقباضی بیزی (۷) تحت تابع زیان (۳) به صورت

$$\begin{aligned} R(\theta, \hat{\theta}_{BS}) &= E\left(\frac{kT^* + (1-k)\theta_0}{\theta}\right) + E\left(\frac{\theta}{kT^* + (1-k)\theta_0}\right) - 2 \\ &= (1-k)\theta^* + \frac{k}{r} E\left(\frac{rT^*}{\theta}\right) + E\left(\frac{1}{kT^*/\theta + (1-k)\theta^*}\right) - 2 \\ &= (1-k)\theta^* + k + \int_0^\infty \left[\frac{k}{r}W + (1-k)\theta^*\right]^{-1} g(w)dw - 2, \end{aligned}$$

است، که در آن  $\theta^* = \theta_0/\theta$  و  $W = rT^*/\theta \sim \chi_{2r}^2$  با تابع چگالی  $g_W(w)$  می باشد. مخاطره  $R(\theta, \hat{\theta}_{BS})$  با استفاده از روش های عددی با استفاده از نرم افزار R 3.1.2 محاسبه می شود. دقت کنید که در برآوردگر انقباضی بیزی (۷)، با مشخص شدن ابرپارامتر  $\alpha$ ، مقدار ابرپارامتر  $\beta$  از رابطه (۶) به دست می آید.

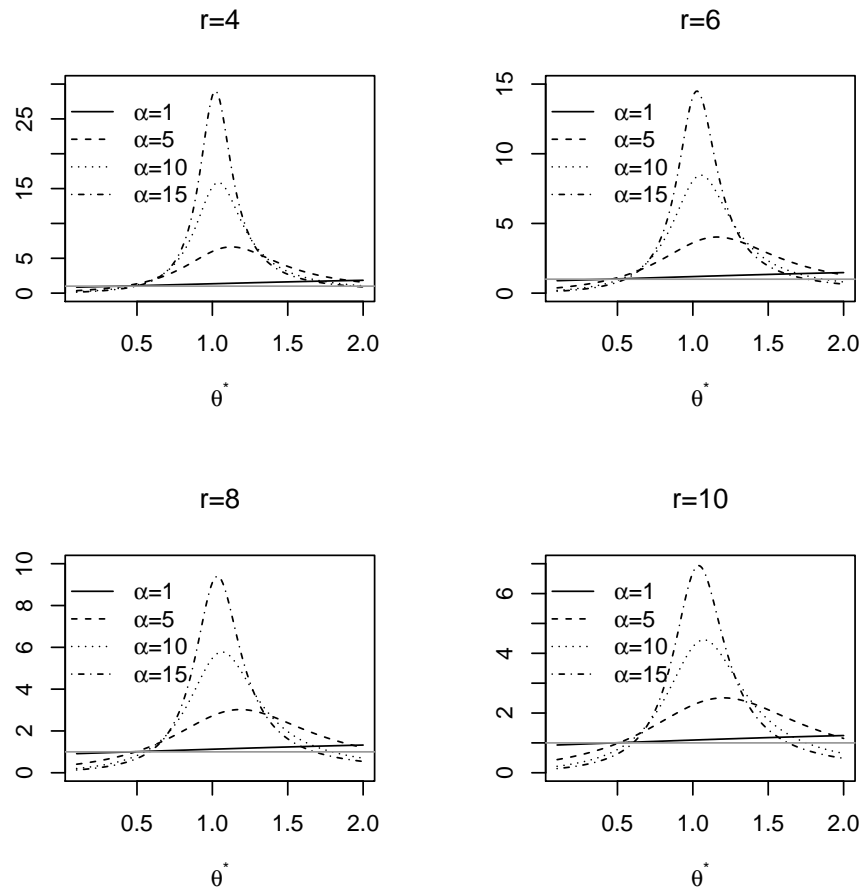
#### ۴ مقایسه برآوردگرهای $\hat{\theta}_{BS}$ و $c_1T^*$

کارایی نسبی برآوردگر انقباضی بیزی  $\hat{\theta}_{BS}$  نسبت به برآوردگر  $c_1T^*$  به صورت زیر تعریف می شود.

$$RE(\hat{\theta}_{BS}, c_1T^*) = \frac{R(\theta, c_1T^*)}{R(\theta, \hat{\theta}_{BS})}, \quad (۸)$$

شکل ۱ نمودار کارایی نسبی (۸) را به ازای مقادیر مختلف  $r = ۴(۲)۱۰$  و  $\alpha = ۱, ۵, ۱۰, ۱۵$  نسبت به  $\theta^*$  نشان می دهد. خط افقی یک برای مقایسه بهتر برآوردگرهای  $\hat{\theta}_{BS}$  و  $c_1T^*$  رسم شده است. از شکل ۱ ملاحظه می شود که

- برآوردگر انقباضی بیزی در بیشتر موارد دارای مخاطره کمتر (کارایی بزرگتر از ۱) نسبت به برآوردگر  $c_1T^*$  است.
- کارایی نسبی برآوردگر انقباضی بیزی، نسبت به برآوردگر  $c_1T^*$  به ازای  $r$  ثابت و  $\alpha = ۱$  با افزایش  $\theta^*$  افزایش می یابد، اما برای مقادیر دیگر  $\alpha$  ابتدا افزایش می یابد و در نزدیکی  $\theta^* = ۱$  به ماکسیمم خود می رسد و سپس روند کاهشی دارد. توجه کنید که در نقطه  $\theta^* = ۱$  مقدار حدسی  $\theta_0$  با مقدار واقعی پارامتر برابر است، یعنی  $\theta = \theta_0$ .



شکل ۱. کارایی نسبی بین  $\hat{\theta}_{BS}$  و  $c_1 T^*$  به ازای مقادیر مختلف  $\alpha = 1, 5, 10, 15$ ,  $r = 4(2)10$  نسبت به  $\theta^*$ .



- برای  $r$  ثابت و مقادیر  $\theta^*$  نزدیک به یک، مقدار کارایی نسبی با افزایش  $\alpha$ ، افزایش می‌یابد.
- برای مقادیر  $\theta^*$  نزدیک به یک و مقادیر  $\alpha > 1$ ، مقدار کارایی نسبی با افزایش  $r$  کاهش می‌یابد.

## ۵. تعمیم نتایج به توزیع‌های وایبول و رایلی

فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_r$  یک نمونه سانسور شده از توزیع وایبول با تابع چگالی احتمال

$$f(y|\nu, \theta) = \frac{\nu}{\theta} y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{y^\nu}{\theta}\right), \quad y, \nu, \theta > 0,$$

باشند، که در آن  $\nu$  پارامتر شکل معلوم و  $\theta$  پارامتر مقیاس نامعلوم هستند. در این صورت  $X = Y^\nu$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  خواهد بود. سینها (۱۹۸۶) نشان داد که زمان کل آزمایش برابر است با

$$S_r = \sum_{i=1}^r y_{(i)}^\nu + (n-r)y_{(r)}^\nu, \quad n > r$$

و  $S^* = S_r/r$  برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردگر نارایب با کمترین واریانس برای  $\theta$  است. همچنین  $2S_r/\theta \sim \chi_{2r}^2$ . دقت کنید که توزیع رایلی از توزیع وایبول به‌ازای  $\nu = 2$  به‌دست می‌آید. بنابراین تمام نتایج مطرح شده در این مقاله برای نمونه سانسور از توزیع وایبول با پارامتر شکل معلوم  $\nu$  و توزیع رایلی برقرار خواهد بود.

توزیع نمایی دارای نرخ خرابی<sup>۱</sup> ثابت به‌صورت

$$r(t; \theta) = \frac{f(t|\theta)}{1 - F(t|\theta)} = \frac{1}{\theta},$$

است. بنابراین برای مدل‌بندی داده‌هایی که با افزایش زمان دچار تغییر در نرخ خرابی می‌شوند مناسب نخواهد بود. توزیع رایلی با تابع چگالی

$$f(y|\theta) = \frac{2y}{\theta} \exp\left(-\frac{y^2}{\theta}\right), \quad y > 0,$$

<sup>۱</sup>Failure rate

دارای نرخ خرابی صعودی به صورت

$$r(t; \theta) = \frac{2t}{\theta},$$

است. بنابراین برای مدل‌بندی داده‌های طول عمر که با افزایش زمان، میزان خرابی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد مناسب‌تر است.

## ۶ مثال کاربردی

داده‌های زیر زمان‌های شکست (بر حسب دقیقه) برای یک نمونه به اندازه ۱۵ از مولفه‌های الکتریکی در یک آزمون طول عمر شتابنده<sup>۹</sup> هستند (لاولس، ۲۰۰۳).

۱/۴۵/۱۶/۳۱۰/۸۱۲/۱۱۸/۵۱۹/۷۲۲/۲۲۳۳۰/۶۳۷/۳۴۶/۳۵۳/۹۵۹/۸۶۶/۲.

میرمصطفایی و همکاران (۲۰۱۶) از این داده‌ها برای محاسبه حدود تحمل برای زمان‌های تعمیر مینیمال یک سیستم سری با مولفه‌های توزیع شده به صورت رایلی استفاده کردند. یک آزمون کلموگروف-اسمیروف با مقدار آماره آزمون  $0/2341$  و  $p$ -مقدار  $0/3304$  حاکی از برازش توزیع رایلی با  $\hat{\theta} = 1161/195$  به این داده‌ها است. فرض کنید  $r = 6$ ، یعنی آزمایش تا شکست ۶ مولفه ادامه می‌یابد. در این صورت  $S_6 = 3753/21$  و در نتیجه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$  برابر است با  $S_6^* = S_6/6 = 625/535$ . همچنین  $c_1 = 1/0954$  و در نتیجه بهترین برآوردگر خطی در کلاس برآوردگرهای خطی به فرم  $cS^*$  برابر است با  $c_1 S^* = 685/2392$ . مخاطره این برآوردگر نیز  $0/1909$  است. با توجه به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی برای  $\theta$ ، اگر مقادیر  $300$ ،  $400$ ،  $500$ ،  $600$ ،  $700$ ،  $800$ ،  $900$  به عنوان مقادیر حدسی  $\theta_0$  در نظر گرفته شوند، آنگاه مقادیر  $\hat{\theta}^* = \theta_0 / \hat{\theta}$  عبارتند از  $0/4795$ ،  $0/6394$ ،  $0/7993$ ،  $0/9591$ ،  $1/1190$ ،  $1/2789$ ،  $1/4387$ . جدول ۲ کارایی نسبی برآوردگر انقباضی بیزی  $\hat{\theta}_{BS}$  و برآوردگر  $c_1 S^*$  را برای  $r = 6$  و مقادیر مختلف  $\hat{\theta}^*$  و  $\alpha$  نشان می‌دهد. با انتخاب  $\alpha = 1$  بیشترین کارایی نسبی با انتخاب  $\theta_0 = 900$  رخ می‌دهد. همچنین بیشترین کارایی نسبی برای مقادیر  $10 \leq \alpha \leq 20$  و  $5 \leq \alpha \leq 10$  به ترتیب با انتخاب  $\theta_0 = 700$  و  $\theta_0 = 600$  اتفاق می‌افتد که به مقدار برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

<sup>۹</sup> Accelerated life test

$S^* = 625/535$  نزدیک‌ترند. در هر یک از این موارد، برآوردگر انقباضی بیزی دارای مخاطره کمتری است و می‌توان برای برآورد از آن استفاده کرد. اگر مقادیر حدسی  $\theta_0 = 500, 600, 700$  انتخاب شوند، آن‌گاه برآوردگرهای انقباضی بیزی به‌ازای مقادیر  $\alpha$  بزرگتر دارای مخاطره کمتری هستند.

جدول ۰۱. کارایی نسبی برآوردگرهای  $\hat{\theta}_{BS}$  و  $c_1 S^*$

$\hat{\theta}^*$	$\alpha$				
	۲۰	۱۵	۱۰	۵	۱
۰,۴۷۹۵	۰,۶۲۹۷	۰,۷۱۱۴	۰,۸۴۵۱	۱,۰۴۹۶	۱,۰۱۵۲
۰,۶۳۹۴	۱,۴۹۱۸	۱,۵۹۰۲	۰,۶۸۵۸	۰,۶۱۸۷	۰,۰۶۸۰
۰,۷۹۹۳	۴,۰۵۱۷۰	۴,۲۵۱۵	۳,۶۳۶۶	۲,۴۴۳۰	۱,۱۲۰۷
۰,۹۵۹۱	۱۷,۸۹۵۵	۱۲,۱۹۹۰	۷,۲۷۸۱	۳,۳۹۸۸	۱,۱۷۳۰
۱,۱۱۹۰	۱۳,۲۷۷۴	۱۱,۱۰۹۲	۷,۹۰۸۷	۳,۹۹۵۸	۱,۲۲۴۵
۱,۲۷۸۹	۴,۴۹۸۵	۴,۷۲۲۸	۴,۸۰۸۷	۳,۸۱۶۳	۱,۲۷۴۸
۱,۴۳۸۷	۲,۱۶۹۱	۲,۳۹۹۸	۲,۷۸۴۲	۳,۱۴۱۰	۱,۳۲۳۳

## ۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به برآوردیابی انقباضی بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی براساس داده‌های سانسور شده پرداخته شد. برآوردگر دارای کمترین مخاطره در کلاس برآوردگرهای به فرم  $c\hat{\theta}$  به دست آمده و مخاطره آن محاسبه شد. سپس برآوردگر انقباضی بیزی براساس توزیع پیشین و اطلاع غیرنمونه‌ای به صورت حدس  $\theta$  معرفی و عملکرد آن نسبت به برآوردگر  $c\hat{\theta}$  با محاسبه کارایی نسبی بین آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت. به طور کلی برآوردگر انقباضی بیزی در حالتی که مقدار حدسی  $\theta_0$  به مقدار واقعی  $\theta$  نزدیک است، دارای کارایی بیشتری نسبت به برآوردگر  $c\hat{\theta}$  است. همچنین برای مقادیر ثابت  $r$  در حالتی که  $\theta$  نزدیک به  $\theta_0$  است، برآوردگرهای انقباضی با پارامترهای پیشین  $a$  و  $b$  بزرگتر دارای کارایی بیشتری هستند.

## تقدیر و تشکر

نویسنده از راهنمایی‌های سازنده داوران محترم که باعث بهبود کیفی مقاله گردید کمال تشکر و سپاس‌گزاری را دارد.

## مراجع

- Al-Mosavi, R. R. and Khan, S. (2016), Estimating Moments of a Selected Pareto Population under Asymmetric Invariant Loss Function, *Statistical Paper*, **57**, 1-16.
- Belaghi, R., Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M. (2015), Improved Estimators of the Distribution Function Based on Lower Record Values, *Statistical Papers*, **65**, 453-477.
- Epstein, B. and Sobel, M. (1953), Life Testing, *Journal of American Statistical Association*, **48**, 486-507.
- Karimnezhad, A., Niazi, S. and Parsian, A. (2014), Bayes and Robust Bayes Prediction with an Application to a Rainfall Prediction Problem, *Journal of the Korean Statistical Society*, **43**, 275-291.
- Kiapour, A. and Naghizadeh Qomi, M. (2016), Shrinkage Preliminary Test Estimation under a Precautionary Loss Function with Applications on Records and Censored Data, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **15**, 73-85.
- Kibria, B. M. G. and Saleh, A. K. M. E. (2010), Preliminary Test Estimation of the Parameters of Exponential and Pareto Distributions for Censored Samples, *Statistical Papers*, **51**, 757-773.
- Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley, New York.
- Lehmann, E. L. (1951), A General Concept of Unbiasedness, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 587-592.
- Mirfarah, E. and Ahmadi, J. (2014), Pitman-Closeness of Preliminary Test and Some Classical Estimators Based on Records From Two Parameter Exponential Distribution, *Journal of Statistical Research of Iran*, **11**, 73-96.
- MirMostafaei, S. M. T. K., Naghizadeh Qomi, M. and Fernandez, A. J. (2016), Tolerance Limits for Minimal Repair Times of a Series System with Rayleigh Distributed Component Lifetimes, *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 3153-3163.

- Naghizadeh Qomi, M., Nematollahi, N. and Parsian, A. (2010), On Estimation Following Selection with Applications on k-Records and Censored data, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **9**, 59-79.
- Norstrom, J. G. (1996), The Use of Precautionary Loss Function in Risk Analysis, *IEEE Transactions on Reliability*, **45**, 400-403.
- Prakash, G. and Singh, D. C. (2008), Shrinkage Estimation in Exponential Type-II Censored Data under LINEX Loss, *Journal of the Korean Statistical Society*, **37**, 53-61.
- Prakash, G. and Singh, D. C. (2009), A Bayesian Shrinkage Approach in Weibull Type-II Censored Data Using Prior Point Information, *REVS-TAT -Statistical Journal*, **7**, 171-187.
- Sinha, S. K. (1986), *Reliability and Life Testing*, Wiley Eastern, New Delhi.
- Thompson, J. R. (1968), Some Shrunken Techniques for Estimating the Mean, *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 113-122.