مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۴۱۳ – ۴۲۸
DOI: 10.29252/jss.12.2.413

بررسی ویژگی‌های سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی

ربیع‌اله رحمانی و محی‌الدین ایزدی

گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۰/۰۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: یک سیستم مشتمل بر n مولفه مستقل دو وضعیتی را در نظر بگیرید. فرض کنید هر مولفه دارای یک وزن تصادفی بوده و سیستم در زمان t کار کند هرگاه مجموع وزن مولفه‌های فعال آن در این زمان، بزرگتر از مقدار از پیش تعیین شده k باشد. چنین سیستمی را سیستم k-از-n وزنی تصادفی می‌نامیم. در این مقاله، به کمک ترتیب‌های تصادفی، نحوه تاثیر وزن و قابلیت اعتماد مولفه‌های یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی را بر طول‌عمر آن بررسی کرده و نشان داده‌ایم که با افزایش وزن و افزایش طول‌عمر مولفه‌ها به معنای ترتیب تصادفی معمولی، طول‌عمر سیستم نیز افزایش می‌یابد. هم‌چنین نشان داده‌ایم که بهترین سیستم k-از-n وزنی تصادفی زمانی ایجاد می‌شود که مولفه‌های با وزن بیشتر، دارای قابلیت اعتماد بیشتری نیز باشند. به کمک تناظر بین سیستم‌های k-از-n وزنی و منسجم، تابع قابلیت اعتماد و میانگین زمانی تا خرابی یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی را برحسب قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم بیان کرده‌ایم. علاوه بر این، یک الگوریتم برای شبیه‌سازی میانگین زمان تا خرابی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی، ارایه و پیاده‌سازی کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: سیستم k-از-n وزنی تصادفی، میانگین زمان تا خرابی، ترتیب تصادفی معمولی.

۱ مقدمه

یک سیستم شامل n مولفه دو وضعیتی مستقل را در نظر بگیرید. فرض کنید هر مولفه دارای وزن (ظرفیت) مربوط به خود بوده و سیستم کار کند هرگاه وزن کل آن، یعنی مجموع وزن مولفه‌های فعال، از مقدار از پیش

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ربیع‌اله رحمانی، rahmani.stat@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60K10، 90B25

تعیین شده k بزرگتر باشد. این سیستم را وو و چن (۱۹۹۴) معرفی و آن را سیستم k-از-n وزنی نامیدند. به منظور شناخت بیشتر این سیستم، فرض کنید برای $i = 1, 2, \ldots, n$، T_i طول‌عمر مولفه iام و w_i وزن آن باشد. سیستم در زمان t کار می‌کند هرگاه وزن کل آن در این زمان یعنی $\sum_{i=1}^{n} w_i I(T_i > t)$ بزرگتر از k یا مساوی با آن باشد، که در آن

$$I(T_i > t) = \begin{cases} 1 & T_i > t, \\ 0 & T_i \leq t. \end{cases}$$

واضح است که سیستم k-از-n معمولی حالتی خاص از سیستم k-از-n وزنی است که در آن برای هر $i = 1, \ldots, n$، $w_i = 1$.

نتایج زیادی درخصوص قابلیت اعتماد سیستم‌های k-از-n وزنی و ویژگی‌های آن‌ها به‌دست آمده است. هیشیاما (۲۰۰۱) روشی جدید برای محاسبه قابلیت اعتماد سیستم‌های k-از-n وزنی ارایه نمود. چن و یانگ (۲۰۰۵) سیستم‌های k-از-n وزنی دو مرحله‌ای را معرفی کردند و برخی از ویژگی‌های این سیستم‌ها را مورد بررسی قرار دادند. سیستم‌های k-از-n وزنی چند وضعیتی توسط لی و زو (۲۰۰۸) معرفی شد. آن‌ها الگوریتمی برای محاسبه قابلیت اعتماد این سیستم‌ها ارایه نمودند. اریلماز (۲۰۱۳a) میانگین عملکرد لحظه‌ای سیستم‌های k-از-n وزنی را بعد از rامین شکست مورد مطالعه قرار داد. اهمیت مولفه‌های سیستم‌های k-از-n وزنی توسط اریلماز و بزبولوت (۲۰۱۴)، ارموتکار و کمالجا (۲۰۱۴) و رحمانی و همکاران (۲۰۱۶a) بررسی شده است. مطالعه قابلیت اعتماد سیستم‌های k-از-n وزنی با استفاده از متغیرهای شرطی وزن‌های از دست رفته و وزن‌های باقی‌مانده توسط اریلماز (۲۰۱۵a) انجام شده است. اخیراً، رحمانی و همکاران (۲۰۱۶b) سیستم‌های k-از-n وزنی را با استفاده از ظرفیت کل سیستم مورد مقایسه قرار داده‌اند.

در سیستم‌های k-از-n وزنی همواره فرض بر این است که وزن مولفه‌ها یعنی w_iها مقادیر صحیح مثبت هستند. سیستم‌هایی وجود دارند که در آن‌ها وزن مولفه‌ها نه یک عدد بلکه یک متغیر تصادفی است. به عنوان مثال، بخش تکثیر یک موسسه چاپ، مشتمل بر n دستگاه تکثیر را در نظر بگیرید. یکی از مشخصه‌های مهم هر دستگاه، سرعت آن دستگاه است که به صورت تعداد برگه‌هایی که قادر است در هر دقیقه تکثیر کند، تعیین می‌شود. این مشخصه، وزن دستگاه‌ها (مولفه‌ها) تلقی شده و عملکرد سیستم مطلوب ارزیابی می‌شود هرگاه بتواند، در هر دقیقه، حداقل k برگه را تکثیر کند. معمولاً دستگاه‌ها به گونه‌ای هستند که پس از هر بار روشن شدن، سرعت تکثیر متفاوتی داشته و به همین دلیل وزن آن‌ها یک متغیر تصادفی

است. فرض کنید به محض روشن شدن هر دستگاه، سرعت آن روی یکی از مقادیر ممکن خود تثبیت شده و به صورت تعداد برگه‌هایی که در هر دقیقه، قادر است تکثیر کند در صفحه نمایش‌گر آن مشخص شود. یعنی پس از لحظه شروع، سیستم به یک سیستم k-از-n وزنی تبدیل می‌شود. چنین سیستمی را سیستم k-از-n وزنی تصادفی می‌نامند. اگر W_i و T_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، به ترتیب نشان‌دهنده وزن مولفه iام و طول‌عمر آن در یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی باشد، در این صورت سیستم در زمان t کار می‌کند، هرگاه $\sum_{i=۱}^{n} W_i I(T_i > t) \geq k$. در مثال دستگاه تکثیر، W_iها متغیرهای تصادفی گسسته هستند، اما لزوماً این‌گونه نیست، یعنی W_iها می‌توانند متغیرهای تصادفی پیوسته نیز باشند. به عنوان مثال، سیستم تامین برق خورشیدی یک کشور را که شامل n نیروگاه است، در نظر بگیرید. در این سیستم، هر نیروگاه یک مولفه و ظرفیت تولید برق آن، وزن آن مولفه است. واضح است که ظرفیت تولید برق هر نیروگاه به میزان انرژی ذخیره شده در آن بستگی دارد و به همین دلیل وزن مولفه‌ها متغیرهای تصادفی پیوسته‌اند.

در این مقاله فرض می‌شود W_iها متغیرهای تصادفی مستقل گسسته با مقادیر صحیح مثبت و مستقل از T_iها باشند. اریلماز (۲۰۱۳b)، برای نخستین بار، یک سیستم وزنی تحت عنوان سیستم k-از-n با مولفه‌های وزنی تصادفی را معرفی و قابلیت اعتماد آن را محاسبه کرد. رحمانی و همکاران (۲۰۱۶a) اهمیت مولفه‌ها را در سیستم معرفی شده توسط اریلماز (۲۰۱۳b) مورد بررسی قرار دادند.

یکی از موضوع‌های مورد علاقه در ارتباط با هر سیستم وزنی، بررسی نحوه تاثیر وزن و طول‌عمر مولفه‌ها بر عملکرد آن است. سمنیگو و شیکد (۲۰۰۸)، برای یک سیستم k-از-n وزنی، نشان دادند که وزن بیشتر مولفه‌ها منجر به طول‌عمر بیشتر سیستم می‌شود (براساس ترتیب تصادفی معمولی). در این مقاله، تاثیر وزن و طول‌عمر مولفه‌های یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی بر وضعیت آن، بررسی و از این طریق نتایج جالبی برای طراحی بهتر این سیستم به دست خواهد آمد.

یکی از ویژگی‌های هر سیستم، میانگین زمان تا خرابی (MTTF) آن سیستم است. میانگین زمان تا خرابی یک سیستم با طول عمر T، همان $E(T)$ است که در آن منظور از نماد $E(\cdot)$ امید ریاضی می‌باشد. اریلماز (۲۰۱۵b)، MTTF یک سیستم k-از-n وزنی را بررسی و یک الگوریتم برای محاسبه آن با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی ارایه داد. در این مقاله، به کمک تناظر بین سیستم‌های وزنی و منسجم، MTTF یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی محاسبه می‌شود. هم‌چنین یک الگوریتم برای محاسبه MTTF در سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی با تعداد مولفه‌های زیاد، ارایه می‌شود. تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در انتهای همین بخش آورده می‌شود. در بخش ۲ نحوه تاثیر وزن و طول‌عمر مولفه‌ها بر عملکرد یک سیستم

k-از-n وزنی تصادفی بررسی می‌شود. بخش ۳ به مطالعه میانگین زمان تا خرابی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی اختصاص داده شده است. بحث و نتیجه‌گیری در بخش پایانی ارایه می‌شود.

در یک سیستم مشتمل بر n مولفه مستقل دو وضعیتی، فرض کنید X_i، $i = 1, \ldots, n$، وضعیت مولفه iام باشد به طوری که $P[X_i = 1] = p_i = 1 - P[X_i = 0]$. احتمال کار کردن مولفه iام یعنی p_i را قابلیت اعتماد آن می‌نامند. هم‌چنین فرض کنید $\phi(\mathbf{x})$ تابع ساختار سیستم باشد، که در آن $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ بردار وضعیت مولفه‌ها است. اگر سیستم در حال کار کردن باشد، $\phi(\mathbf{x}) = 1$، در غیر این صورت $\phi(\mathbf{x}) = 0$. تابع قابلیت اعتماد سیستم به صورت $h(p_1, \ldots, p_n) = E[\phi(\mathbf{X})]$ تعریف می‌شود. مولفه iام را بی‌ارتباط با سیستم می‌نامند، هرگاه برای همه مقادیر بردار $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ رابطه

$$\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

برقرار باشد. تابع ساختار ϕ را منسجم گویند هرگاه اولاً افزایشی باشد، ثانیاً مولفه بی‌ارتباط با سیستم نداشته باشد. لازم به ذکر است، تابع $\phi : R^n \longrightarrow R$ را افزایشی گویند هرگاه ϕ نسبت به هر مولفه آن افزایشی باشد (بارلو و پروشان، ۱۹۸۱). اگر $\phi(\mathbf{x}) = 1$، در این صورت $\mathbf{x}$ را بردار مسیر و مجموعه $\{j; x_j = 1\}$ را مجموعه مسیر می‌نامند. اگر $\mathbf{x}$ یک بردار مسیر و برای هر $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ (برای همه مقادیر i، $y_i \leq x_i$ و برای برخی از مقادیر i، $y_i < x_i$)، $\phi(\mathbf{y}) = 0$، آن‌گاه $\mathbf{x}$ را بردار مسیر مینیمال و مجموعه $\{j; x_j = 1\}$ را مجموعه مسیر مینیمال می‌نامند. مجموعه‌های مسیر مینیمال را معمولاً با P_1، ...، P_r نشان می‌دهند.

اکنون یک سیستم k-از-n وزنی با بردار وزن مولفه‌های $\mathbf{W} = (w_1, \ldots, w_n)$ را که در آن $\sum_{i=1}^{n} w_i \geq k$ است، در نظر بگیرید. سمنیگو و شیکد (۲۰۰۸) نشان دادند برای چنین سیستمی، یک سیستم منسجم معادل با $m_{\mathbf{W}}$ مولفه وجود دارد که در آن $m_{\mathbf{W}} \leq n$. به منظور یافتن سیستم منسجم معادل، ابتدا لازم است برای هر زیرمجموعه $J = \{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ مقدار $W_J = \sum_{j=1}^{s} w_{i_j}$ محاسبه شده و سپس مجموعه $A_k = \{J; W_J \geq k\}$ مشخص شود. در مرحله بعد، باید آن دسته از اعضای A_k که شامل یک یا چند عضو دیگر آن هستند، کنار گذاشته شوند. اعضای باقیمانده که با P_1، ...، P_r نشان داده می‌شوند، در واقع مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم منسجم معادل هستند. مجموعه مولفه‌های این سیستم همان $\bigcup_{j=1}^{r} P_j$ است، که لزوماً با مجموعه $\{1, \ldots, n\}$ برابر نیست، زیرا ممکن است برخی مولفه‌ها با سیستم بی‌ارتباط باشند. اگر $(x_1, \ldots, x_{m_{\mathbf{W}}})$ بردار وضعیت مولفه‌های

سیستم منسجم معادل و $\phi_{\mathbf{W}}$ تابع ساختار آن باشد در این صورت

$$\phi_{\mathbf{W}}(x_1, \ldots, x_{m_{\mathbf{W}}}) = \max_{1\le j\le r} \min_{i\in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{r}(1 - \prod_{i\in P_j} x_i) \qquad (1)$$

(بارلو و پروشان، ۱۹۸۱). به عنوان مثال، یک سیستم ۶-از-۳ وزنی با بردار وزن $w = (4, 2, 1)$ را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که $A_6 = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$. بنابراین تنها مجموعه مسیر مینیمال این سیستم $P_1 = \{1, 2\}$ است. بنابراین مولفه سوم بی‌ارتباط بوده و $\phi_{\mathbf{W}}(x_1, x_2) = x_1x_2$.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی، به ترتیب، با توابع توزیع F و G و تابع بقای $\bar{F} = 1-F$ و $\bar{G} = 1-G$ باشند. X در ترتیب تصادفی معمولی از Y کمتر است ($X \le_{st} Y$) هرگاه برای هر $x \ge 0$، $\bar{F}(x) \le \bar{G}(x)$. برای دو بردار تصادفی n بعدی، مانند $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$، رابطه $\mathbf{X} \le_{st} \mathbf{Y}$ برقرار است، هرگاه برای هر تابع افزایشی مانند $\varphi : R^n \longrightarrow R$، $E[\varphi(\mathbf{X})] \le E[\varphi(\mathbf{Y})]$.

قضیه ۱: (شیکد و شانتیکمار، ۲۰۰۷) فرض کنید X_1، ...، X_n یک مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل و Y_1، ...، Y_n مجموعه‌ای دیگر از متغیرهای تصادفی مستقل باشد. اگر برای $i = 1, \ldots, n$، $X_i \le_{st} Y_i$، آنگاه برای هر تابع افزایشی $\varphi : R^n \longrightarrow R$، نامساوی $\varphi(X_1, \ldots, X_n) \le_{st} \varphi(Y_1, \ldots, Y_n)$ برقرار است، به ویژه $\sum_{i=1}^n X_i \le_{st} \sum_{i=1}^n Y_i$.

۲ تاثیر وزن و طول‌عمر مولفه‌های یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی بر وضعیت آن

یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با بردار وزن مولفه‌های $\mathbf{W} = (W_1, \ldots, W_n)$، بردار طول‌عمر مولفه‌های $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ و طول‌عمر $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t)$ وزن کل این سیستم در زمان t باشد، یعنی $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t) = \sum_{i=1}^n W_i I(T_i > t)$. به سادگی می‌توان دید که

$$T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} = \inf\{t; S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t) < k\}.$$

در این بخش، نحوه تاثیر وزن و طول‌عمر مولفه‌های چنین سیستمی بر وضعیت آن مطالعه می‌شود. با توجه به این‌که وضعیت سیستم، در هر زمانی، کاملاً وابسته به وزن کل سیستم در آن زمان است، این کار می‌تواند

از طریق بررسی تاثیر $\mathbf{W}$ و $\mathbf{T}$ بر $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t)$ انجام شود.

لم ۱: فرض کنید W و W' دو متغیر تصادفی و T و T' دو متغیر تصادفی نامنفی و مستقل از W و W' باشند.

(الف) اگر $W \leq_{st} W'$، آن‌گاه برای هر $t > ۰$، $WI(T > t) \leq_{st} W'I(T > t)$.

(ب) اگر $T \leq_{st} T'$، آن‌گاه برای هر $t > ۰$، $WI(T > t) \leq_{st} WI(T' > t)$.

برهان: لم به سادگی اثبات می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنید $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t)$ وزن کل یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با بردار وزن مولفه‌های $\mathbf{W} = (W_۱, \ldots, W_n)$ و بردار طول‌عمر مولفه‌های $\mathbf{T} = (T_۱, \ldots, T_n)$ در زمان t باشد.

(الف) اگر برای $i = ۱, \ldots, n$، $W_i \leq_{st} W_i'$، آن‌گاه $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t) \leq_{st} S_{\mathbf{W}'}^{\mathbf{T}}(t)$.

(ب) اگر برای $i = ۱, \ldots, n$، $T_i \leq_{st} T_i'$، آن‌گاه $S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}(t) \leq_{st} S_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}'}(t)$.

برهان: حکم هر دو قسمت با توجه به لم ۱ و با در نظر گرفتن قضیه ۱ به سادگی به دست می‌آید. قضیه ۲ نتیجه زیر را به همراه دارد.

نتیجه ۱: فرض کنید $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}$ طول‌عمر یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با بردار وزن مولفه‌های $\mathbf{W} = (W_۱, \ldots, W_n)$ و بردار طول‌عمر مولفه‌های $\mathbf{T} = (T_۱, \ldots, T_n)$ باشد. در این صورت

(الف) اگر برای $i = ۱, \ldots, n$، $W_i \leq_{st} W_i'$، آن‌گاه $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} \leq_{st} T_{\mathbf{W}'}^{\mathbf{T}}$.

(ب) اگر برای $i = ۱, \ldots, n$، $T_i \leq_{st} T_i'$، آن‌گاه $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} \leq_{st} T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}'}$.

قضیه ۳: فرض کنید $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}}$ طول‌عمر یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با بردار وزن مولفه‌های $\mathbf{W}$ و بردار طول‌عمر مولفه‌های $\mathbf{T}$ باشد. اگر $\mathbf{W} \leq_{st} \mathbf{W}'$، آن‌گاه $T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} \leq_{st} T_{\mathbf{W}'}^{\mathbf{T}}$.

برهان: با توجه به سمنیگو و شیکد (۲۰۰۸)، برای هر $t > ۰$، $\varphi(\mathbf{W}) = P[T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} > t]$ یک تابع افزایشی از $\mathbf{W}$ است. بنابراین

$$P[T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} > t] \quad = \quad \sum_{\mathbf{W}} P[T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} > t] P[\mathbf{W} = \mathbf{W}]$$

$$\begin{aligned} &= E[\varphi(\mathbf{W})] \\ &\leq E[\varphi(\mathbf{W}')] \\ &= \sum_{\mathbf{W}} P[T_{\mathbf{W}}^{\mathbf{T}} > t] P[\mathbf{W}' = \mathbf{W}] \\ &= P[T_{\mathbf{W}'}^{\mathbf{T}} > t], \end{aligned}$$

که همان نتیجه مورد نظر است. براساس قضیه ۳، اگر توزیع طول‌عمر مولفه‌های متناظر دو سیستم k-از-n وزنی یکسان باشد، سیستمی که بردار وزن مولفه‌های آن در ترتیب تصادفی معمولی چندمتغیره بزرگتر باشد، طول‌عمر بیشتری نیز خواهد داشت. به عبارت دیگر، با افزایش وزن مولفه‌های یک سیستم k-از-n وزنی می‌توان طول‌عمر آن را افزایش داد.

تذکر ۱: با مرور برهان قضیه ۳ مشخص می‌شود که نتیجه آن در حالت کلی و بدون فرض استقلال W_iها نیز برقرار است.

سیستم تکثیر یک موسسه چاپ شامل n دستگاه تکثیر با وزن‌های تصادفی $W_۱$، ...، W_n را در نظر بگیرید. در هر دستگاه، به منظور تامین ولتاژ مورد نیاز، یک شارژکننده وجود دارد که به محض خراب شدن آن، دستگاه از کار می‌افتد. اکنون وضعیتی را در نظر بگیرید که در آن n شارژکننده با طول‌عمرهای $T_۱$، ...، T_n در اختیار بوده و لازم است به دستگاه‌های تکثیر اختصاص داده شوند. این وضعیت می‌تواند به صورت یک مدل k-از-n وزنی تصادفی که مولفه‌های آن همان شارژکننده‌ها هستند، در نظر گرفته شود. برای $i = ۱, \ldots, n$، فرض کنید π_iامین شارژکننده با طول‌عمر T_{π_i} به iامین دستگاه با وزن W_i اختصاص داده شده است، که در آن $\pi_i \in \{۱, \ldots, n\}$. این سیستم با $((T_{\pi_۱}, W_۱), \ldots, (T_{\pi_n}, W_n))$ نشان داده می‌شود. در قضیه بعد بهترین شیوه اختصاص شارژکننده‌ها به دستگاه‌هارا مشخص می‌کند. وزن کل سیستم $((T_{\pi_۱}, W_۱), \ldots, (T_{\pi_n}, W_n))$ در زمان t با $S_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}}(t)$ نشان داده می‌شود، که در آن $\boldsymbol{\pi} = (\pi_۱, \ldots, \pi_n)$ یک جایگشت از $\{۱, \ldots, n\}$ است. هم‌چنین از دو نماد $\boldsymbol{\pi}^{\circ} = (۱, \ldots, n)$ و $\boldsymbol{\pi}^{-\circ} = (n, n-۱, \ldots, ۱)$ نیز استفاده می‌شود.

قضیه ۴: سیستم k-از-n وزنی تصادفی $((T_{\pi_۱}, W_۱), \ldots, (T_{\pi_n}, W_n))$ را که در بالا توصیف شد، در نظر بگیرید. فرض کنید برای $i = ۱, \ldots, n-۱$، $W_i \leq_{st} W_{i+۱}$. اگر برای $i = ۱, \ldots, n-۱$، $T_i \leq_{st} T_{i+۱}$، آنگاه برای هر جایگشت $\boldsymbol{\pi}$ از $\{۱, \ldots, n\}$،

$$S_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}^{-\circ}}(t) \leq_{st} S_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}}(t) \leq_{st} S_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}^{\circ}}(t).$$

برهان: تنها اثبات $S^{\boldsymbol{\pi}}_{\mathbf{W}}(t) \leq_{st} S^{\boldsymbol{\pi}^\circ}_{\mathbf{W}}(t)$ ارایه می‌شود. برهان نامساوی دیگر به روش مشابه انجام می‌شود. برای به دست آوردن نتیجه مورد نظر از استقرا روی n استفاده می‌شود. در حالت $n = ۲$ لازم است درستی نامساوی

$$W_۱ I(T_۱ > t) + W_۲ I(T_۲ > t) \geq_{st} W_۱ I(T_۲ > t) + W_۲ I(T_۱ > t) \qquad (۲)$$

نشان داده شود. اگر $F_۱$ و $F_۲$ به ترتیب توابع توزیع تجمعی $T_۱$ و $T_۲$ باشند، آنگاه برای $l = ۱, \ldots$، داریم

$$\begin{aligned} P\big[W_۱ I(T_۱ > t) + W_۲ I(T_۲ > t) \geq \ell\big] &= \bar{F}_۱(t) F_۲(t) P(W_۱ \geq \ell) \\ &\quad + F_۱(t)\bar{F}_۲(t) P(W_۲ \geq \ell) \\ &\quad + \bar{F}_۱(t)\bar{F}_۲(t) P(W_۱ + W_۲ \geq \ell). \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} P\big[W_۱ I(T_۲ > t) + W_۲ I(T_۱ > t) \geq \ell\big] &= F_۱(t)\bar{F}_۲(t) P(W_۱ \geq \ell) \\ &+ \bar{F}_۱(t) F_۲(t) P(W_۲ \geq \ell) \\ &+ \bar{F}_۱(t)\bar{F}_۲(t) P(W_۱ + W_۲ \geq \ell). \end{aligned}$$

بنابراین رابطه

$$\begin{aligned} P\big[W_۱ I(T_۱ > t) + W_۲ I(T_۲ > t) \geq \ell\big] P\big[W_۱ I(T_۲ > t) + W_۲ I(T_۱ > t) \geq \ell\big] \\ = \big[F_۱(t)\bar{F}_۲(t) - \bar{F}_۱(t) F_۲(t)\big]\big[P(W_۲ \geq \ell) - P(W_۱ \geq \ell)\big], \end{aligned}$$

برقرار است، که با توجه به فرض‌های در نظر گرفته شده، هر دو کروشه نامنفی بوده و به این ترتیب نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. اکنون فرض کنید حکم قضیه برای هر سیستم مشتمل بر n مولفه برقرار است. باید نشان دهیم این حکم برای سیستم‌های با $n + ۱$ مولفه نیز درست است، یعنی رابطه

$$\sum_{i=۱}^{n+۱} W_i I(T_{\pi_i} > t) \leq_{st} \sum_{i=۱}^{n+۱} W_i I(T_i > t),$$

برقرار است، که در آن $(\pi_1,\ldots,\pi_{n+1})$ یک جایگشت از $\{1,\ldots,n+1\}$ است. اگر $\pi_{n+1}=n+1$، در این صورت حکم به سادگی به دست می‌آید. فرض کنید $\pi_j=n+1$، $j=1,2,\ldots,n$. اگر $j\geq 2$، آن‌گاه برابری

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} W_iI(T_{\pi_i}>t) &= \sum_{i\neq j} W_iI(T_{\pi_i}>t)+W_jI(T_{n+1}>t)\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} W_iI(T_{\pi_i}>t)\\
&+ \sum_{i=j+1}^{n+1} W_iI(T_{\pi_i}>t)+W_jI(T_{n+1}>t)\\
&\leq_{st} \sum_{i=1}^{j-1} W_iI(T_i>t)\\
&+ \sum_{i=j+1}^{n+1} W_iI(T_{i-1}>t)+W_jI(T_{n+1}>t)\\
&= \sum_{i=1}^{j-1} W_iI(T_i>t)\\
&+ \sum_{i=j+1}^{n} W_iI(T_{i-1}>t)+W_{n+1}I(T_n>t)\\
&+ W_jI(T_{n+1}>t)\\
&\leq_{st} \sum_{i=1}^{j-1} W_iI(T_i>t)+\sum_{i=j+1}^{n} W_iI(T_{i-1}>t)\\
&+ W_jI(T_n>t)+W_{n+1}I(T_{n+1}>t)\\
&\leq_{st} \sum_{i=1}^{n} W_iI(T_i>t)+W_{n+1}I(T_{n+1}>t)\\
&= \sum_{i=1}^{n+1} W_iI(T_i>t),
\end{aligned}$$

حاصل می‌شود، که در آن نامساوی‌های اول و سوم از فرض استقرا و قضیه ۱ و نامساوی دوم از رابطه (۲) و قضیه ۱ به دست می‌آید.

در حالت ۱ $=j$ داریم ۱ $+n=$ $\pi_۱$. بنابراین به طور مشابه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n+۱} W_i I(T_{\pi_i} > t) &= \sum_{i=۲}^{n+۱} W_i I(T_{\pi_i} > t) + W_۱ I(T_{n+۱} > t) \\
&\leq_{st} \sum_{i=۲}^{n+۱} W_i I(T_{i-۱} > t) + W_۱ I(T_{n+۱} > t) \\
&= \sum_{i=۲}^{n} W_i I(T_{i-۱} > t) + W_{n+۱} I(T_n > t) + W_۱ I(T_{n+۱} > t) \\
&\leq_{st} \sum_{i=۲}^{n} W_i I(T_{i-۱} > t) + W_۱ I(T_n > t) + W_{n+۱} I(T_{n+۱} > t) \\
&\leq_{st} \sum_{i=۱}^{n} W_i I(T_i > t) + W_{n+۱} I(T_{n+۱} > t) \\
&= \sum_{i=۱}^{n+۱} W_i I(T_i > t),
\end{aligned}$$

و به این ترتیب برهان کامل می‌شود.

نتیجه ۲: فرض کنید $T_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}}$ طول‌عمر سیستم در نظر گرفته شده در قضیه ۴ باشد. تحت فرض‌های بیان شده، $T_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}^{-\circ}} \leq_{st} T_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}} \leq_{st} T_{\mathbf{W}}^{\boldsymbol{\pi}^{\circ}}$.

به عنوان کاربردی از قضیه ۴، مثال دستگاه‌های تکثیر را مجدداً در نظر بگیرید. فرض کنید سه دستگاه A، B و C با وزن‌های $W_A \leq_{st} W_B \leq_{st} W_C$ و سه شارژکننده $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ با طول عمرهای $T_{R_۱} \leq_{st} T_{R_۲} \leq_{st} T_{R_۳}$ در اختیار باشند. با توجه به قضیه ۴، تخصیص $(A, R_۱), (B, R_۲), (C, R_۳)$ بهترین است.

۳ میانگین زمان تا خرابی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی

فرض کنید $T_{\mathbf{W}}$ طول‌عمر یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با بردار وزن $\mathbf{W}$ و بردار طول‌عمر $\mathbf{T}$ بوده و برای $i = ۱, \dots, n$، $\bar{F}_i$ تابع بقای مولفه iام آن باشد. برای هر مقدار ثابت از $\mathbf{W}$ مانند $\mathbf{w}$، این سیستم به یک سیستم k-از-n وزنی با طول‌عمر $T_{\mathbf{w}}$ تبدیل می‌شود که تابع ساختار و تابع قابلیت اعتماد سیستم منسجم معادل با آن را به ترتیب با $\phi_{\mathbf{w}}$ و $h_{\mathbf{w}}$ نشان می‌دهیم. با توجه به تناظر موجود بین سیستم‌های

k-از-n وزنی و منسجم، برای هر $t > ۰$ داریم

$$\begin{aligned} P(T_{\mathbf{W}} > t) &= \sum_{\mathbf{W}} P[T_{\mathbf{W}} > t | \mathbf{W} = \mathbf{W}] P(\mathbf{W} = \mathbf{W}) \\ &= \sum_{\{\mathbf{W}: \sum_{i=۱}^{n} w_i \geq k\}} P[T_{\mathbf{W}} > t] P(\mathbf{W} = \mathbf{W}) \\ &= \sum_{\{\mathbf{W}: \sum_{i=۱}^{n} w_i \geq k\}} P[\phi_{\mathbf{W}}(X_۱(t), \ldots, X_{m_{\mathbf{W}}}(t)) = ۱] P(\mathbf{W} = \mathbf{W}) \\ &= \sum_{\{\mathbf{W}: \sum_{i=۱}^{n} w_i \geq k\}} h_{\mathbf{w}}(\bar{F}_۱(t), \ldots, \bar{F}_{m_{\mathbf{W}}}(t)) P(\mathbf{W} = \mathbf{W}), \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن $X_i(t)$ وضعیت مولفه iام سیستم منسجم معادل، در زمان t است. بنابراین میانگین زمان تا خرابی سیستم فوق به صورت

$$\begin{aligned} E(T_{\mathbf{W}}) &= \int_۰^{\infty} P[T_{\mathbf{W}} > t] dt \\ &= \int_۰^{\infty} \Big\{ \sum_{\{\mathbf{W}: \sum_{i=۱}^{n} w_i \geq k\}} h_{\mathbf{w}}(\bar{F}_۱(t), \ldots, \bar{F}_{m_{\mathbf{W}}}(t)) P(\mathbf{W} = \mathbf{W}) \Big\} dt \end{aligned} \qquad (۴)$$

قابل بیان است. روابط (۳) و (۴) نه تنها برای محاسبه تابع قابلیت اعتماد و MTTF، بلکه در تعمیم نتایج متعدد سیستم‌های منسجم به سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی نیز ممکن است مفید واقع شوند.

مثال ۷: یک سیستم k-از-۴ وزنی تصادفی را در نظر بگیرید. فرض کنید W_iها متغیرهای تصادفی مستقل با توابع جرم احتمال

w	$f_{W_۱}(w)$	$f_{W_۲}(w)$	$f_{W_۳}(w)$	$f_{W_۴}(w)$
۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۵}$
۲	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۴}{۵}$

و $T_۱$، ...، $T_۴$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$) باشند. قرار دهید $k = ۶$ و $\lambda = ۱$.
برای محاسبه MTTF سیستم یعنی $E(T_{\mathbf{W}})$، ابتدا باید توابع $\phi_{\mathbf{W}}$ و $h_{\mathbf{W}}$ برای همه $\mathbf{W}$های موجود در مجموعه $\{\mathbf{W} : \sum_{i=۱}^{۴} w_i \geq ۶\}$ مشخص شوند. نحوه تشخیص این دو تابع برای $\mathbf{W} = (۲, ۲, ۲, ۲)$

با جزئیات شرح داده می‌شود. به سادگی ملاحظه می‌شود

$$\begin{aligned} A_{۶} &= \{J; W_J \geq ۶\} \\ &= \Big\{\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۳,۴\},\{۲,۳,۴\},\{۱,۲,۳,۴\}\Big\}. \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه‌های مسیر مینیمال سیستم منسجم مورد نظر به صورت

$$P_{۱}=\{۱,۲,۳\}, P_{۲}=\{۱,۲,۴\}, P_{۳}=\{۱,۳,۴\}, P_{۴}=\{۲,۳,۴\}$$

هستند و واضح است هیچ یک از مولفه‌ها بی‌ارتباط با سیستم نیستند ($m_{\mathbf{W}}=۴$). اکنون با استفاده از رابطه (۱) داریم

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbf{W}}(x_{۱},x_{۲},x_{۳},x_{۴}) &= \max_{۱\leq j\leq ۴}\ \min_{i\in P_j} x_i \\ &= \max\{x_{۱}x_{۲}x_{۳}, x_{۱}x_{۲}x_{۴}, x_{۱}x_{۳}x_{۴}, x_{۲}x_{۳}x_{۴}\} \\ &= ۱-\big\{(۱-x_{۱}x_{۲}x_{۳})(۱-x_{۱}x_{۲}x_{۴})(۱-x_{۱}x_{۳}x_{۴})(۱-x_{۲}x_{۳}x_{۴})\big\} \\ &= x_{۱}x_{۲}x_{۴}+x_{۱}x_{۲}x_{۳}+x_{۲}x_{۳}x_{۴}+x_{۱}x_{۳}x_{۴}-۳x_{۱}x_{۲}x_{۳}x_{۴}. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} &h_{\mathbf{W}}(p_{۱},p_{۲},p_{۳},p_{۴}) = p_{۱}p_{۲}p_{۴}+p_{۱}p_{۲}p_{۳}+p_{۲}p_{۳}p_{۴}+p_{۱}p_{۳}p_{۴}-۳p_{۱}p_{۲}p_{۳}p_{۴}, \\ &h_{\mathbf{W}}(\bar{F}_{۱}(t),\bar{F}_{۲}(t),\bar{F}_{۳}(t),\bar{F}_{۴}(t)) = ۴e^{-۳t}-۳e^{-۴t}. \end{aligned} \tag{۵}$$

اگر این محاسبات برای سایر اعضای مجموعه $\{\mathbf{W}; \sum_{i=۱}^{۴} w_i \geq ۶\}$ انجام شود، آن‌گاه با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۴) میانگین زمان تا خرابی به دست خواهد آمد. در این مثال، محاسبات مورد نظر انجام شده و نتایج به دست آمده در جدول ۱ نمایش داده شده است.

با قرار دادن مشاهدات جدول ۱ در رابطه (۴) داریم

$$E(T_{\mathbf{W}}) = \int_{۰}^{\infty}\{\sum_{\{\mathbf{W}:\sum_{i=۱}^{۴} w_i\geq ۶\}} h_{\mathbf{W}}(\bar{F}_{۱}(t),\ldots,\bar{F}_{m_{\mathbf{W}}}(t))P(\mathbf{W}=\mathbf{W})\}dt$$

جدول ۱:   موارد لازم برای محاسبه MTTF

$h_{\mathbf{W}}(\bar{F}_{۱}(t),\ldots,\bar{F}_{m_{\mathbf{W}}}(t))$	$\phi_{\mathbf{W}}(x_{۱},\ldots,x_{m_{\mathbf{W}}})$	$P(\mathbf{W}=\mathbf{W})$	W
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۳۰}$	(۱، ۱، ۲، ۲)
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۱۰}$	(۱، ۲، ۱، ۲)
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۱۵}$	(۲، ۱، ۱، ۲)
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۴۰}$	(۱، ۲، ۲، ۱)
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۲۰}$	(۲، ۲، ۱، ۱)
$e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۶۰}$	(۲، ۱، ۲، ۱)
$e^{-۳t}$	$x_۱x_۲x_۳$	$\frac{۱}{۱۰}$	(۱، ۲، ۲، ۲)
$e^{-۳t}$	$x_۱x_۲x_۴$	$\frac{۱}{۱۵}$	(۲، ۱، ۲، ۲)
$e^{-۳t}$	$x_۱x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۵}$	(۲، ۲، ۱، ۲)
$e^{-۳t}$	$x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۲۰}$	(۲، ۲، ۲، ۱)
$۴e^{-۳t}-۳e^{-۴t}$	$x_۱x_۲x_۴+x_۱x_۲x_۳$ $x_۲x_۳x_۴+x_۱x_۳x_۴$ $-۳x_۱x_۲x_۳x_۴$	$\frac{۱}{۵}$	(۲، ۲، ۲، ۲)

$$
\begin{aligned}
&= (\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۶۰})\int_{۰}^{\infty} e^{-۴t}dt \\
&+ (\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰})\int_{۰}^{\infty} e^{-۳t}dt \\
&+ \frac{۱}{۵}\int_{۰}^{\infty}(۴e^{-۳t}-۳e^{-۴t})dt = ۰/۳۲۸۴.
\end{aligned}
$$

محاسبه MTTF یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی با روش بیان شده، در حالتی که تعداد مولفه‌های آن زیاد باشد، کاری مشکل و زمان‌بر است. در چنین وضعیتی، وجود یک الگوریتم به منظور شبیه‌سازی MTTF ضروری است. فرض کنید $S_{\mathbf{W}}(t)$ وزن کل سیستم در زمان t باشد. می‌دانیم

$$T_{\mathbf{W}} = \inf\{t; S_{\mathbf{W}}(t) < k\}.$$

بنابراین گام‌های اساسی الگوریتم مورد نظر، مشابه با الگوریتم ارایه شده در اریلماز ($۲۰۱۵b$) عبارتند از:

گام ۱ تولید $W_۱$، ...، W_n و $T_۱$، ...، T_n،

گام ۲ به دست آوردن آماره‌های مرتب $T_{(۱)}$، ...، $T_{(n)}$،

گام ۳ محاسبه $S_{\mathbf{W}}[T_{(1)}]$، ...، $S_{\mathbf{W}}[T_{(n)}]$،

گام ۴ اگر $\sum_{i=1}^{n} W_i < k$، آن‌گاه $T_{\mathbf{W}} = 0$،

گام ۵ اگر $S_{\mathbf{W}}[T_{(i-1)}] \geq k$ و $S_{\mathbf{W}}[T_{(i)})] < k$، آن‌گاه $T_{\mathbf{W}} = T_{(i)}$ $(T_{(0)} = 0)$.

بعد از مشاهده $T_{\mathbf{W}}$، مقدار MTTF با روش‌های استاندارد، مانند روش مونت-کارلو، به دست می‌آید.

مثال ۸: سیستم معرفی شده در مثال ۷ را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم بیان شده، مقدار MTTF این سیستم برای مقادیر مختلف k و λ، با ۱۰۰۰۰ تکرار، شبیه‌سازی و در جدول ۲ نمایش داده شده است.

جدول ۲: میانگین زمان تا خرابی سیستم k-از-n وزنی تصادفی

k	$\lambda = ۰٫۵$	$\lambda = ۱$	$\lambda = ۱٫۵$	$\lambda = ۲$	$\lambda = ۲٫۵$
۵	۰٫۹۹۳۴	۰٫۴۹۹۸	۰٫۳۳۲۱	۰٫۲۴۸۳	۰٫۲۰۰۲
۶	۰٫۶۵۷۶	۰٫۳۲۵۵	۰٫۲۱۸۵	۰٫۱۶۲۸	۰٫۱۳۲۱
۷	۰٫۳۱۰۹	۰٫۱۵۰۹	۰٫۱۰۱۰	۰٫۰۷۹۵	۰٫۰۶۲۶
۸	۰٫۰۹۳۵	۰٫۰۵۲۰	۰٫۰۳۲۹	۰٫۰۲۵۵	۰٫۰۲۰۷

همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود با افزایش λ، میانگین زمان تا خرابی کمتر می‌شود. این امر مورد انتظار است زیرا با افزایش λ، عمر مولفه‌ها و در نتیجه عمر سیستم کاهش می‌یابد (مطابق با ترتیب تصادفی معمولی). مشاهدات جدول ۲ هم‌چنین نشان می‌دهند که افزایش k منجر به کاهش MTTF می‌شود. دلیل این امر این است که با افزایش k، شرایط برای عملکرد مطلوب سیستم (وزن کل بیشتر از k) مشکل‌تر شده و سیستم در مدت زمان کمتری از کار می‌افتد.

بحث و نتیجه‌گیری

معمولاً در سیستم‌های وزنی فرض بر این است که وزن مولفه‌ها مقادیر صحیح مثبت هستند. در حالی که برخی سیستم‌های وزنی، مانند سیستم تکثیر موسسه چاپ، وجود دارند که وزن مولفه‌های آن‌ها نه یک عدد بلکه یک متغیر تصادفی است. در این مقاله، برای توصیف وضعیت چنین سیستم‌هایی، مدل k-از-n وزنی تصادفی، معرفی و برخی ویژگی‌های آن مورد بررسی گرفت. نشان داده شد که افزایش وزن و طول‌عمر

مولفه‌ها منجر به افزایش وزن کل سیستم و در نتیجه طول‌عمر آن می‌شود. هم‌چنین، در حالت کلی و بدون در نظر گرفتن فرض استقلال وزن مولفه‌ها، نشان دادیم که طول‌عمر یک سیستم k-از-n وزنی تصادفی تابعی افزایشی از بردار وزن مولفه‌ها است. علاوه بر این، یک نتیجه مهم در طراحی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی به دست آورده شد. به این صورت که بهترین سیستم زمانی ایجاد می‌شود که وزن بیشتر با طول‌عمر بیشتر توام شود. برای بررسی میانگین زمان تا خرابی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی، آن را برحسب تابع قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم بیان شد. هم‌چنین یک الگوریتم برای شبیه‌سازی میانگین زمان تا خرابی سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی با تعداد مولفه‌های زیاد، ارایه و پیاده‌سازی گردید.

چگونگی استفاده از روابط (۳) و (۴) به منظور تعمیم نتایج سیستم‌های منسجم به سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی از موضوع‌های جالب برای پژوهش در این زمینه است. هم‌چنین بررسی سایر ویژگی‌های مرتبط با قابلیت اعتماد سیستم‌های k-از-n وزنی تصادفی مانند میانگین عمر باقیمانده نیز می‌تواند موضوع تحقیق‌های بعدی در این راستا باشد. واضح است که وزن‌های غیرتصادفی حالت خاصی از وزن‌های تصادفی هستند. به همین دلیل، یک سیستم با مولفه‌های وزنی غیرتصادفی همه ویژگی‌های یک سیستم مشابه با مولفه‌های وزنی تصادفی را دارا است. بررسی عکس این موضوع مورد توجه یکی از داوران محترم قرارگرفته و سوالی را به این صورت مطرح کرده است که آیا همه روابط حاکم بر یک سیستم با مولفه‌های وزنی غیرتصادفی، در سیستم مشابه با مولفه‌های وزنی تصادفی برقرارند؟ پاسخ این سوال می‌تواند موضوع پژوهشی مجزا در راستای تعمیق و تکمیل پژوهش حاضر باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران محترم مجله که با پیشنهادها و راهنمایی‌های خود مقاله را پربار نمودند و ویراستار محترم که باعث ارائه بهتر مقاله شد کمال تقدیر و تشکر را دارند.

مراجع

Amrutkar, K. P. and Kamalja, K. K. (2014), *Reliability and Importance Measures of Weighted-k-out-of-n System*, International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, **21**, 1450015.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*: Probability Models, MD: Silver Spring.

Chen, Y. and Yang, Q. (2005), *Reliability of Two-Stage Weighted k-out-of-n Systems with Components in Common*, IEEE Transactions on Reliability, **54**, 431-440.

Eryilmaz, S. (2013*a*), *Mean Instantaneous Performance of a System with Weighted Components that Have Arbitrarily Distributed Lifetimes*, Reliability Engineering & System Safety, **119**, 290-293.

Eryilmaz, S. (2013*b*), *On Reliability Analysis of a k-out-of-n System with Components Having Random Weights*, Reliability Engineering & System Safety, **109**, 41-44.

Eryilmaz S. (2015*a*), *Capacity Loss and Residual Capacity in Weighted k-out-of-n:G Systems*, Reliability Engineering & System Safety, **136**, 140-144.

Eryilmaz, S. (2015*b*), *Mean Time to Failure of Weighted- k-out-of-n:G Systems*, Communications in Statistics -Simulation and Computation,**44**, 2705-2713.

Eryilmaz, S. and Bozbulut, A. R. (2014), *Computing Marginal and Joint Birnbaum, and Barlow-Proschan Importances in Weighted-k-out-of-n:G Systems*, Computers & Industrial Engineering, **72**, 255-260.

Higashiyama, Y. (2001), *A factored Reliability Formula for Weighted-k-out-of-n System*, Asia-Pacific Journal of Operational Research, **18**, 61–66.

Li, W. and Zuo, M. J. (2008), *Reliability Evaluation of Multi-State Weighted-k-out-of-n Systems*, Reliability Engineering & System Safety, **93**, 160-167.

Rahmani, R. A., Izadi, M. and Khaledi, B. (2016*a*), *Importance of Components in k-out-of-n System with Components Having Random Weights*, Journal of computational and applied mathematics, **296**, 1-9.

Rahmani, R. A., Izadi, M. and Khaledi, B. (2016*b*), *Stochastic Comparisons of Total Capacity of Weighted-k-out-of-n Systems*, Statistics & Probability Letters, **117**, 216-220.

Samaniego, F. J. and Shaked M. (2008), *Systems with Weighted Components*, Statistics and Probability Letters, **78**, 815-823.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, New York: Springer.

Wu, J. S. and Chen, R. J. (1994), *An Algorithm for Computing the Reliability of a Weighted-k-out-of-n System*, IEEE Transactions on Reliability, **43**, 327-328.