کلاسی از توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی

رسول روزگار، علی اکبر جعفری

گروه آمار، دانشگاه یزد

چکیده: در این مقاله، به معرفی خانواده توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی پرداخته می‌شود. این کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره شامل چندین مدل مانند توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی، پواسون، دوجمله‌ای، لگاریتمی و دوجمله‌ای منفی و توزیع دومتغیره نمایی تعمیم‌یافته است. نحوه ساختن و ویژگی‌های این کلاس از توزیع‌های دومتغیره ارائه شده و روند برآوردیابی برای پارامترهای مدل با روش‌های ماکسیمم درستنمایی و الگوریتم EM بحث می‌شود. در نهایت دو کاربرد از داده‌های واقعی برای برازش این مدل و مفید نشان دادن آن ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته، الگوریتم EM، برآورد ماکسیمم درستنمایی، کلاس توزیع‌های سری توانی.

۱ مقدمه

مدل‌بندی داده‌های طول عمر یکی از جنبه‌های مهم از کارهای آماری در زمینه‌های مختلفی از علوم و تحقیقات محسوب می‌شود. در این زمینه توزیع‌های آماری یک متغیره، بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است ولی توزیع‌های

[۰] آدرس الکترونیک مسئول مقاله: رسول روزگار، rroozegar@yazd.ac.ir

[۰] کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62E15، 62H10، 62F10.

آماری دو و چند متغیره به دلیل محاسبات نسبتا پیچیده کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته در چند سال اخیر مورد توجه نویسندگان متعددی قرار گرفته است. این روش منجر به تعریف توزیع‌های جدیدی می‌شود که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار بوده و از لحاظ کاربرد برازش مناسب‌تر و واقعی‌تری را روی داده‌ها ارائه می‌دهند. مارشال و الکین (۱۹۹۷) کلاسی از توزیع‌ها را معرفی کردند که بوسیله کمینه یا بیشینه متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با اندازه نمونه تصادفی دارای توزیع هندسی ساخته می‌شود. بارتو-سوزا و همکاران (۲۰۱۱) نیز با ترکیب توزیع وایبول و هندسی توزیع جدیدی را به همین نام (وایبول-هندسی) ساختند. سیلوا و همکاران (۲۰۱۳) کلاسی از توزیع‌های یک متغیره را معرفی کردند که از ترکیب کردن توزیع وایبول تعمیم‌یافته و توزیع سری توانی به‌دست می‌آید و ویژگی‌های مختلف این کلاس را مورد بررسی قرار دادند. این تلاش‌ها در ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته مهم از قبیل هندسی، پواسون، لگاریتمی و دوجمله‌ای که حالت‌های خاصی از توزیع سری توانی هستند استوار است. به عنوان مثال آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸) توزیع نمایی-هندسی، کاس (۲۰۰۷) توزیع نمایی-پواسون، طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) توزیع نمایی-لگاریتمی، چهکندی و گنجعلی (۲۰۰۹) توزیع نمایی-سری توانی، مورایس و بارتو-سوزا (۲۰۰۷) توزیع وایبول-سری توانی، محمودی و جعفری (۲۰۱۲) توزیع نمایی تعمیم‌یافته-سری توانی، محمودی و جعفری (۲۰۱۷) توزیع نرخ خطر خطی-سری توانی، طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی و روزگار و ناداراجا (۲۰۱۷) توزیع نرخ خطر درجه دو-سری توانی را تعریف کردند.

توزیع گومپرتز که تعمیمی از توزیع نمایی است اغلب برای برازش روی داده‌های علوم مختلف از جمله کامپیوتر، بازاریابی، زیست‌شناسی و بیمه مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیرا الگوهری و همکاران (۲۰۱۳) به معرفی توزیع سه پارامتری گومپرتز تعمیم‌یافته (GG) و ارائه برخی ویژگی‌های مرتبط با آن پرداخته‌اند. تابع توزیع و تابع چگالی این توزیع به ترتیب به‌صورت

$$F_{\mathrm{GG}}(x;\alpha,\lambda,\gamma) = (1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha}, \quad \alpha,\gamma,\lambda>0;\ \ x\geq 0, \qquad (1)$$

$$f_{\mathrm{GG}}(x;\alpha,\lambda,\gamma) = \alpha\lambda e^{\gamma x}e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha-1}. \qquad (2)$$

هستند. توزیع GG یک توزیع انعطاف‌پذیر است که می‌تواند بر روی داده‌های چوله نیز برازش داده شود. حالت‌های خاص این توزیع عبارتند از: توزیع نمایی تعمیم‌یافته (گوپتا و کوندو، ۱۹۹۹) وقتی $\gamma\to 0^+$، توزیع گومپرتز وقتی $\alpha=1$ و توزیع نمایی وقتی $\alpha=1$ و $\gamma\to 0^+$.

السرپیانی و همکاران (۲۰۱۳) توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته (BGG) را معرفی کردند که توزیع‌های حاشیه‌ای آن، گومپرتز تعمیم‌یافته است. این توزیع دومتغیره هم دارای بخش پیوسته مطلق[1] و هم دارای بخش منفرد[2] است و تابع توزیع توام این مدل به‌صورت

$$F_{\mathrm{BGG}}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_1}-1)})^{\alpha_1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_2}-1)})^{\alpha_2}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma z}-1)})^{\alpha_3}$$

است، که در آن $z = \min(x_1, x_2)$.

در این مقاله، توزیع BGG با کلاس توزیع سری توانی (PS) ترکیب شده و یک کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره تحت عنوان خانواده توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی (BGGPS) معرفی می‌شود. روند ترکیب کردن مشابه با روش ساختن توزیع دومتغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) و کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) است. این مدل دارای شش پارامتر است که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و توزیع‌های حاشیه‌ای آن، توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی معرفی شده توسط طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) هستند. تابع چگالی توام این مدل دارای شکل‌های مختلفی است، بنابراین این مدل می‌تواند به‌طور موثری در تحلیل داده‌های چوله دومتغیره و داده‌های دم سنگین دومتغیره بکار رود. حالت‌های خاص این مدل، توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی (BGGG)، توزیع BGG و برخی توزیع‌های دومتغیره دیگر است. در ادامه ویژگی‌های مختلفی از این توزیع دومتغیره استخراج می‌شود و در ادامه الگوریتم EM برای به‌دست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامترهای مدل ارائه می‌شود.

در بخش ۲ توزیع BGGPS را معرفی کرده و ویژگی‌های مختلف آن بررسی می‌شود. در بخش ۳ برخی حالت‌های خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد. برآورد پارامترهای مدل در بخش ۴ انجام می‌شود. در نهایت، در بخش ۵ دو مجموعه داده واقعی تحلیل می‌شوند.

۲ مدل BGGPS

فرض کنید متغیر تصادفی گسسته N دارای توزیع سری توانی، بریده شده در صفر، با تابع جرم احتمال

$$P(N = n) = \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

[1] Absoluotely Continuous

[2] Singular

است، که در آن $a_n \geq 0$، $A(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n < \infty$، $\theta \in (0, s)$ و $s \in (0, \infty)$. برخی ویژگی‌های توزیع سری توانی را می‌توان در نواک (۱۹۵۰) مشاهده کرد. جدول ۱ برخی حالت‌های خاص توزیع سری توانی (بریده شده در صفر) شامل توزیع‌های هندسی، پواسون، لگاریتمی، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی را نشان می‌دهد. در اینجا منظور از $A'(\theta)$ و $A''(\theta)$ به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم $A(\theta)$ نسبت به پارامتر θ است.

جدول ۱: کمیت‌های مهم برای برخی توزیع‌های سری توانی.

کمیت	هندسی	پواسون	لگاریتمی	دوجمله‌ای	دوجمله‌ای منفی
a_n	1	$n!^{-1}$	n^{-1}	$\binom{k}{n}$	$\binom{k-1}{n-1}$
$A(\theta)$	$\theta(1-\theta)^{-1}$	$e^\theta - 1$	$-\log(1-\theta)$	$(1+\theta)^k - 1$	$\frac{\theta^k}{(1-\theta)^k}$
$A'(\theta)$	$(1-\theta)^{-2}$	e^θ	$(1-\theta)^{-1}$	$\frac{k}{(\theta+1)^{1-k}}$	$\frac{k\theta^{k-1}}{(1-\theta)^{k+1}}$
$A''(\theta)$	$2(1-\theta)^{-3}$	e^θ	$(1-\theta)^{-2}$	$\frac{k(k-1)}{(\theta+1)^{2-k}}$	$\frac{k(k+2\theta-1)}{\theta^{2-k}(1-\theta)^{k+2}}$
s	1	∞	1	∞	1

تابع توزیع و تابع چگالی کلاس توزیع‌های یک متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی (GGPS) (طهماسبی و جعفری، ۲۰۱۶) به ترتیب عبارتند از

$$F_{\mathrm{GGPS}}(x;\alpha,\lambda,\gamma,\theta) = \frac{A(\theta(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^\alpha)}{A(\theta)}, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{GGPS}}(x;\alpha,\lambda,\gamma,\theta) &= \frac{\alpha\theta\lambda}{A(\theta)} e^{\gamma x} e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)} (1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha-1} \\ &\times A'(\theta(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^\alpha). \end{aligned} \tag{4}$$

فرض کنید $\{(X_{1n}, X_{2n}); n = 1, 2, \dots\}$ یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F_{BGG} است. در اینجا N را متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از (X_{1i}, X_{2i}) در نظر می‌گیریم، همچنین فرض کنید $Y_i = \max\{X_{i1}, \dots, X_{iN}\}$ برای $i = 1, 2$. در این مقاله توزیع توام $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ را توزیع BGGPS نامیده و با نماد $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۲. اگر $\boldsymbol{Y}$ دارای توزیع BGGPS باشد آنگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f_{\boldsymbol{Y}}\left(y_1, y_2\right)=\begin{cases} f_1\left(y_1, y_2\right) & 0<y_1<y_2 \\ f_2\left(y_1, y_2\right) & 0<y_2<y_1 \\ f_0\left(y\right) & 0<y_1=y_2=y, \end{cases} \tag{5}$$

است که در آن

$$\begin{aligned} f_1\left(y_1, y_2\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y_1 ; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_2 ; \alpha_2, \lambda, \gamma\right)\left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right. \\ &\times F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2, \lambda, \gamma) A^{\prime \prime}\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right) \\ &+ \left.A^{\prime}\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right)\right], \qquad (6) \\ f_2\left(y_1, y_2\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y_1 ; \alpha_1, \lambda, \gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_2 ; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right)\left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1, \lambda, \gamma)\right. \\ &\times F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma) A^{\prime \prime}\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right) \\ &+ \left.A^{\prime}\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)\right], \qquad (7) \\ f_0\left(y\right) &= \frac{\theta \alpha_3}{A\left(\theta\right)\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y ; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right) \\ &\times A^{\prime}\left(\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y ; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right)\right). \qquad (8) \end{aligned}$$

برهان: با استفاده از تابع توزیع $\boldsymbol{Y}$ داریم:

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{Y}}\left(y_1, y_2\right) &= P\left(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2 | N=n\right) P\left(N=n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{\mathrm{BGG}}^n\left(y_1, y_2\right) \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \\ &= \frac{A(\theta F_{\mathrm{BGG}}\left(y_1, y_2 ; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma\right))}{A(\theta)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{A\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right)}{A\left(\theta\right)} & y_1 \leq y_2 \\ \dfrac{A\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1 ; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2 ; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)}{A\left(\theta\right)} & y_1 > y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

تساوی دوم در رابطه فوق با استفاده از قانون احتمال کل با شرطی کردن روی N حاصل می‌شود. تساوی سوم و چهارم به ترتیب طبق تعریف تابع توزیع و تعریف توزیع سری توانی به‌دست می‌آید. در نهایت تساوی آخر نیز

با استفاده از تعریف توزیع BGG حاصل می‌شود. بنابراین، تابع چگالی $\boldsymbol{Y}$ با استفاده از دو بار مشتق‌گیری و رابطه $f_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_{\boldsymbol{Y}}(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}$ حاصل می‌گردد.

گزاره ۲.۲. اگر (Y_1, Y_2) دارای توزیع $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ باشد، آنگاه

الف: متغیر تصادفی Y_i، دارای توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_i + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است.

ب: متغیر تصادفی $V = \max(Y_1, Y_2)$ دارای توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است.

ج: اگر $A(\theta) = \theta$ آنگاه (Y_1, Y_2) دارای توزیع $\mathrm{BGG}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma)$ است.

د: $P(Y_1 < Y_2) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}$.

ه: $\lim_{\theta \to 0^+} F_{Y_1,\, Y_2}(y_1,\, y_2) = \left(F_{\mathrm{BGG}}(y_1,\, y_2)\right)^k$ که $k = \min\{n \in \mathrm{N} : a_n > 0\}$.

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از ارتباط بین تابع توزیع حاشیه‌ای و تابع توزیع توام استفاده کنیم. برای اثبات قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \le v) = P(\max(Y_1, Y_2) \le v) = P(Y_1 \le u, Y_2 \le u) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 \le u, Y_2 \le v | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_{X_1,X_2}(v, v)\right)^n P(N = n) \\ &= \frac{A(\theta(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3})}{A(\theta)}, \end{aligned}$$

که این توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است. قسمت (ج) نیز با جایگذاری $A(\theta) = \theta$ در توزیع دومتغیره BGGPS حاصل می‌شود. برای اثبات قسمت (د) نیز داریم:

$$\begin{aligned} P(Y_1 < Y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 < Y_2, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \int_0^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} f_{1n}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \times \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}. \end{aligned}$$

برای قسمت (ه) با برقرار دادن $k=\min\{n\in\mathbb{N}: a_n>0\}$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0^+}F_{Y_1,\,Y_2}(y_1,\,y_2) &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\theta^n\left(F_{X_1,\,X_2}(y_1,\,y_2)\right)^n}{\sum_{n=1}^{\infty}a_n\theta^n}\\ &= \lim_{\theta\to 0^+}\frac{a_k\left(F_{X_1,\,X_2}(y_1,\,y_2)\right)^k+\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\theta^{n-k}\left(F_{X_1,\,X_2}(y_1,\,y_2)\right)^n}{a_k+\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n\theta^{n-k}}\\ &= \left(F_{BGG}(y_1,\,y_2)\right)^k.\end{aligned}$$

گزاره ۳.۲. فرض کنید (Y_1,Y_2) دارای توزیع $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\lambda,\gamma,\theta)$ است و $p_n=\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}$. در این صورت

الف:

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nF_{\mathrm{BGG}}(y_1,y_2;n\alpha_1,n\alpha_2,n\alpha_3,\lambda,\gamma).$$

ب: برای تابع چگالی (Y_1,Y_2) در (۵) داریم:

$$\begin{aligned}f_1(y_1,y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty}p_nf_{\mathrm{GG}}(y_1;n(\alpha_1+\alpha_3),\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_2;n\alpha_2,\lambda,\gamma),\\ f_2(y_1,y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty}p_nf_{\mathrm{GG}}(y_1;n\alpha_1,\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_2;n(\alpha_2+\alpha_3),\lambda,\gamma),\\ f_0(y) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\sum_{n=1}^{\infty}p_nf_{\mathrm{GG}}(y;n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),\lambda,\gamma),\end{aligned}$$

که در آن $f_{\mathrm{GG}}(.;\alpha,\lambda,\gamma)$ تابع چگالی احتمال توزیع GG با پارامترهای (α,λ,γ) است.

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از قانون احتمال کل استفاده کرده و تابع توزیع توام (Y_1,Y_2) روی متغیر تصادفی N شرطی شود. برای اثبات قسمت (ب) نیز کافی است دو مرتبه از تابع توزیع توام ارائه شده در قسمت (الف) مشتق‌گیری و از روابط (۶)، (۷) و (۸) استفاده شود.

گزاره ۴.۲. تابع چگالی احتمال توام توزیع BGGPS را می‌توان به‌صورت

$$f_{\boldsymbol{Y}}(y_1,y_2)=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}f_a(y_1,y_2)+\frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}f_s(y),$$

نوشت که در آن

$$\begin{aligned} f_a\left(y_۱,y_۲\right) &= \frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳}{\alpha_۱+\alpha_۲}\begin{cases} f_۱\left(y_۱,y_۲\right) & y_۱<y_۲\\ f_۲\left(y_۱,y_۲\right) & y_۲<y_۱,\end{cases}\\ f_s\left(y\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)}f_{\text{GG}}\left(y;\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳,\lambda,\gamma\right)\\ &\times\quad A'\left(\theta F_{\text{GG}}\left(y;\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳,\lambda,\gamma\right)\right)\qquad y_۱=y_۲=y,\end{aligned}$$

و جاهای دیگر نیز صفر است. واضح است که $f_a(\cdot,\cdot)$ بخش پیوسته مطلق و $f_s(\cdot,\cdot)$ بخش منفرد تابع چگالی توام می‌باشد. بنابراین، اگر $\alpha_۳=۰$ باشد، تابع چگالی احتمال توام مدل BGGPS قسمت منفرد ندارد و تبدیل به یک توزیع پیوسته مطلق می‌شود.

برهان: برای اثبات کافی است مشابه با نتایج کوندو و گوپتا (۲۰۱۴)، با جایگذاری $f_a\left(y_۱,y_۲\right)$ و $f_s\left(y\right)$ در سمت راست تساوی فوق استفاده شود.

همان‌گونه که در ابتدای بخش ۲ بیان گردید حجم نمونه یک متغیر تصادفی گسسته N در نظر گرفته شد که دارای توزیع سری توانی است. در ادامه محاسبه $E\left(N|Y_۱=y_۱,Y_۲=y_۲\right)$ برای استفاده در بخش شبیه‌سازی به‌ویژه الگوریتم EM ارائه می‌شود.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $\{(X_{۱n},X_{۲n});n=۱,۲,\ldots\}$ یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F_{BGG} است. همچنین، فرض کنید $Y_i=\max\{X_{i۱},\ldots,X_{iN}\}$ برای $i=۱,۲$ که N متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از $(X_{۱i},X_{۲i})$ است. در این‌صورت، امید ریاضی N به شرط $Y_۱=y_۱$ و $Y_۲=y_۲$ به‌صورت

$$E\left(N|Y_۱=y_۱,Y_۲=y_۲\right)=\begin{cases}\frac{B_۱(y_۱,y_۲)}{k_۱(y_۱,y_۲)} & y_۱<y_۲\\ \frac{B_۲(y_۱,y_۲)}{k_۲(y_۱,y_۲)} & y_۲>y_۱\\ \frac{\theta A_۰(y)A''(\theta A_۰(y))+A'(\theta A_۰(y))}{k_۰(y)} & y_۱=y_۲=y,\end{cases}\qquad (۹)$$

است، که در آن

$$\begin{aligned} B_i\left(y_۱,y_۲\right) &= \left(\theta\ A_i\left(y_۱,y_۲\right)\right)^۲A'''\left(\theta A_i\left(y_۱,y_۲\right)\right)\\ &+\quad ۳\theta A_i\left(y_۱,y_۲\right)A''\left(\theta A_i\left(y_۱,y_۲\right)\right)+A'\left(\theta A_i\left(y_۱,y_۲\right)\right),\end{aligned}$$

و $A'''(\theta)$ مشتق سوم $A(\theta)$ نسبت به پارامتر θ است و

$$\begin{aligned} A_1(y_1,y_2) &= F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma),\\ A_2(y_1,y_2) &= F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma),\\ A_0(y) &= F_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma\right).\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k_1(y_1,y_2) &= \theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)\\ &\times A''\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)\right)\\ &+ A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)\right),\\ k_2(y_1,y_2) &= \theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)\\ &\times A''\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)\right)\\ &+ A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)\right),\\ k_0(y) &= A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)\right).\end{aligned}$$

برهان: بردار تصادفی (Y_1,Y_2) به شرط $N=n$ دارای توزیع $\mathrm{BGG}(n\alpha_1,n\alpha_2,\ n\alpha_3,\lambda,\gamma)$ است. بنابراین، تابع چگالی توام (Y_1,Y_2,N) عبارتست از

$$f_{Y_1,Y_2,N}(y_1,y_2,n)=\begin{cases}\frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}f_{1n}(y_1,y_2) & y_1<y_2\\ \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}f_{2n}(y_1,y_2) & y_2<y_1\\ \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}f_{0n}(y) & y_1=y_2=y,\end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_{1n}(y_1,y_2) &= n^2\lambda^2 e^{\gamma y_1+\gamma y_2}(\alpha_1+\alpha_3)\alpha_2 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}+e^{\gamma y_2}-2)}\\ &\times (1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}-1)})^{n(\alpha_1+\alpha_3)-1}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2}-1)})^{n\alpha_2-1}, \quad (10)\\ f_{2n}(y_1,y_2) &= n^2\lambda^2 e^{\gamma y_1+\gamma y_2}(\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}+e^{\gamma y_2}-2)}\\ &\times (1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}-1)})^{n\alpha_1-1}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2}-1)})^{n(\alpha_2+\alpha_3)-1}, \quad (11)\\ f_{0n}(y) &= n\lambda e^{\gamma y}\alpha_3 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y}-1)}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y}-1)})^{n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-1}. \quad (12)\end{aligned}$$

تابع جرم احتمال شرطی N به شرط $Y_1 = y_1$ و $Y_2 = y_2$ نیز برابر است با

$$f_{N|Y_1,Y_2}\left(n|y_1,y_2\right) = \begin{cases} \frac{n^2 a_n (\theta A_1(y_1,y_2))^{n-1}}{k_1(y_1,y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{n^2 a_n (\theta A_2(y_1,y_2))^{n-1}}{k_2(y_1,y_2)} & y_2 < y_1 \\ \frac{n a_n (\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y, \end{cases}$$

با استفاده از تعریف امید ریاضی N به شرط $Y_1 = y_1$ و $Y_2 = y_2$ و سپس استفاده از عبارت‌های

$$\theta^2 A'''\left(\theta\right) + 3\theta A''\left(\theta\right) + A'\left(\theta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n \theta^{n-1},$$
$$\theta A''\left(\theta\right) + A'\left(\theta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \theta^{n-1}, \qquad A'\left(\theta\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \theta^{n-1},$$

و در نهایت با استفاده از تعریف $B_1\left(y_1,y_2\right)$ و $B_2\left(y_1,y_2\right)$ داریم:

$$\begin{aligned} E\left(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_{N|Y_1,Y_2}\left(n|y_1,y_2\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n (\theta A_1(y_1,y_2))^{n-1}}{k_1(y_1,y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n (\theta A_2(y_1,y_2))^{n-1}}{k_2(y_1,y_2)} & y_2 > y_1 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n (\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y, \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$E\left(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\right) = \begin{cases} \frac{B_1(y_1,y_2)}{k_1(y_1,y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{B_2(y_1,y_2)}{k_2(y_1,y_2)} & y_2 > y_1 \\ \frac{\theta A_0(y) A''(\theta A_0(y)) + A'(\theta A_0(y))}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y. \end{cases}$$

و اثبات کامل می‌شود.

۳ حالت‌های خاص توزیع BGGPS

در این بخش با توجه به جدول ۱، چند حالت خاص توزیع BGGPS در نظر گرفته می‌شود و به ازای $i = 1, 2$ فرض می‌شود $t_i = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}$.

۱.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته دوجمله-ای

توزیع دوجمله‌ای (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \binom{k}{n}$ و $A(\theta) = (\theta + ۱)^k - ۱$ برای $\theta > ۰$ است به‌طوری‌که k تعداد تکرارهای آزمایش است. بنابراین تابع توزیع دومتغیره مدل گومپرتز تعمیم‌یافته دوجمله-ای (BGGB) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_۱, y_۲) = \begin{cases} \frac{\left\{\theta t_۱^{\alpha_۱+\alpha_۳} t_۲^{\alpha_۲}+۱\right\}^{\mathrm{k}}-1}{(\theta+۱)^k-۱} & y_۱ \le y_۲ \\ \frac{\left\{\theta t_۱^{\alpha_۱} t_۲^{\alpha_۲+\alpha_۳}+۱\right\}^{\mathrm{k}}-1}{(\theta+۱)^k-۱} & y_۱ > y_۲, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_۱(y_۱, y_۲) &= \frac{k\theta}{(\theta+۱)^k - ۱} f_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱+\alpha_۳, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲, \lambda, \gamma) \\ &\times \left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱+\alpha_۳, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲, \lambda, \gamma) + ۱\right]^{k-۲} \\ &\times \left[k\theta F_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱+\alpha_۳, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲, \lambda, \gamma) + ۱\right], \\ f_۲(y_۱, y_۲) &= \frac{k\theta}{(\theta+۱)^k - ۱} f_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲+\alpha_۳, \lambda, \gamma) \\ &\times \left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲+\alpha_۳, \lambda, \gamma) + ۱\right]^{k-۲} \\ &\times \left[k\theta F_{\mathrm{GG}}(y_۱; \alpha_۱, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_۲; \alpha_۲+\alpha_۳, \lambda, \gamma) + ۱\right], \\ f_۰(y) &= \frac{k\theta\alpha_۳\, f_{\mathrm{GG}}(y; \alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳, \lambda, \gamma)}{\left[(\theta+۱)^k - ۱\right](\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)} \left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y; \alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳, \lambda, \gamma) + ۱\right]^{k-۱}. \end{aligned}$$

۲.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی

توزیع هندسی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی است با قرار دادن $a_n = ۱$ و $A(\theta) = \frac{\theta}{۱-\theta}$ برای $۰ < \theta < ۱$. بنابراین، تابع توزیع توام توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته هندسی (BGGG) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_۱, y_۲) = \begin{cases} \frac{(۱-\theta) t_۱^{\alpha_۱+\alpha_۳} t_۲^{\alpha_۲}}{۱-\theta t_۱^{\alpha_۱+\alpha_۳} t_۲^{\alpha_۲}} & y_۱ \le y_۲ \\ \frac{(۱-\theta) t_۱^{\alpha_۱} t_۲^{\alpha_۲+\alpha_۳}}{۱-\theta t_۱^{\alpha_۱} t_۲^{\alpha_۲+\alpha_۳}} & y_۱ > y_۲, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned}
f_1(y_1,y_2) &= (1-\theta) f_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) f_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma) \\
&\times \frac{1+\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)}{(1-\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma))^3}, \\
f_2(y_1,y_2) &= (1-\theta) f_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) f_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma) \\
&\times \frac{1+\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}{(1-\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^3}, \\
f_0(y) &= \frac{(1-\theta)\alpha_3 f_{GG}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(1-\theta F_{GG}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^2}.
\end{aligned}$$

توجه ۳.۱. هنگامی‌که $\theta^* = 1-\theta$ توزیع BGGG به توزیع دومتغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) تبدیل می‌شود.

۳.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-پواسون

توزیع پواسون بریده شده در صفر حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \frac{1}{n!}$ و $A(\theta) = e^\theta - 1$ برای $\theta > 0$ است. بنابراین، تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم‌یافته پواسون (BGGP) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{\exp\left(\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3} t_2^{\alpha_2}\right)-1}{\exp(\theta)-1} & y_1 \le y_2 \\ \frac{\exp\left(\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+\alpha_3}\right)-1}{\exp(\theta)-1} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned}
f_1(y_1,y_2) &= \theta f_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) f_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma) \\
&\times e^{\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)} \\
&\times \left[\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)+1\right], \\
f_2(y_1,y_2) &= \theta f_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) f_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma) \\
&\times e^{\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)} \\
&\times \left[\theta F_{GG}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) F_{GG}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)+1\right], \\
f_0(y) &= \frac{\theta\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} f_{GG}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma) \\
&\times e^{\theta F_{GG}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}.
\end{aligned}$$

۴.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-لگاریتمی

توزیع لگاریتمی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \frac{1}{n}$ و $A(\theta) = -\log(1-\theta)$ برای $0 < \theta < 1$ است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته لگاریتمی (BGGL) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\log\left(1-\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3} t_2^{\alpha_2}\right)}{\log(1-\theta)} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{\log\left(1-\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+\alpha_3}\right)}{\log(1-\theta)} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \frac{-\theta f_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta)\left(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right)^2}, \\ f_2(y_1, y_2) &= \frac{-\theta f_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta)\left(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)^2}, \\ f_0(y) &= \frac{-\theta \alpha_3 f_{\mathrm{GG}}(y; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\left(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)}. \end{aligned}$$

۵.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله-ای منفی

توزیع دوجمله-ای منفی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \binom{n-1}{k-1}$ و $A(\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$ برای $0 < \theta < 1$ است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته دوجمله-ای منفی (BGGNB) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{(1-\theta)^k t_1^{k(\alpha_1+\alpha_3)} t_2^{k\alpha_2}}{\left(1-\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3} t_2^{\alpha_2}\right)^k} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{(1-\theta)^k t_1^{k\alpha_1} t_2^{k(\alpha_2+\alpha_3)}}{\left(1-\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+\alpha_3}\right)^k} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1,y_2) &= \frac{k(1-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\, f_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)}{(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma))^{k+2}} \\ &\times\ (F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma))^{k-1} \\ &\times\ [k+\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)], \\ f_2(y_1,y_2) &= \frac{k(1-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\, f_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}{(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^{k+2}} \\ &\times\ (F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^{k-1} \\ &\times\ [k+\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)], \\ f_0(y) &= \frac{k\alpha_3(1-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(1-\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^{k+1}} \\ &\times\ (F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma))^{k-1}. \end{aligned}$$

۴ برآورد پارامترهای توزیع BGGPS

ابتدا به برآورد پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی پرداخته می‌شود (کوندو و گوپتا، ۲۰۱۴). فرض کنید $(y_{11},y_{12}),\ldots,(y_{m1},y_{m2})$ یک نمونه مشاهده شده به اندازه m از توزیع BGGPS با پارامترهای $\boldsymbol{\Theta}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\lambda,\gamma,\theta)'$ است. همچنین، فرض کنید

$$I_0=\{i: y_{1i}=y_{2i}=y_i\}, \qquad I_1=\{i: y_{1i}<y_{2i}\}, \qquad I_2=\{i: y_{1i}>y_{2i}\},$$
$$m_0=|I_0|, \qquad m_1=|I_1|, \qquad m_2=|I_2|, \qquad m=m_0+m_1+m_2.$$

بنابراین، تابع درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\Theta})=\prod_{i\in I_0} f_0(y_i)\prod_{i\in I_1} f_1(y_{1i},y_{2i})\prod_{i\in I_2} f_2(y_{1i},y_{2i}),$$

نوشت و تابع لگاریتم درستنمایی نیز به‌صورت

$$\ell(\boldsymbol{\Theta})=\sum_{i\in I_0}\log(f_0(y_i)) + \sum_{i\in I_1}\log(f_1(y_{1i},y_{2i})) + \sum_{i\in I_2}\log(f_2(y_{1i},y_{2i})),$$

حاصل می‌شود، که در آن f_1، f_2 و f_0 به ترتیب در (۶)، (۷) و (۸) ارائه شده‌اند. نمی‌توان عبارت صریحی برای برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به‌دست آورد و نیازمند حل شش معادله غیرخطی به‌طورهمزمان است.

با استفاده از برخی از دستورها مانند دستور nlminb در نرم‌افزار R می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را به روش عددی به‌دست آورد که نیازمند مقادیر اولیه است که نتایج به این مقادیر حساس هستند. بنابراین، در ادامه یک الگوریتم امید-ماکسیمم‌سازی[۳] (EM) برای یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها ارائه می‌شود. این روش توسط بسیاری از نویسندگان از جمله کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) نیز استفاده شده است.

برای n داده‌شده، فرض کنید که متغیرهای تصادفی مستقل $\{Z_i|N=n\}$، $i=۱,۲,۳$ دارای توزیع GG با پارامترهای $(n\alpha_i,\lambda,\gamma)$ هستند. بدیهی است که

$$\{Y_۱ \mid N=n\} = \max\left(Z_۱, Z_۳\right) \ |N=n, \qquad \{Y_۲ \mid N=n\} = \max\left(Z_۲, Z_۳\right) \mid N=n.$$

برای بردار تصادفی دومتغیره، می‌توان یک بردار تصادفی وابسته به‌صورت

$$\Lambda_۱ = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad Y_۱ = Z_۱ \\ ۱ & \text{if} \quad Y_۱ = Z_۳ \end{cases} \qquad \Lambda_۲ = \begin{cases} ۰ & \text{if} \quad Y_۲ = Z_۲ \\ ۱ & \text{if} \quad Y_۲ = Z_۳. \end{cases}$$

در نظر گرفت. توجه شود که اگر $Y_۱ = Y_۲$ آنگاه $\Lambda_۱ = \Lambda_۲ = ۰$. ولی اگر $Y_۱ < Y_۲$ یا $Y_۱ > Y_۲$ آنگاه $(\Lambda_۱,\Lambda_۲)$ قابل تشخیص نیست. تمام ترتیب‌های ممکنه Z_iها، مقادیر $(Y_۱,Y_۲)$ و $(\Lambda_۱,\Lambda_۲)$ و احتمال‌های متناظر آنها در جدول ۲ آورده شده‌اند.

جدول ۲: تمام ترتیب‌های ممکنه Z_iها، مقادیر $(Y_۱,Y_۲)$ و $(\Lambda_۱,\Lambda_۲)$ و احتمال‌های متناظر آنها.

حالت	ترتیب‌های ممکنه	$Y_۱$	$Y_۲$	$\Lambda_۱$	$\Lambda_۲$	احتمال	مجموعه
۱	$Z_۱<Z_۲<Z_۳$	$Z_۳$	$Z_۳$	۱	۱	$\frac{\alpha_۲\alpha_۳}{(\alpha_۱+\alpha_۲)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۰$
۲	$Z_۲<Z_۱<Z_۳$	$Z_۳$	$Z_۳$	۱	۱	$\frac{\alpha_۱\alpha_۳}{(\alpha_۱+\alpha_۲)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۰$
۳	$Z_۱<Z_۳<Z_۲$	$Z_۳$	$Z_۲$	۱	۰	$\frac{\alpha_۲\alpha_۳}{(\alpha_۱+\alpha_۳)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۱$
۴	$Z_۳<Z_۱<Z_۲$	$Z_۱$	$Z_۲$	۰	۰	$\frac{\alpha_۱\alpha_۲}{(\alpha_۱+\alpha_۳)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۱$
۵	$Z_۲<Z_۳<Z_۱$	$Z_۱$	$Z_۳$	۰	۱	$\frac{\alpha_۱\alpha_۳}{(\alpha_۲+\alpha_۳)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۲$
۶	$Z_۳<Z_۲<Z_۱$	$Z_۱$	$Z_۲$	۰	۰	$\frac{\alpha_۱\alpha_۲}{(\alpha_۲+\alpha_۳)(\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳)}$	$I_۲$

ابتدا، تابع شبه لگاریتم درستنمایی شرطی با شرطی کردن روی N تشکیل داده می‌شود، سپس N با $E(N|Y_۱,Y_۲)$ جایگذاری می‌گردد. برای ایجاد مرحله E الگوریتم EM بدین صورت عمل می‌شود: هنگامی

[۳] Expectation–Maximization

که مشاهدات در مجموعه I_0 قرار داشته باشند کل مشاهدات استفاده می‌شوند. هنگامی که مشاهدات در مجموعه I_1 قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن (y_1, y_2) به دو شبه مشاهده به‌صورت $(y_1, y_2, u_1(\mathbf{\Theta}))$ و $(y_1, y_2, u_2(\mathbf{\Theta}))$ ایجاد می‌شود به‌طوری‌که $u_1(\mathbf{\Theta})$ و $u_2(\mathbf{\Theta})$ احتمال‌های شرطی هستند، که در آن (Λ_1, Λ_2) به ترتیب مقادیر $(1, 0)$ و $(1, 1)$ اختیار می‌کند. بنابراین

$$u_1(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3}, \qquad u_2(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}.$$

به‌طور مشابه، هنگامی که مشاهدات در مجموعه I_2 قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن (y_1, y_2) به دو شبه مشاهده به‌صورت $(y_1, y_2, v_1(\mathbf{\Theta}))$ و $(y_1, y_2, v_2(\mathbf{\Theta}))$ ایجاد می‌شود، به‌طوری که $v_1(\mathbf{\Theta})$ و $v_2(\mathbf{\Theta})$ احتمال‌های شرطی هستند، که در آن (Λ_1, Λ_2) به ترتیب مقادیر $(0, 1)$ و $(1, 1)$ را اختیار می‌کند. بنابراین

$$v_1(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}, \qquad v_2(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

در ادامه $u_1(\mathbf{\Theta})$، $u_2(\mathbf{\Theta})$، $v_1(\mathbf{\Theta})$ و $v_2(\mathbf{\Theta})$ به اختصار با u_1، u_2، v_1 و v_2 نشان داده می‌شوند.

مرحله E: فرض کنید $b_i = E(N|y_{1i}, y_{2i}, \mathbf{\Theta})$. تابع لگاریتم شبه درستنمایی بدون درنظرگرفتن مقدار ثابت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\ell_{\text{pseudo}}(\mathbf{\Theta}) &= \log(\theta) \sum_{i=1}^{m} b_i - m\log(C(\theta)) + (2m - m_0)\log(\lambda) \\
&+ (m_1 u_1 + m_2)\log(\alpha_1) + (m_1 + m_2 v_1)\log(\alpha_2) \\
&+ (m_0 + m_1 u_2 + m_2 v_2)\log(\alpha_3) + \gamma \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (y_{1i} + y_{2i}) \\
&+ \gamma \sum_{i \in I_0} y_i - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_0} (e^{\gamma y_i} - 1) - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (e^{\gamma y_{1i}} + e^{\gamma y_{2i}} - 2) \\
&+ \alpha_1 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \Big) \\
&+ \alpha_2 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) \Big) \\
&+ \alpha_3 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \\
&+ . \sum_{i \in I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) \Big) - \sum_{i \in I_0} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) \\
&- \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) - \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}).
\end{aligned}$$

مرحله M: در این مرحله، $\ell_{\text{pseudo}}(\boldsymbol{\Theta})$ نسبت به پارامترها ماکسیمم می‌شود. برای مقدار ثابت λ و γ، ماکسیمم نسبت به $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_۱(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۱ u_۱ + m_۲}{\sum_{i\in I_۰} b_i Q_i + \sum_{i\in I_۱\cup I_۲} b_i Q_i}, \\ \hat{\alpha}_۲(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۱ + m_۲ v_۱}{\sum_{i\in I_۰} b_i Q_i + \sum_{i\in I_۱\cup I_۲} b_i Q_i}, \\ \widehat{\alpha}_۳(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۰ + m_۱ u_۲ + m_۲ v_۲}{\sum_{i\in I_۰} b_i Q_i + \sum_{i\in I_۱} b_i Q_i + \sum_{i\in I_۲} b_i Q_i}, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

است، که در آن $Q_i = \log(۱ - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i}-۱)})$. ماکسیمم $\ell_{\text{pseudo}}(\boldsymbol{\Theta})$ نسبت به θ، با حل معادله غیرخطی

$$\frac{\theta C'(\theta)}{C(\theta)} = \frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m} b_i. \tag{۱۴}$$

نسبت به θ به‌دست می‌آید. سرانجام، ماکسیمم $\ell_{\text{pseudo}}(\boldsymbol{\Theta})$ نسبت به λ و γ، با ماکسیمم کردن تابع شبه لگاریتم درستنمایی

$$\ell_{\text{pseudo}}\left(\widehat{\alpha}_۱(\lambda,\gamma), \widehat{\alpha}_۲(\lambda,\gamma), \widehat{\alpha}_۳(\lambda,\gamma), \lambda, \gamma, \theta\right),$$

به‌دست آورده می‌شود. الگوریتم ۱ می‌تواند برای محاسبه برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها براساس الگوریتم EM استفاده شوند:

الگوریتم ۱ :

گام ۱: یک مقدار اولیه برای $\boldsymbol{\Theta}$ درنظر گرفته شود، مثلا $'(\alpha_۱^{(۰)}, \alpha_۲^{(۰)}, \alpha_۳^{(۰)}, \lambda^{(۰)}, \gamma^{(۰)}, \theta^{(۰)})= \boldsymbol{\Theta}^{(0)}$.

گام ۲: مقدار $b_i = E(N \mid y_{۱i}, y_{۲i}; \boldsymbol{\Theta}^{(۰)})$ با استفاده از (۹) محاسبه شود.

گام ۳: مقادیر $u_۱$، $u_۲$، $v_۱$ و $v_۲$ محاسبه می‌شوند.

گام ۴: تابع شبه لگاریتم درستنمایی $\ell_{\text{pseudo}}(\alpha_۱^{(۰)}, \alpha_۲^{(۰)}, \alpha_۳^{(۰)}, \lambda, \gamma, \theta^{(۰)})$ نسبت به λ و γ ماکسیمم شود و به ترتیب با $\hat{\lambda}^{(۱)}$ و $\hat{\gamma}^{(۱)}$ نشان داده شوند.

گام ۵: مقدار $\hat{\alpha}_i^{(۱)} = \hat{\alpha}_i(\widehat{\lambda}^{(۱)}, \hat{\gamma}^{(۱)})$ بر اساس رابطه (۱۳) محاسبه شود.

گام ۶: مقدار $\hat{\theta}$ از حل معادله (۱۴) پیدا نموده و با $\hat{\theta}^{(۱)}$ نشان داده شود.

گام ۷: مقدار $\boldsymbol{\Theta}^{(0)}$ با $(\hat{\alpha}_۱^{(۱)}, \hat{\alpha}_۲^{(۱)}, \hat{\alpha}_۳^{(۱)}, \hat{\lambda}^{(۱)}, \hat{\gamma}^{(۱)}, \hat{\theta}^{(۱)})= \boldsymbol{\Theta}^{(1)}$ جایگذاری شود و مراحل تا زمانی که فرایند همگرا شود ادامه یابد.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش توزیع BGGPS برای برازش به دو مجموعه داده‌های واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا شش زیرکلاس از این توزیع در نظر گرفته شده‌اند:
توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته (BGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته–هندسی (BGGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته–پواسون (BGGP)، گومپرتز تعمیم‌یافته–دوجمله‌ای (BGGB) با $k = ۱۰$، گومپرتز تعمیم‌یافته–لگاریتمی (BGGL) و گومپرتز تعمیم‌یافته–دوجمله‌ای منفی (BGGNB) با $k = ۲$.

اولین مجموعه داده‌های دومتغیره درنظر گرفته شده در این مقاله، اولین بار توسط واشنگتن پست ارائه شده است (سزورگو و ولش، ۱۹۸۹). این داده‌ها مربوط به لیگ فوتبال آمریکا برای طی سه هفته متوالی مسابقات در سال ۱۹۸۶ است. در اینجا، $Y_۱$ نشان‌دهنده زمانی است که اولین امتیاز با ضربه به توپ حاصل شده است و $Y_۲$ نشان‌دهنده زمانی است که اولین امتیاز با انتقال توپ به آخر زمین حاصل شده است. تمام داده‌ها بر ۱۰۰ تقسیم شده‌اند. کوندو و گوپتا (۲۰۱۰)، جمالیزاده و کوندو (۲۰۱۳) و ال‌شرپیانی و همکاران (۲۰۱۳) نیز این داده‌ها را مورد تحلیل قرار داده‌اند.
دومین مجموعه داده‌های دومتغیره مربوط به ۴۴ مورد تقاضا (درخواست خسارت) از بیمه حوادث موتورسیکلت تا انتهای سال ۱۳۹۴ است که شامل هزینه‌های صدمه به اموال ($Y_۱$) و هزینه‌های درمانی ($Y_۲$) است و توسط بیمه ایران گزارش شده است. این مجموعه داده‌ها در جدول ۳ گزارش شده است که تا نزدیک‌ترین ۱۰۰۰۰۰ واحد گرد شده و سپس بر این عدد تقسیم شده‌اند.

توزیع‌ها به مجموعه داده‌های دومتغیره برازش شده و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و مقادیر لگاریتم درستنمایی متناظر محاسبه شده‌اند. همچنین، انحرافات استاندارد (SE) بر اساس ماتریس اطلاع مشاهده به‌دست آمده‌اند. برای هر مدل برازش شده، معیار اطلاع آکائیکی (AIC)، معیار اطلاع آکائیکی اصلاح‌شده (AICC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) نیز محاسبه شده‌اند. از آنجایی که آماره کلموگروف–اسمیرنوف (K–S) برای حالت یک متغیره استفاده می‌شود p-مقدارهای متناظر این آماره برای $Y_۱$، $Y_۲$ و $V = \max(Y_۱, Y_۲)$ محاسبه شده‌اند. سرانجام، آزمون نسبت درستنمایی (LRT) و p-مقدارهای متناظر برای آزمون مناسب بودن توزیع BGG در مقابل سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت. نتایج در جداول ۴ و ۵ آورده شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که تمام مدل‌ها برای این دو مجموعه داده‌ها مناسب هستند.

جدول ۳: تعداد تقاضاهای بیمه حوادث موتور سیکلت از شرکت بیمه.

Y_1	۵۰۰	۸۹۰	۴۲۸	۱۴۴	۵۴۶	۵۵۰	۳۴۳	۴۱۱	۱۳۴	۳۸۰	۵۳۵
Y_2	۱۶۸	۲۹۲	۲۷۲	۱۹۳	۲۸۶	۱۳۲	۱۶۱	۱۹۲	۹۴۵	۲۲۶	۲۰۶
Y_1	۴۹۱	۶۲۰	۴۱۲	۱۹۹	۶۶۵	۳۰۰	۲۵۲	۱۷۵	۳۷۴	۲۳۰	۷۲۰
Y_2	۶۸۴	۱۸۳	۱۹۸	۲۴۳	۴۵۶	۴۱۷	۵۲۲	۱۷۵	۸۸۱	۷۸۴	۴۰۰
Y_1	۴۷۰	۷۰۶	۳۲۳	۲۲۴	۱۶۰	۴۹۹	۳۳۵	۱۱۴	۱۹۸	۱۹۲	۲۰۵
Y_2	۵۷۰	۲۲۲	۱۰۳	۳۴۹	۳۴۲	۴۷۹	۸۰۷	۳۸۹	۱۷۱	۱۱۴	۱۲۲
Y_1	۴۷۶	۳۶۸	۳۰۶	۳۹۸	۴۲۳	۵۰۰	۳۸۰	۵۵۰	۵۲۹	۱۷۱	۳۳۵
Y_2	۲۷۴	۱۶۵	۱۸۹	۹۷۶	۳۷۵	۱۹۸	۲۶۷	۱۰۷	۲۰۲	۹۹۹	۲۶۴

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله خانواده‌ای از توزیع‌های جدیدی، تحت عنوان خانواده توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته–سری توانی معرفی شد. این کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره شامل چندین مدل دیگر است که به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفتند. چندین ویژگی از توزیع مانند تابع چگالی احتمال توام و شرطی، توابع توزیع حاشیه‌ای و امید ریاضی شرطی محاسبه شد. پس از برآورد پارامترهای این مدل، برای نشان دادن میزان انعطاف‌پذیری و توانمندی این توزیع دومتغیره، از دو سری داده واقعی برای برازش مدل استفاده گردید. با توجه به نتایج حاصله از مقایسه در بخش کاربردها می‌توان نتیجه گرفت که مدل جدید برای این مجموعه داده‌ها مناسب است و می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع‌های دومتغیره دیگر باشد.

تقدیر و تشکر

مولفین لازم می‌دانند از داوران گرامی، سردبیر و اعضای هیات تحریریه محترم مجله که با نظرات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند. از دانشگاه یزد نیز بخاطر حمایت و پشتیبانی از این مقاله قدردانی می‌گردد.

جدول ۴: نتایج برای شش توزیع برازش شده روی مجموعه داده‌های اول.

آماره	BGG	BGGG	BGGP	BGGB	BGGL	BGGNB
$\hat{\alpha}_1$	۰/۰۹۲۱	۰/۰۶۰۵	۰/۰۵۷۸	۰/۰۵۹۷	۰/۰۶۷۵	۰/۰۱۹۵
SE	۰/۰۶۵۳	۰/۰۴۸۳	۰/۰۴۹۵	۰/۰۴۹۷	۰/۰۵۰۴	۰/۰۲۲۸
$\hat{\alpha}_2$	۰/۵۷۲۲	۰/۴۱۹۷	۰/۳۸۹۶	۰/۳۹۸۸	۰/۴۷۲۰	۰/۱۳۲۵
SE	۰/۱۶۱۴	۰/۱۷۹۸	۰/۲۱۱۲	۰/۲۰۴۰	۰/۱۵۸۶	۰/۱۲۳۶
$\hat{\alpha}_3$	۱/۱۵۱۹	۰/۷۴۷۱	۰/۷۱۷۲	۰/۷۴۰۹	۰/۸۳۳۱	۰/۲۴۲۱
SE	۰/۲۳۸۸	۰/۳۱۹۳	۰/۳۷۴۶	۰/۳۵۸۱	۰/۲۶۳۴	۰/۲۳۱۳
$\hat{\lambda}$	۹/۶۱۸۷	۱۲/۰۹۶۱	۱۱/۴۶۱۶	۱/۲۸۰۲	۱۲/۲۴۸۹	۱۱/۶۳۸۶
SE	۱/۵۵۹۰	۲/۱۹۰۰	۱/۸۱۵۹	۱/۷۶۶۶	۲/۳۰۰۸	۲/۰۲۷۲
$\hat{\gamma}$	۲/۱e-۱۲	۱/۳e-۱۲	۱/۱e-۱۲	۱/۲e-۱۲	۱/۵e-۱۲	۱/۳e-۱۲
SE	۰/۰۴۵۵	۰/۰۵۹۴	۰/۱۰۶۰	۰/۱۰۰۸	۰/۰۹۶۲	۰/۱۱۴۰
$\hat{\theta}$	—	۰/۶۱۲۸	۱/۹۹۳۰	۰/۲۳۲۵	۰/۸۰۵۳	۰/۷۱۸۶
SE	—	۰/۲۳۵۴	۱/۶۱۰۵	۰/۲۰۷۴	۰/۱۷۸۱	۰/۳۱۳۷
$\log(\ell)$	۳۶/۶۷۰	۳۸/۳۶۳	۳۸/۲۳۲۸	۳۸/۱۶۶	۳۸/۳۵۸	۳۸/۱۷۲
AIC	-۶۳/۳۴۰	-۶۴/۷۲۵	-۶۴/۴۶۵	-۶۴/۳۳۲	-۶۴/۷۱۶	-۶۴/۳۴۴
AICC	-۶۱/۶۷۳	-۶۲/۳۲۵	-۶۲/۰۶۵	-۶۱/۹۳۲	-۶۲/۳۱۶	-۶۱/۹۴۴
BIC	-۵۴/۶۵۱	-۵۴/۲۹۹	-۵۴/۰۳۹	-۵۳/۹۰۶	-۵۴/۲۹۰	-۵۳/۹۱۸
p-مقدار K-S (X_1)	۰/۱۲۸۲	۰/۱۰۲۸	۰/۱۰۰۵	۰/۱۰۱۶	۰/۱۰۷۱	۰/۱۰۰۱
p-مقدار K-S (X_2)	۰/۳۴۰۸	۰/۲۹۵۳	۰/۲۶۷۹	۰/۲۶۸۸	۰/۳۳۲۱	۰/۲۶۸۱
p-مقدار K-S (V)	۰/۳۹۲۹	۰/۳۶۸۵	۰/۳۲۷۱	۰/۳۲۶۲	۰/۴۱۶۵	۰/۳۲۹۲
LRT	—	۳/۳۸۶	۳/۱۲۶	۲/۹۹۲	۳/۳۷۶	۳/۰۰۴
p-مقدار	—	۰/۰۶۵۷	۰/۰۷۷۰	۰/۰۸۳۶	۰/۰۶۶۱	۰/۰۸۳۰

جدول ۵: نتایج برای شش توزیع برازش شده روی مجموعه داده‌های دوم.

آماره	BGG	BGGG	BGGP	BGGB	BGGL	BGGNB
$\hat{\alpha}_۱$	۵/۵۴۰۵	۵/۵۴۰۱	۵/۵۴۰۷	۵/۵۴۰۵	۵/۵۴۲۶	۲/۷۷۰۲
SE	۱/۳۱۶	۱/۳۸۰	۱/۳۱۷	۱/۳۰۰	۱/۳۱۸	۲/۳۲۷
$\hat{\alpha}_۲$	۳/۵۹۳۱	۳/۵۹۲۹	۳/۵۹۱۸	۳/۵۹۳۴	۳/۵۹۴۳	۱/۷۹۶۵
SE	۰/۸۶۲	۰/۸۳۲	۰/۸۶۲	۰/۸۶۹	۰/۸۶۲	۱/۲۵۱
$\hat{\alpha}_۳$	۱۰e−۶	۱۰e−۰۶	۱۰e−۰۶	۱۰e−۰۶	۱۰e−۰۶	۱۰e−۰۶
SE	۱/۱۴۰	۱/۱۴۲	۱/۱۷۱	۱/۰۶۴	۱/۱۴۲	۱/۱۱۵
$\hat{\lambda}$	۵۸۳۹/۹۵۹	۵۸۳۹/۶۷۵	۵۸۳۹/۸۷۱	۵۸۴۰/۰۱۳	۵۸۴۱/۲۷	۵۸۳۹/۹۳
SE	۷۳۵/۷۰۱	۷۷۱/۰۴۷	۷۳۵/۷۷۵	۷۲۶/۸۷۵	۷۳۶/۱۱۲	۷۲۷/۵۴۱
$\hat{\gamma}$	۱۰e−۰۸	۶.۴۱e−۰۵	۹.۹۳e−۰۶	۳.۱۲e−۶	۴.۰۷e−۰۵	۲.۲۵e−۰۵
SE	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۱۴	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۱۵۴
$\hat{\theta}$	—	۱۰e−۰۶	۱۰e−۰۶	۱۲e−۰۶	۱۰e−۰۶	۱۱e−۰۶
SE	—	۰/۴۰۹۴	۰/۰۴۸۳	۰/۰۴۴۷	۰/۰۵۰۱	۰/۰۴۲۸
$\log(\ell)$	۶۳۳/۸۸۲	۶۳۵/۴۲۸	۶۳۵/۲۱۴	۶۳۴/۹۸۴	۶۳۵/۳۸۵	۶۳۴/۹۹۳
AIC	−۱۲۵۷/۷۶	−۱۲۵۸/۸۵	−۱۲۵۸/۴۲	−۱۲۵۷/۹۶	−۱۲۵۸/۷۷	−۱۲۵۷/۹۸
AICC	−۱۲۵۶/۱۸	−۱۲۵۶/۵۸	−۱۲۵۶/۱۵	−۱۲۵۵/۶۹	−۱۲۵۶/۵۰	−۱۲۵۵/۷۱
BIC	−۱۲۴۸/۸۴	−۱۲۶۰/۹۹	−۱۲۶۰/۵۶	−۱۲۶۰/۱۱	−۱۲۶۰/۹۱	−۱۲۶۰/۱۲
p-مقدار K–S ($X_۱$)	۰/۸۳۱	۰/۸۱۲	۰/۸۱۱	۰/۸۱۷	۰/۸۲۳	۰/۸۰۹
p-مقدار K–S ($X_۲$)	۰/۴۲۸	۰/۲۱۵	۰/۲۰۳	۰/۱۹۷	۰/۲۷۱	۰/۱۹۳
p-مقدار K–S (V)	۰/۷۶۲	۰/۷۳۱	۰/۶۹۴	۰/۶۸۸	۰/۷۲۴	۰/۶۹۱
LRT	—	۳/۲۸۷	۳/۱۴۲	۳/۰۹۲	۳/۲۵۱	۳/۱۱۶
p-مقدار	—	۰/۰۷۱۴	۰/۰۸۱۷	۰/۰۸۴۶	۰/۰۷۲۲	۰/۰۸۴۱

مراجع

Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42.

Barreto-Souza, W., Morais, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 645-657.

Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On some Lifetime Distributions with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.

Csorgo, S. and Welsh, A. (1989), Testing for Exponential and Marshall-Olkin Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **23**, 287-300.

El-Gohary, A., Alshamrani, A. and Al-Otaibi, A. (2013), The Generalized Gompertz Distribution, *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 13–24.

El-Sherpieny, E. A., Ibrahim, S. A. and Bedar, R. E. (2013), A New Bivariate Distribution with Generalized Gompertz Marginals, *Asian Journal of Applied Sciences*, **1**, 141–150.

Flores, J., Borges, P., Cancho, V. G. and Louzada, F. (2013), The Complementary Exponential Power Series Distribution, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **27**, 565-584.

Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distributions, *Australian & NewZealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.

Jamalizadeh, A. and Kundu, D. (2013), Weighted Marshall-Olkin Bivariate Exponential Distribution, *Statistics*, **47**, 917-928.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2010), A Class of Bivariate Models with Proportional Reversed Hazard Marginals, *Sankhya* B, **72**, 236-253.

Kundu, D. and Gupta, A. K. (2014), On Bivariate Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, **123**, 19-29.

Kuş, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.

Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2012), Generalized Exponential-Power Series Distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 4047-4066.

Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2017), The Compound Class of Linear Failure Rate-Power Series Distributions: Model, Properties and Applications, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46** , 1414-1440

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Aamily of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, Series B, **84**, 641-652.

Morais, A. L. and Barreto-Souza, W. (2011), A Compound Class of Weibull and Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1410-1425.

Noack, A. (1950), A Class of Random Variables with Discrete Distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, **21**, 127-132.

Roozegar, R. and Nadarajah, S. (2017), The Quadratic Hazard Rate Power Series Distribution, *Journal of Testing and Evaluation*, **45**, 1058-1072.

Silva, R. B., Bourguignon, M., Dias, C. R. B. and Cordeiro, G. M. (2013), The Compound Class of Extended Weibull Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **58**, 352-367.

Tahmasebi, S. and Jafari, A. A. (2016), Generalized Gompertz-Power Series Distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **45**, 1579-1604.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.

Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley, New York.

A Class of Bivariate Generalized Gompertz-Power Series Distributions

Roozegar, R., Jafari, A. A.

Department of Statistics, Yazd University, Yazd , Iran.

Abstract: In this paper, we introduce a family of bivariate generalized Gompertz-power series distributions. This new class of bivariate distributions contains several models such as: bivariate generalized Gompertz -geometric, -Poisson, - binomial, -logarithmic, -negative binomial and bivariate generalized exponental-power series distributions as special cases. We express the method of construction and derive different properties of the proposed class of distributions. The method of maximum likelihood and EM algorithm are used for estimating the model parameters. Finally, we illustrate the usefulness of the new distributions by means of application to real data sets.

Keywords: Bivariate generalized Gompertz distribution, EM algorithm, Maximum likelihood estimation, Power series class of distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62E15, 62H10, 62F10.