مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۳۸۵ – ۳۹۴
DOI: 10.29252/jss.12.2.385

برآوردگر جدیدی از نوع لیو اصلاح شده

مریم برزوئی بیدگلی، محمد آرشی

گروه آمار، دانشگاه صنعتی شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۰۹   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: یکی از روش‌های رفع مشکل همخطی در مدل‌های خطی، استفاده از برآوردگر لیو است. در این مقاله، برآوردگر جدیدی را با تعمیم برآوردگر لیو اصلاح شده لی و یانگ (۲۰۱۲) ارائه شده است. این برآوردگر بر اساس یک اطلاع پیشین از بردار پارامترها در مدل رگرسیون خطی و برآوردگر تعمیم‌یافته آکدنیز و کاچیرانلار (۱۹۹۵) به‌دست می‌آید. با استفاده از معیار ماتریس میانگین توان دوم خطا، شرایط برتری این برآوردگر بر برآوردگر لیو تعمیم‌یافته به‌دست آورده می‌شود. به منظور مقایسه رفتار این برآوردگر با برآوردگرهای موجود، یک مثال عددی و یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: اطلاع پیشین، برآوردگر تعمیم‌یافته لیو اصلاح شده، برآوردگر لیو اصلاح شده، برآوردگر لیو تعمیم‌یافته، همخطی.

۱ مقدمه

مدل رگرسیون خطی چندگانه

$$y = \mathbf{X}\beta + \epsilon, \tag{۱}$$

را در نظر بگیرید، که درآن $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ یک بردار $n \times 1$ از پاسخ‌ها، $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ یک ماتریس $n \times p$ غیرتصادفی و معلوم از n بردار p –بعدی با رتبه کامل p، $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_p)^T$

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مریم برزوئی بیدگلی، borzoei67@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J07

بردار ضرایب رگرسیونی مجهول (پارامترهای مدل) و $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)^T$ بردار خطای تصادفی هستند. وقوع همخطی چندگانه بین متغیرهای پیش‌بین در تحلیل رگرسیون خطی ممکن است باعث ناپایداری شدید در برآوردهای کمترین توان‌های دوم پارامترهای رگرسیونی شود، به این معنی که بزرگی و علامت بردار پارامترها در نمونه‌های مختلف به‌طور قابل ملاحظه‌ای بی‌ثبات خواهد بود که در نتیجه آن، برآورد کمترین توان‌های دوم به‌دست آمده، قابل اعتماد نیست. فرض کنید در ماتریس طرح مدل (۱) مشکل همخطی وجود دارد. یکی از راه‌های رفع مشکل همخطی استفاده از برآوردگر ریج است. اما این برآوردگر نسبت به پارامتر ریج (کنترل) غیرخطی بوده و تعیین دقیق این پارامتر با اشکالاتی مواجه است (مونتگمری و همکاران ۱۹۹۲). از این رو لیو (۱۹۹۳) ایده برآوردگر خطی را مطرح کرد که بتواند بر مشکل همخطی غلبه کرده و در عین حال نسبت به پارامتر متناظر خطی باشد (چان ، ۱۹۹۱).

چون ماتریس $\mathbf{X}$ پررتبه است، با استفاده از تجزیه طیفی، رابطه $\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \mathbf{T}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{T}^T$ به‌دست می‌آید، که در آن $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$، ماتریس مقادیر ویژه $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ است، به طوری‌که $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$ و ماتریس متعامد $\mathbf{T}$ شامل بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه است. با فرض $\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{T}$ و $\gamma = \mathbf{T}^T\beta$، صورت کانونی مدل خطی (۱) عبارتست از

$$y = (\mathbf{Z}\mathbf{T}^T)(\mathbf{T}\gamma) + \epsilon = \mathbf{Z}\gamma + \epsilon. \tag{۲}$$

در این‌صورت، برآوردگر کمترین توان‌های دوم معمولی به صورت

$$\hat{\gamma}_{OLSE} = (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}^T y = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{Z}^T y. \tag{۳}$$

به‌دست می‌آید. برای رفع مشکل همخطی ناقص[1] لیو (۱۹۹۳) برآوردگر استاین (۱۹۵۶) را با برآوردگر رگرسیون معمولی ریج ترکیب نمود و برآوردگری به صورت

$$\hat{\gamma}(d) = (\boldsymbol{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}^T y + d\hat{\gamma}_{OLSE}), \tag{۴}$$

پیشنهاد کرد که پس از آن به دلیل استفاده مکرر از آن به برآوردگر نوع لیو[2](LE)، معروف شد، که در آن $0 < d < 1$ پارامتر اریبی (کنترل) نام دارد. این برآوردگر یک ترکیب خطی از برآوردگر کمترین توان‌های

[1] Incomplete Colinearity
[2] Liu-type estimator

دوم است، به عبارت دقیق‌تر داریم

$$\hat{\gamma}(d) = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Z}^T y + d(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}\hat{\gamma}_{OLSE}.$$

در این حالت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(d) &= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}^T y + d\hat{\gamma}_{OLSE}) \\ &= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{\Lambda} + d\mathbf{I})\hat{\gamma}_{OLSE} \\ &= \mathbf{F}_d\hat{\gamma}_{OLSE}, \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $\mathbf{F}_d = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{\Lambda} + d\mathbf{I})$. آکدنیز و کاچیرانلار (۱۹۹۵) برآوردگر لیو (۱۹۹۳) را با جایگذاری پارامتر اریبی d به یک ماتریس اریبی مانند $\mathbf{D} > 0$ تعمیم دادند و آن را برآوردگر لیو تعمیم‌یافته (GLE)، نامیدند. برآوردگر لیو تعمیم‌یافته دارای نمایش

$$\hat{\gamma}(\mathbf{D}) = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}^T y + \mathbf{D}\hat{\gamma}_{OLSE}), \tag{۶}$$

است، که در آن $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_p)$ به طوری‌که به ازای $0 < d_i < 1, i = 1, 2, \ldots, p$. مشابه با رابطه (؟؟) می‌توان نشان داد برآوردگر لیو تعمیم‌یافته نیز یک ترکیب خطی از برآوردگر کمترین توان‌های دوم است. برای این منظور داریم

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(\mathbf{D}) &= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}^T y + \mathbf{D}\hat{\gamma}_{OLSE}) \\ &= \left[\mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{D})\right]\hat{\gamma}_{OLSE} \\ &= \mathbf{F}_{\mathbf{D}}\hat{\gamma}_{OLSE}, \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{F_D} &= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{\Lambda} + \mathbf{D}) \\ &= (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-۱}\mathbf{\Lambda} + (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-۱}\mathbf{D} \\ &= \mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{I} - \mathbf{D}).\end{aligned}$$

۲ برآوردگر جدید پیشنهادی

حال، فرض کنید اطلاعی پیشین در خصوص بردار پارامتر β به صورت $\beta = b$ در اختیار است. از طرفی ماتریس طرح $\mathbf{X}$ دارای مشکل همخطی است. بنابراین در این حالت، می‌توان از برآوردگر لیو استفاده کرد و اطلاع پیشین را به منظور اصلاح آن به کار برد. به همین منظور، در این بخش، روشی که آکدنیز و کاچیرانلار (۱۹۹۵) پیشنهاد دادند، برای توسعه برآوردگر لیو اصلاح شده که برآوردگر اریبی از نوع برآوردگر لیو است و از اطلاع پیشین بهره می‌گیرد، به کار برده می‌شود. لی و یانگ (۲۰۱۲)، برآوردگر لیو اصلاح شده (MLE)، بر اساس اطلاع پیشین $\beta = b$ و برآوردگر نوع لیو را به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{MLE}(d,b) &= (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + d\mathbf{I})\hat{\gamma}_{OLSE} + (۱ - d)(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-۱}b \\ &= (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-۱}\left[(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + d\mathbf{I})\hat{\gamma}_{OLSE} + (۱ - d)b\right] \\ &= \mathbf{F}_d\hat{\gamma}_{OLSE} + (\mathbf{I} - \mathbf{F}_d)b, \qquad (۸)\end{aligned}$$

ارائه کردند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود به ازای مقادیر مختلف d و b تساوی‌های

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{MLE}(۱,b) &= \hat{\gamma}_{OLSE}, \qquad (۹) \\ \hat{\gamma}_{MLE}(\circ,b) &= (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-۱}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} + b), \\ \hat{\gamma}_{MLE}(d,\circ) &= \hat{\gamma}(d),\end{aligned}$$

برقرارند. در حقیقت، برآوردگر لیو اصلاح شده که ترکیب محدبی از برآوردگر کمترین توان‌های دوم و اطلاع پیشین است، می‌تواند به عنوان تعمیم برآوردگرهای کمترین توان‌های دوم و لیو در نظر گرفته شود.

در این قسمت، مشابه آکدنیز و کاچیرانلار (۱۹۹۵)، برآوردگر تعمیم یافته لیو شده(GMLE) به عنوان تعمیمی بر برآورد ماکسیمم درستنمایی و بر اساس اطلاع پیشین سوئیندل (۱۹۷۶) به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_{GMLE}(\mathbf{D},b) &= (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}+\mathbf{D})\hat{\gamma}_{OLSE}+(\mathbf{I}-\mathbf{D})(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}+\mathbf{I})^{-1}b\\ &= (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}+\mathbf{I})^{-1}\left[(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}+\mathbf{D})\hat{\gamma}_{OLSE}+(\mathbf{I}-\mathbf{D})b\right]\\ &= \mathbf{A_D}\hat{\gamma}_{OLSE}+(\mathbf{I}-\mathbf{A_D})b, \qquad (10)\end{aligned}$$

معرفی می‌شود، که در آن b برداری غیر تصادفی است به عنوان مقداری برای β نشان دهنده اطلاعی پیشین در خصوص این پارامتر است و

$$\mathbf{A_D} = (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{D}) = \mathbf{I}-(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{D}).$$

و $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_p)$ یک ماتریس قطری معین مثبت $p\times p$ با $0<d_i<1,\ i=1,\ldots,p$ است. توجه شود که هرگاه $0<d<1, d_1=\ldots=d_p=d$، برآوردگر تعمیم‌یافته لیو اصلاح شده به برآوردگر لیو اصلاح شده ساده می‌شود.

۱.۲ مقایسه برآوردگرهای GMLE و GLE

در این بخش، شرایط برتری برآوردگر جدید پیشنهادی بر برآوردگر آکدنیز و کاچیرانلار (۱۹۹۵)، در قالب یک قضیه، از نقطه‌نظر کمترین MSEM به‌دست می‌آورده می‌شود.

قضیه ۱: تحت مدل خطی (۲) و بر اساس معیار MSEM، برآوردگر تعمیم‌یافته لیو اصلاح شده نسبت به برآوردگر لیو تعمیم‌یافته برتری دارد اگر و تنها اگر ماتریس $b(2\gamma-b)^T$ به ازای هر $b\in\mathcal{R}^p$ معین مثبت باشد.

برهان: از آن‌جا که اریبی و ماتریس واریانس- کوواریانس برآوردگر لیو تعمیم‌یافته به ترتیب

$$\begin{aligned}\mathrm{bias}(\hat{\gamma}(\mathbf{D})) &= (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{D})\gamma-\gamma=(\mathbf{A_D}-\mathbf{I})\gamma,\\ \mathrm{Cov}(\hat{\gamma}(\mathbf{D})) &= \mathrm{Cov}(\mathbf{A_D}\hat{\gamma}_{OLSE})=\sigma^2\mathbf{A_D}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{A_D}^T,\end{aligned}$$

هستند، عبارت MSEM برآوردگر لیو تعمیم‌یافته به صورت

$$\text{MSEM}(\hat{\gamma}(\mathbf{D})) = \sigma^{۲}\mathbf{A_D}\mathbf{\Lambda}^{-۱}\mathbf{A_D}^T + (\mathbf{A_D} - \mathbf{I})\gamma\gamma^T(\mathbf{A_D} - \mathbf{I})^T. \qquad (۱۱)$$

حاصل می‌شود. با استفاده از (۱۱) اختلاف MSEM دو برآوردگر برابر است با:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta}_۱ &= \text{MSEM}(\hat{\gamma}(\mathbf{D}) - \text{MSEM}(\hat{\gamma}_{GMLE}(\mathbf{D}, b) \\
&= (\mathbf{A_D} - \mathbf{I})\gamma\gamma^T(\mathbf{A_D} - \mathbf{I})^T - (\mathbf{A_D} - \mathbf{I})(\gamma - b)(\gamma - b)^T(\mathbf{A_D} - \mathbf{I})^T \\
&= (\mathbf{A_D} - \mathbf{I})\left[\gamma\gamma^T - (\gamma - b)(\gamma - b)^T\right](\mathbf{A_D} - \mathbf{I})^T \\
&= (\mathbf{A_D} - \mathbf{I})\left[b(۲\gamma - b)^T\right](\mathbf{A_D} - \mathbf{I})^T. \qquad (۱۲)
\end{aligned}$$

چون ماتریس $\mathbf{A_D} - \mathbf{I}$ یک ماتریس قطری با عناصر مثبت است، بنابراین معین مثبت بوده و در نتیجه اختلاف $\mathbf{\Delta}_۱$ معین نامنفی است اگر و تنها اگر $b(۲\gamma - b)^T$ معین نامنفی باشد و اثبات کامل است.

۳ مثال عددی

در این بخش در قالب یک مثال عددی کارایی برآوردگرهای ارائه شده با یکدیگر مقایسه می‌شود. داده‌های مورد استفاده مربوط به سیمان پورتلند است که شامل ۱۳ مشاهده و ۵ متغیر است. (وود و همکاران، ۱۹۳۲). متغیرهای $X_۱$، $X_۲$، $X_۳$ و $X_۴$ به ترتیب درصدهای آلومینت تری کلسیم، سیلیکات تری کلسیم، آلمینو فرایت کلسیم و سیلیکات دی کلسیم در نمونه را نشان می‌دهند. متغیر پاسخ y، میزان گرمای حاصل از این واکنش برحسب کالری بر گرم است و در این صورت رابطه خطی عبارتست از

$$y = \beta_۰ + \beta_۱X_۱ + \cdots + \beta_۴X_۴ + \epsilon,$$

با توجه به مشاهدات X، مقدار آماره کاپا به عنوان معیاری برای تشخیص همخطی، برابر

$$\kappa = \sqrt{\frac{\lambda_۴}{\lambda_۱}} = ۶۰۵۶/۳۴۴,$$

جدول ۱: کارایی نسبی برآوردگرهای ارائه شده در مقایسه با برآوردگر کمترین توان‌های دوم

برآوردگر	ماتریس اریبی									
	$\mathbf{D}_1$	$\mathbf{D}_2$	$\mathbf{D}_3$	$\mathbf{D}_4$	$\mathbf{D}_5$	$\mathbf{D}_6$	$\mathbf{D}_7$	$\mathbf{D}_8$	$\mathbf{D}_9$	$\mathbf{D}_{10}$
GLE	۲۴۴/۲	۲۱۹/۲	۴۶۸/۱	۱۵۱/۲	۲۰۱/۲	۹۶۸/۱	۸۲۴/۱	۷۵۵/۱	۱۰۷/۱	۲۵۹/۲
$GMLE$	۳۱۲/۶	۱۶۵/۷	۵۳۴/۱	۱۷۷/۹	۹۹۹/۲	۴۸۵/۲	۱۲۷/۲	۹۸۷/۱	۱۰۹/۱	۵۴۹/۴

است، که دلالت بر همخطی شدید دارد. کارایی نسبی برآوردهای ارائه شده و مقایسه با برآوردگر کمترین توان‌های دوم با استفاده از رابطه

$$\mathrm{RE}(r^*) = \frac{\mathrm{tr}(\mathrm{MSEM}(\hat{\gamma}_{OLSE}))}{\mathrm{tr}(\mathrm{MSEM}(r^*))},$$

محاسبه شده است، که در آن r^* یکی از GLE یا GMLE است. بر اساس روش سوئیندل (۱۹۷۶) به ازای اطلاع پیشین $b = 0/95\hat{\beta}_{OLSE}$ که در آن $\hat{\beta}_{OLSE} = \mathbf{T}\hat{\gamma}_{OLSE}$، مقادیر RE در جدول ۱ آمده است. از آن‌جا که مقادیر بهینه d_i، $i = 1, \cdots 4$ تعیین نشده‌اند، مؤلفه‌های d_i به منظور تعیین $\mathbf{D}$، در این مثال به صورت تصادفی از توزیع $U(0, 1)$ تولید شده است. در جدول ۱ به تعداد ۱۰ ماتریس $\mathbf{D}$ که به طور تصادفی تولید شده‌اند برای ارزیابی رفتار برآوردگرها آمده است. در تمام حالت‌ها با توجه به مقادیر کارایی نسبی، برآوردگرهای $\hat{\gamma}_{GLE}$ و $\hat{\gamma}_{GMLE}$ بر $\hat{\gamma}_{OLSE}$ برتری دارند. از طرفی در اکثر موارد، با توجه به تصادفی بودن $\mathbf{D}$، برآوردگر جدید پیشنهادی $\hat{\gamma}_{GMLE}$ کارایی بیشتری نسبت به بقیه برآوردگرها دارد.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه رفتار برآوردگرهای ارائه شده، روش شبیه‌سازی مونت کارلو به‌کار گرفته شده است. برای داشتن داده‌هایی با میزان همخطی مختلف، لیو (۲۰۰۳) پیشنهاد کرد که داده‌ها به صورت

$$x_{ij} = (1 - \gamma^2)^{1/2}\omega_{ij} + \gamma\omega_{ip}, \quad i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, p - 1$$

تولید شوند، که در آن ω_{ij} اعداد شبه تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد و γ^2 همبستگی بین دو متغیر پیش‌بین است. این متغیرها استاندارد شده‌اند، به طوری‌که $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ و $\mathbf{X}^T y$ همبسته هستند. حال

با استفاده از رابطه

$$y_i = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + e_i,\ i = 1, \cdots, 100$$

۱۰۰ مشاهده برای متغیر پاسخ تولید می‌شود، که در آن e_i اعداد تصافی مستقل از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 بوده و $\beta = (1, 1, 1)^T$. این آزمایش با مقادیر مختلف $\gamma \in (0/7, 0/90, 0/99)$ و $\sigma \in (0/01, 0/1, 1)$ برای ۱۰۰۰ بار تکرار شده است. مقادیر میانگین توان دوم خطا را برای برآوردگر کمترین توان‌های دوم، برآوردگر لیو تعمیم‌یافته، برآوردگر تعمیم‌یافته لیو اصلاح شده با استفاده از رابطه

$$MSE(\tilde{\beta}) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} \sum_{i=1}^{3} (\tilde{\beta}_{ij} - \beta_i)^2,$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\tilde{\beta}$ نشان‌دهنده یکی از سه برآوردگر، $\tilde{\beta}_{ij}$ برآورد i-امین پارامتر در j-امین تکرار و β_i مقدار پارامتر است. لازم به ذکر است در این حالت اطلاع پیشین به صورت $b = 10^{-3}\beta$ اختیار شده است. همانند بخش ۳، ماتریس **D** به تعداد ۱۰ بار به طور تصادفی تولید شده و مقادیر RE در جدول ۲ ارائه شده است. با توجه به خروجی جدول ۲ نتایج بخش ۳ به طور قوی تأیید می‌شوند.

جدول ۲: کارایی نسبی برآوردگرهای ارائه شده در مقایسه با برآوردگر کمترین توان‌های دوم

		$\sigma = 0/01$			$\sigma = 0/1$			$\sigma = 1$		
γ	برآوردگر	**D**$_1$	**D**$_2$	**D**$_3$	**D**$_1$	**D**$_2$	**D**$_3$	**D**$_1$	**D**$_2$	**D**$_3$
۰/۷	$\hat{\gamma}_{GLE}$	۰۸۳/۱	۰۷۲/۱	۰۸۰/۱	۰۷۰/۱	۰۲۵/۱	۰۳۱/۱	۰۰۲/۱	۰۰۷/۱	۰۰۹/۱
	$\hat{\gamma}_{MGLE}$	۰۸۳/۱	۰۷۳/۱	۰۸۰/۱	۰۷۰/۱	۰۲۶/۱	۰۳۳/۱	۰۲۴/۱	۰۰۷/۱	۰۱۰/۱
۰/۹	$\hat{\gamma}_{GLE}$	۱۰۳/۱	۵۳۲/۱	۱۸۷/۱	۰۹۳/۱	۰۰۰/۱	۰۸۰/۱	۰۸۹/۱	۱۶۹/۱	۱۵۶/۱
	$\hat{\gamma}_{MGLE}$	۱۰۳/۱	۵۳۳/۱	۱۹۰/۱	۰۹۵/۱	۰۰۴/۱	۰۹۱/۱	۰۹۰/۱	۱۷۱/۱	۱۵۷/۱
۰/۹۹	$\hat{\gamma}_{GLE}$	۷۴۳/۱	۰۰۳/۱	۹۴۳/۰	۶۲۰/۱	۰۰۰/۲	۴۳۰/۲	۷۱۴/۱	۶۰۰/۱	۴۱۲/۱
	$\hat{\gamma}_{MGLE}$	۷۴۴/۱	۰۰۳/۱	۰۰۱/۱	۶۲۱/۱	۰۰۳/۲	۴۳۳/۲	۷۱۴/۱	۶۱۲/۱	۴۱۵/۱

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردگر تعمیم‌یافته لیو اصلاح شده به عنوان تعمیمی بر برآوردگر لیو اصلاح شده لی و یانگ (۲۰۱۲)، معرفی شد و خواص آن بررسی شد. در این راستا، در مطالعات شبیه‌سازی و واقعی برتری برآوردگر جدید پیشنهادی، بر پایه کارایی نسبی، مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به تصادفی بودن ماتریس پارامترهای اریبی، برآوردگر ارائه شده از کارایی نسبتاً خوبی برخوردار بود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات داوران و ویراستار محترم مجله، که موجب رفع ایرادات و کمک به روان بودن مقاله شد، نهایت تقدیر و تشکر را دارند.

مراجع

حاجی باقری ف.، راسخ ع. ر. و آخوند م. ر.، (۱۳۹۳)، تشخیص نقاط پرت در مدل رگرسیونی لیو، مجله علوم آماری، ۸، ۳۱-۱۹.

Akdeniz, F. and Kaciranlar, S. (1995). On the Almost Unbiased Generalized Liu Estimator and Unbiased Estimation of the bias and MSE., *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 1789-1797.

Li, Y. and Yang, H. (2012), A New Liu-type Estimator in Linear Regression Model, *Statistical papers*, **53**, 427-437.

Liu, K. J. (1993). A New Class of biased Estimate in Linear Regression, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **22**, 393-402.

Liu, K. J. (2003). Using Liu Type Estimator to Combat Multicollinearity, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **32**, 1009-1020.

Montgomery, D. C. and Peck, A. E. (1992), *Introduction to Linear Regression Analysis*, New York, John Wiley.

Stein, M. C. (1956). Inadmissibility of the Usual Estimator Fort he Mean of a Multivariate Normal Distribution, *Proceedings of the third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 197-206.

Swindel, BF. (1976), Good Ridge Estimators Based on Prior Information, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **5**, 1065-1075.

Woods, H., Steinour, H. H. and Starke, H. R. (1939), Effect of Composition of Portland Cement on Heat Evolved During Hardening, *Industrial Engineering and Chemistry*, **24**, 1207-1241.