

# کلاسی از توزیع‌های دو متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی

رسول روزگار، علی اکبر جعفری

گروه آمار، دانشگاه یزد

چکیده: در این مقاله، به معرفی خانواده توزیع‌های دو متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی پرداخته می‌شود. این کلاس جدید از توزیع‌های دو متغیره شامل چندین مدل مانند توزیع دو متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی، پواسون، دوجمله‌ای، لگاریتمی و دوجمله‌ای منفی و توزیع دو متغیره نمایی تعمیم‌یافته است. نحوه ساختن و ویژگی‌های این کلاس از توزیع‌های دو متغیره ارائه شده و روند برآوردیابی برای پارامترهای مدل با روش‌های ماکسیمم درست‌نمایی و الگوریتم EM بحث می‌شود. در نهایت دو کاربرد از داده‌های واقعی برای برازش این مدل و مفید نشان دادن آن ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع دو متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته، الگوریتم EM، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی، کلاس توزیع‌های سری توانی.

## ۱ مقدمه

مدل‌بندی داده‌های طول عمر یکی از جنبه‌های مهم از کارهای آماری در زمینه‌های مختلفی از علوم و تحقیقات محسوب می‌شود. در این زمینه توزیع‌های آماری یک متغیره، بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است ولی توزیع‌های

<sup>۱</sup> آدرس الکترونیک مسئول مقاله: رسول روزگار، rroozegar@yazd.ac.ir

<sup>۲</sup> کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10, 62H10, 62E15

آماري دو و چند متغیره به دليل محاسبات نسبتا پیچیده کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته در چند سال اخیر مورد توجه نویسندگان متعددی قرار گرفته است. این روش منجر به تعریف توزیع‌های جدیدی می‌شود که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار بوده و از لحاظ کاربرد برآزش مناسب‌تر و واقعی‌تری را روی داده‌ها ارائه می‌دهند. **مارشال و الکین (۱۹۹۷)** کلاسی از توزیع‌ها را معرفی کردند که بوسیله کمینه یا بیشینه متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با اندازه نمونه تصادفی دارای توزیع هندسی ساخته می‌شود. **بارتو-سوزا و همکاران (۲۰۱۱)** نیز با ترکیب توزیع وایبول و هندسی توزیع جدیدی را به همین نام (وایبول-هندسی) ساختند. **سیلوا و همکاران (۲۰۱۳)** کلاسی از توزیع‌های یک متغیره را معرفی کردند که از ترکیب کردن توزیع وایبول تعمیم‌یافته و توزیع سری توانی به دست می‌آید و ویژگی‌های مختلف این کلاس را مورد بررسی قرار دادند. این تلاش‌ها در ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته مهم از قبیل هندسی، پواسون، لگاریتمی و دوجمله‌ای که حالت‌های خاصی از توزیع سری توانی هستند استوار است. به عنوان مثال **آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸)** توزیع نمایی-هندسی، **کاس (۲۰۰۷)** توزیع نمایی-پواسون، **طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸)** توزیع نمایی-لگاریتمی، **چهنکندی و گنجعلی (۲۰۰۹)** توزیع نمایی-سری توانی، **مورایس و بارتو-سوزا (۲۰۰۷)** توزیع وایبول-سری توانی، **محمودی و جعفری (۲۰۱۲)** توزیع نمایی تعمیم‌یافته-سری توانی، **محمودی و جعفری (۲۰۱۷)** توزیع نرخ خطر خطی-سری توانی، **طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶)** توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی و **روزگار و ناداراجا (۲۰۱۷)** توزیع نرخ خطر درجه دو-سری توانی را تعریف کردند.

توزیع گومپرتز که تعمیمی از توزیع نمایی است اغلب برای برآزش روی داده‌های علوم مختلف از جمله کامپیوتر، بازاریابی، زیست‌شناسی و بیمه مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیرا **الگوهری و همکاران (۲۰۱۳)** به معرفی توزیع سه پارامتری گومپرتز تعمیم‌یافته (GG) و ارائه برخی ویژگی‌های مرتبط با آن پرداخته‌اند. تابع توزیع و تابع چگالی این توزیع به ترتیب به صورت

$$F_{GG}(x; \alpha, \lambda, \gamma) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^\alpha, \quad \alpha, \gamma, \lambda > 0; x \geq 0, \quad (1)$$

$$f_{GG}(x; \alpha, \lambda, \gamma) = \alpha \lambda e^{\gamma x} e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^{\alpha-1}. \quad (2)$$

هستند. توزیع GG یک توزیع انعطاف‌پذیر است که می‌تواند بر روی داده‌های چوله نیز برآزش داده شود. حالت‌های خاص این توزیع عبارتند از: توزیع نمایی تعمیم‌یافته (**گوپتا و کوندو، ۱۹۹۹**) وقتی  $\gamma \rightarrow 0^+$ ، توزیع گومپرتز وقتی  $\alpha = 1$  و توزیع نمایی وقتی  $\alpha = 1$  و  $\gamma \rightarrow 0^+$ .

الشریپانی و همکاران (۲۰۱۳) توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته (BGG) را معرفی کردند که توزیع های حاشیه ای آن، گومپرتز تعمیم یافته است. این توزیع دومتغیره هم دارای بخش پیوسته مطلق<sup>۱</sup> و هم دارای بخش منفرد<sup>۲</sup> است و تابع توزیع توام این مدل به صورت

$$F_{BGG}(x_1, x_2) = (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_1} - 1)})^{\alpha_1} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_2} - 1)})^{\alpha_2} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma z} - 1)})^{\alpha_3}$$

است، که در آن  $z = \min(x_1, x_2)$ .

در این مقاله، توزیع BGG با کلاس توزیع سری توانی (PS) ترکیب شده و یک کلاس جدید از توزیع های دومتغیره تحت عنوان خانواده توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته-سری توانی (BGGPS) معرفی می شود. روند ترکیب کردن مشابه با روش ساختن توزیع دومتغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) و کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) است. این مدل دارای شش پارامتر است که از انعطاف پذیری بالایی برخوردار است و توزیع های حاشیه ای آن، توزیع گومپرتز تعمیم یافته-سری توانی معرفی شده توسط طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) هستند. تابع چگالی توام این مدل دارای شکل های مختلفی است، بنابراین این مدل می تواند به طور موثری در تحلیل داده های چوله دومتغیره و داده های دم سنگین دومتغیره بکار رود. حالت های خاص این مدل، توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته-هندسی (BGGG)، توزیع BGG و برخی توزیع های دومتغیره دیگر است. در ادامه ویژگی های مختلفی از این توزیع دومتغیره استخراج می شود و در ادامه الگوریتم EM برای به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درست نمایی (MLE) پارامترهای مدل ارائه می شود.

در بخش ۲ توزیع BGGPS را معرفی کرده و ویژگی های مختلف آن بررسی می شود. در بخش ۳ برخی حالت های خاص مورد بررسی قرار می گیرد. برآورد پارامترهای مدل در بخش ۴ انجام می شود. در نهایت، در بخش ۵ دو مجموعه داده واقعی تحلیل می شوند.

## ۲ مدل BGGPS

فرض کنید متغیر تصادفی گسسته  $N$  دارای توزیع سری توانی، بریده شده در صفر، با تابع جرم احتمال

$$P(N = n) = \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

<sup>۱</sup> Absolutely Continuous

<sup>۲</sup> Singular

است، که در آن  $a_n \geq 0$ ،  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n < \infty$ ،  $A(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n < \infty$ ،  $\theta \in (0, s)$  و  $s \in (0, \infty)$ . برخی ویژگی‌های توزیع سری توانی را می‌توان در **نواک (۱۹۵۰)** مشاهده کرد. جدول ۱ برخی حالت‌های خاص توزیع سری توانی (بریده شده در صفر) شامل توزیع‌های هندسی، پواسون، لگاریتمی، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی را نشان می‌دهد. در اینجا منظور از  $A'(\theta)$  و  $A''(\theta)$  به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم  $A(\theta)$  نسبت به پارامتر  $\theta$  است.

جدول ۱: کمیت‌های مهم برای برخی توزیع‌های سری توانی.

کمیت	هندسی	پواسون	لگاریتمی	دوجمله‌ای	دوجمله‌ای منفی
$a_n$	۱	$n!^{-1}$	$n^{-1}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{k-1}{n-1}$
$A(\theta)$	$\theta(1-\theta)^{-1}$	$e^\theta - 1$	$-\log(1-\theta)$	$(1+\theta)^k - 1$	$\frac{\theta^k}{(1-\theta)^{k+1}}$
$A'(\theta)$	$(1-\theta)^{-2}$	$e^\theta$	$(1-\theta)^{-1}$	$\frac{k}{(\theta+1)^{1-k}}$	$\frac{k\theta^{k-1}}{(1-\theta)^{k+1}}$
$A''(\theta)$	$2(1-\theta)^{-3}$	$e^\theta$	$(1-\theta)^{-2}$	$\frac{k(k-1)}{(\theta+1)^{2-k}}$	$\frac{k(k+2\theta-1)}{\theta^{2-k}(1-\theta)^{k+2}}$
$s$	۱	$\infty$	۱	$\infty$	۱

تابع توزیع و تابع چگالی کلاس توزیع‌های یک متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی (GGPS) (طهماسبی و جعفری، ۲۰۱۶) به ترتیب عبارتند از

$$F_{GGPS}(x; \alpha, \lambda, \gamma, \theta) = \frac{A(\theta(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^\alpha)}{A(\theta)}, \quad x \geq 0, \quad (3)$$

$$f_{GGPS}(x; \alpha, \lambda, \gamma, \theta) = \frac{\alpha\theta\lambda}{A(\theta)} e^{\gamma x} e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^{\alpha-1} \times A'(\theta(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^\alpha). \quad (4)$$

فرض کنید  $\{(X_{1n}, X_{2n}); n = 1, 2, \dots\}$  یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک  $F_{BGG}$  است. در اینجا  $N$  را متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از  $(X_{1i}, X_{2i})$  در نظر می‌گیریم، همچنین فرض کنید  $Y_i = \max\{X_{i1}, \dots, X_{iN}\}$  برای  $i = 1, 2$ . در این مقاله توزیع توام  $Y = (Y_1, Y_2)$  را توزیع BGGPS نامیده و با نماد  $BGGPS(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۲. اگر  $Y$  دارای توزیع BGGPS باشد آنگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} f_1(y_1, y_2) & \circ < y_1 < y_2 \\ f_2(y_1, y_2) & \circ < y_2 < y_1 \\ f_\circ(y) & \circ < y_1 = y_2 = y, \end{cases} \quad (5)$$

است که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \frac{\theta}{A(\theta)} f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) A''(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)) \\ &+ A'(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} f_2(y_1, y_2) &= \frac{\theta}{A(\theta)} f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) \\ &\times F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) A''(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)) \\ &+ A'(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_\circ(y) &= \frac{\theta \alpha_3}{A(\theta) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times A'(\theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)). \end{aligned} \quad (8)$$

برهان: با استفاده از تابع توزیع  $Y$  داریم:

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, y_2) &= P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2 | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{BGG}^n(y_1, y_2) \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \\ &= \frac{A(\theta F_{BGG}(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma))}{A(\theta)} \\ &= \begin{cases} \frac{A(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))}{A(\theta)} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{A(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))}{A(\theta)} & y_1 > y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

تساوی دوم در رابطه فوق با استفاده از قانون احتمال کل با شرطی کردن روی  $N$  حاصل می‌شود. تساوی سوم و چهارم به ترتیب طبق تعریف تابع توزیع و تعریف توزیع سری توانی به دست می‌آید. در نهایت تساوی آخر نیز

با استفاده از تعریف توزیع BGG حاصل می‌شود. بنابراین، تابع چگالی  $Y$  با استفاده از دو بار مشتق‌گیری و

$$\text{رابطه } f_Y(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_Y(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \text{ حاصل می‌گردد.}$$

گزاره ۲.۲. اگر  $(Y_1, Y_2)$  دارای توزیع  $BGGPS(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  باشد، آنگاه

الف: متغیر تصادفی  $Y_i$ ، دارای توزیع  $GGPS(\alpha_i + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  است.

ب: متغیر تصادفی  $V = \max(Y_1, Y_2)$  دارای توزیع  $GGPS(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  است.

ج: اگر  $A(\theta) = \theta$  آنگاه  $(Y_1, Y_2)$  دارای توزیع  $BGG(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma)$  است.

$$\text{د: } P(Y_1 < Y_2) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

$$\text{د: } k = \min \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\} \text{ که } \lim_{\theta \rightarrow 0^+} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = (F_{BGG}(y_1, y_2))^k$$

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از ارتباط بین تابع توزیع حاشیه‌ای و تابع توزیع توام استفاده

کنیم. برای اثبات قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) = P(\max(Y_1, Y_2) \leq v) = P(Y_1 \leq v, Y_2 \leq v) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 \leq v, Y_2 \leq v | N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_{X_1, X_2}(v, v))^n P(N = n) \\ &= \frac{A(\theta(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma v} - 1)})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3})}{A(\theta)}, \end{aligned}$$

که این توزیع  $GGPS(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  است. قسمت (ج) نیز با جایگذاری  $A(\theta) = \theta$  در توزیع

دومتغیره BGGPS حاصل می‌شود. برای اثبات قسمت (د) نیز داریم:

$$\begin{aligned} P(Y_1 < Y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 < Y_2, N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \int_0^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} f_{1n}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \times \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \\ &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}. \end{aligned}$$

برای قسمت (۵) با برقرار دادن  $k = \min \{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$  داریم

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n (F_{X_1, X_2}(y_1, y_2))^n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{a_k (F_{X_1, X_2}(y_1, y_2))^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \theta^{n-k} (F_{X_1, X_2}(y_1, y_2))^n}{a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \theta^{n-k}} \\ &= (F_{BGG}(y_1, y_2))^k. \end{aligned}$$

گزاره ۳.۲. فرض کنید  $(Y_1, Y_2)$  دارای توزیع  $BGGPS(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$  است و  $p_n = \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)}$

در این صورت

الف:

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_{BGG}(y_1, y_2; n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3, \lambda, \gamma).$$

ب: برای تابع چگالی  $(Y_1, Y_2)$  در (۵) داریم:

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{GG}(y_1; n(\alpha_1 + \alpha_3), \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; n\alpha_2, \lambda, \gamma), \\ f_2(y_1, y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{GG}(y_1; n\alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; n(\alpha_2 + \alpha_3), \lambda, \gamma), \\ f_0(y) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{GG}(y; n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \lambda, \gamma), \end{aligned}$$

که در آن  $f_{GG}(\cdot; \alpha, \lambda, \gamma)$  تابع چگالی احتمال توزیع GG با پارامترهای  $(\alpha, \lambda, \gamma)$  است.

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از قانون احتمال کل استفاده کرده و تابع توزیع توام  $(Y_1, Y_2)$

روی متغیر تصادفی  $N$  شرطی شود. برای اثبات قسمت (ب) نیز کافی است دو مرتبه از تابع توزیع توام ارائه

شده در قسمت (الف) مشتق‌گیری و از روابط (۶)، (۷) و (۸) استفاده شود.

گزاره ۴.۲. تابع چگالی احتمال توام  $BGGPS$  را می‌توان به صورت

$$f_Y(y_1, y_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} f_a(y_1, y_2) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} f_s(y),$$

نوشت که در آن

$$f_a(y_1, y_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} \begin{cases} f_1(y_1, y_2) & y_1 < y_2 \\ f_2(y_1, y_2) & y_2 < y_1, \end{cases}$$

$$f_s(y) = \frac{\theta}{A(\theta)} f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)$$

$$\times A'(\theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)) \quad y_1 = y_2 = y,$$

و جاهای دیگر نیز صفر است. واضح است که  $f_a(\cdot, \cdot)$  بخش پیوسته مطلق و  $f_s(\cdot, \cdot)$  بخش منفرد تابع چگالی توام می‌باشد. بنابراین، اگر  $\alpha_3 = 0$  باشد، تابع چگالی احتمال توام مدل BGGPS قسمت منفرد ندارد و تبدیل به یک توزیع پیوسته مطلق می‌شود.

برهان: برای اثبات کافی است مشابه با نتایج کوندو و گوپتا (۲۰۱۴)، با جایگذاری  $f_a(y_1, y_2)$  و  $f_s(y)$  در سمت راست تساوی فوق استفاده شود.

همان‌گونه که در ابتدای بخش ۲ بیان گردید حجم نمونه یک متغیر تصادفی گسسته  $N$  در نظر گرفته شد که دارای توزیع سری توانی است. در ادامه محاسبه  $E(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$  برای استفاده در بخش شبیه‌سازی به‌ویژه الگوریتم EM ارائه می‌شود.

**قضیه ۵.۲.** فرض کنید  $\{(X_{1n}, X_{2n}); n = 1, 2, \dots\}$  یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک  $F_{BGG}$  است. همچنین، فرض کنید  $Y_i = \max\{X_{i1}, \dots, X_{iN}\}$  برای  $i = 1, 2$  که  $N$  متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از  $(X_{1i}, X_{2i})$  است. در این صورت، امید ریاضی  $N$  به شرط  $Y_1 = y_1$  و  $Y_2 = y_2$  به صورت

$$E(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \begin{cases} \frac{B_1(y_1, y_2)}{k_1(y_1, y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{B_2(y_1, y_2)}{k_2(y_1, y_2)} & y_2 > y_1 \\ \frac{\theta A_\circ(y) A''(\theta A_\circ(y)) + A'(\theta A_\circ(y))}{k_\circ(y)} & y_1 = y_2 = y, \end{cases} \quad (9)$$

است، که در آن

$$B_i(y_1, y_2) = (\theta A_i(y_1, y_2))^{\gamma} A'''(\theta A_i(y_1, y_2))$$

$$+ \gamma \theta A_i(y_1, y_2) A''(\theta A_i(y_1, y_2)) + A'(\theta A_i(y_1, y_2)),$$



و  $A'''(\theta)$  مشتق سوم  $A(\theta)$  نسبت به پارامتر  $\theta$  است و

$$A_1(y_1, y_2) = F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma),$$

$$A_2(y_1, y_2) = F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma),$$

$$A_0(y) = F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma).$$

و

$$\begin{aligned} k_1(y_1, y_2) &= \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) \\ &\times A''(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)) \\ &+ A'(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(y_1, y_2) &= \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times A''(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)) \\ &+ A'(\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)), \end{aligned}$$

$$k_0(y) = A'(\theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)).$$

برهان: بردار تصادفی  $(Y_1, Y_2)$  به شرط  $N = n$  دارای توزیع  $BGG(n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3, \lambda, \gamma)$  است.

بنابراین، تابع چگالی توام  $(Y_1, Y_2, N)$  عبارتست از

$$f_{Y_1, Y_2, N}(y_1, y_2, n) = \begin{cases} \frac{\alpha_n \theta^n}{A(\theta)} f_{1n}(y_1, y_2) & y_1 < y_2 \\ \frac{\alpha_n \theta^n}{A(\theta)} f_{2n}(y_1, y_2) & y_2 < y_1 \\ \frac{\alpha_n \theta^n}{A(\theta)} f_{0n}(y) & y_1 = y_2 = y, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_{1n}(y_1, y_2) &= n^\gamma \lambda^\gamma e^{\gamma y_1 + \gamma y_2} (\alpha_1 + \alpha_3) \alpha_2 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1} + e^{\gamma y_2} - 2)} \\ &\times (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1} - 1)})^{n(\alpha_1 + \alpha_3) - 1} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2} - 1)})^{n\alpha_2 - 1}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2n}(y_1, y_2) &= n^\gamma \lambda^\gamma e^{\gamma y_1 + \gamma y_2} (\alpha_2 + \alpha_3) \alpha_1 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1} + e^{\gamma y_2} - 2)} \\ &\times (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1} - 1)})^{n\alpha_1 - 1} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2} - 1)})^{n(\alpha_2 + \alpha_3) - 1}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$f_{0n}(y) = n \lambda e^{\gamma y} \alpha_3 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y} - 1)} (1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y} - 1)})^{n(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 1}. \quad (12)$$

تابع جرم احتمال شرطی  $N$  به شرط  $Y_1 = y_1$  و  $Y_2 = y_2$  نیز برابر است با

$$f_{N|Y_1, Y_2}(n|y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{n^{\gamma} a_n (\theta A_1(y_1, y_2))^{n-1}}{k_1(y_1, y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{n^{\gamma} a_n (\theta A_2(y_1, y_2))^{n-1}}{k_2(y_1, y_2)} & y_2 < y_1 \\ \frac{n a_n (\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y, \end{cases}$$

با استفاده از تعریف امید ریاضی  $N$  به شرط  $Y_1 = y_1$  و  $Y_2 = y_2$  و سپس استفاده از عبارات‌های

$$\theta^{\gamma} A'''(\theta) + \gamma \theta A''(\theta) + A'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} a_n \theta^{n-1},$$

$$\theta A''(\theta) + A'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} a_n \theta^{n-1}, \quad A'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \theta^{n-1},$$

و در نهایت با استفاده از تعریف  $B_1(y_1, y_2)$  و  $B_2(y_1, y_2)$  داریم:

$$E(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{N|Y_1, Y_2}(n|y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} a_n (\theta A_1(y_1, y_2))^{n-1}}{k_1(y_1, y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} a_n (\theta A_2(y_1, y_2))^{n-1}}{k_2(y_1, y_2)} & y_2 > y_1 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma} a_n (\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y, \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$E(N|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) = \begin{cases} \frac{B_1(y_1, y_2)}{k_1(y_1, y_2)} & y_1 < y_2 \\ \frac{B_2(y_1, y_2)}{k_2(y_1, y_2)} & y_2 > y_1 \\ \frac{\theta A_0(y) A''(\theta A_0(y)) + A'(\theta A_0(y))}{k_0(y)} & y_1 = y_2 = y. \end{cases}$$

و اثبات کامل می‌شود.

### ۳ حالت‌های خاص توزیع BGGPS

در این بخش با توجه به جدول ۱، چند حالت خاص توزیع BGGPS در نظر گرفته می‌شود و به ازای ۱، ۲،

$$t_i = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}$$

فرض می‌شود

### ۱.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته دوجمله-ای

توزیع دوجمله‌ای (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن  $a_n = \binom{k}{n}$  و  $A(\theta) = 1 - (\theta + 1)^k$  برای  $\theta > 0$  است به طوری که  $k$  تعداد تکرارهای آزمایش است. بنابراین تابع توزیع دومتغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته دوجمله-ای (BGGB) عبارتست از

$$F_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\{\theta t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2} + 1\}^k - 1}{(\theta + 1)^k - 1} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{\{\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3} + 1\}^k - 1}{(\theta + 1)^k - 1} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \frac{k\theta}{(\theta + 1)^k - 1} f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_2, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) \\ &\times [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_2, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) + 1]^{k-2} \\ &\times [k\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_2, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) + 1], \\ f_2(y_1, y_2) &= \frac{k\theta}{(\theta + 1)^k - 1} f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) + 1]^{k-2} \\ &\times [k\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) + 1], \\ f_0(y) &= \frac{k\theta\alpha_2 f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{[(\theta + 1)^k - 1](\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} [\theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) + 1]^{k-1}. \end{aligned}$$

### ۲.۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته-هندسی

توزیع هندسی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی است با قرار دادن  $a_n = 1$  و  $A(\theta) = \frac{\theta}{1-\theta}$  برای  $0 < \theta < 1$ . بنابراین، تابع توزیع توام توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته هندسی (BGGB) عبارتست از

$$F_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{(1-\theta)t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2}}{1 - \theta t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2}} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{(1-\theta)t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3}}{1 - \theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3}} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= (1 - \theta) f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) \\ &\times \frac{1 + \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)}{(1 - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))^3}, \\ f_2(y_1, y_2) &= (1 - \theta) f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times \frac{1 + \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{(1 - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^3}, \\ f_0(y) &= \frac{(1 - \theta) \alpha_3 f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) (1 - \theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^3}. \end{aligned}$$

توجه ۱.۳. هنگامی که  $\theta^* = 1 - \theta$  توزیع BGGG به توزیع دو متغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) تبدیل می‌شود.

### ۳.۳ توزیع دو متغیره گومپرتز تعمیم یافته-پواسون

توزیع پواسون بریده شده در صفر حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن  $a_n = \frac{1}{n!}$  و  $A(\theta) = e^\theta - 1$  برای  $\theta > 0$  است. بنابراین، تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته پواسون (BGGP) عبارتست از

$$F_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\exp(\theta t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2}) - 1}{\exp(\theta) - 1} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{\exp(\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3}) - 1}{\exp(\theta) - 1} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \theta f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) \\ &\times e^{\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)} \\ &\times [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) + 1], \\ f_2(y_1, y_2) &= \theta f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times e^{\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)} \\ &\times [\theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) + 1], \\ f_0(y) &= \frac{\theta \alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times e^{\theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}. \end{aligned}$$

### ۴.۳ توزیع دو متغیره گومپرتز تعمیم یافته-لگاریتمی

توزیع لگاریتمی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن  $a_n = \frac{1}{n}$  و  $A(\theta) = -\log(1-\theta)$  برای  $0 < \theta < 1$  است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته لگاریتمی (BGGL) عبارتست از

$$F_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\log(1-\theta t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2})}{\log(1-\theta)} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{\log(1-\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3})}{\log(1-\theta)} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \frac{-\theta f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_2, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta) (1 - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_2, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))^2}, \\ f_2(y_1, y_2) &= \frac{-\theta f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta) (1 - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^2}, \\ f_0(y) &= \frac{-\theta \alpha_2 f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{\log(1-\theta) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) (1 - \theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))}. \end{aligned}$$

### ۵.۳ توزیع دو متغیره گومپرتز تعمیم یافته-دوجمله-ای منفی

توزیع دوجمله-ای منفی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن  $a_n = \binom{n-1}{k-1}$  و  $A(\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^k$  برای  $0 < \theta < 1$  است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته دوجمله-ای منفی (BGGNB) عبارتست از

$$F_Y(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{(1-\theta)^k t_1^{k(\alpha_1 + \alpha_2)} t_2^{k\alpha_2}}{(1-\theta t_1^{\alpha_1 + \alpha_2} t_2^{\alpha_2})^k} & y_1 \leq y_2 \\ \frac{(1-\theta)^k t_1^{k\alpha_1} t_2^{k(\alpha_2 + \alpha_3)}}{(1-\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2 + \alpha_3})^k} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned}
 f_1(y_1, y_2) &= \frac{k(\lambda - \theta)^k f_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)}{(\lambda - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))^{k+\gamma}} \\
 &\times (F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma))^{k-1} \\
 &\times [k + \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)], \\
 f_2(y_1, y_2) &= \frac{k(\lambda - \theta)^k f_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{(\lambda - \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^{k+\gamma}} \\
 &\times (F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^{k-1} \\
 &\times [k + \theta F_{GG}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{GG}(y_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)], \\
 f_\circ(y) &= \frac{k\alpha_3(\lambda - \theta)^k f_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\lambda - \theta F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^{k+1}} \\
 &\times (F_{GG}(y; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma))^{k-1}.
 \end{aligned}$$

#### ۴ برآورد پارامترهای توزیع BGGPS

ابتدا به برآورد پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی پرداخته می‌شود (کوندو و گوپتا، ۲۰۱۴). فرض کنید  $(y_{m1}, y_{m2}), \dots, (y_{11}, y_{12})$  یک نمونه مشاهده شده به اندازه  $m$  از توزیع BGGPS با پارامترهای  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)'$  است. همچنین، فرض کنید

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \{i : y_{1i} = y_{2i} = y_i\}, & I_1 &= \{i : y_{1i} < y_{2i}\}, & I_2 &= \{i : y_{1i} > y_{2i}\}, \\
 m_0 &= |I_0|, & m_1 &= |I_1|, & m_2 &= |I_2|, & m &= m_0 + m_1 + m_2.
 \end{aligned}$$

بنابراین، تابع درستنمایی را می‌توان به صورت

$$L(\Theta) = \prod_{i \in I_0} f_\circ(y_i) \prod_{i \in I_1} f_1(y_{1i}, y_{2i}) \prod_{i \in I_2} f_2(y_{1i}, y_{2i}),$$

نوشت و تابع لگاریتم درستنمایی نیز به صورت

$$\ell(\Theta) = \sum_{i \in I_0} \log(f_\circ(y_i)) + \sum_{i \in I_1} \log(f_1(y_{1i}, y_{2i})) + \sum_{i \in I_2} \log(f_2(y_{1i}, y_{2i})),$$

حاصل می‌شود، که در آن  $f_1, f_2$  و  $f_\circ$  به ترتیب در (۶)، (۷) و (۸) ارائه شده‌اند. نمی‌توان عبارت صریحی برای برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به دست آورد و نیازمند حل شش معادله غیرخطی به‌طور همزمان است.

با استفاده از برخی از دستورها مانند دستور `nlminb` در نرم افزار R می توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را به روش عددی به دست آورد که نیازمند مقادیر اولیه است که نتایج به این مقادیر حساس هستند. بنابراین، در ادامه یک الگوریتم امید-ماکسیمم سازی<sup>۳</sup> (EM) برای یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها ارائه می شود. این روش توسط بسیاری از نویسندگان از جمله کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) نیز استفاده شده است. برای  $n$  داده شده، فرض کنید که متغیرهای تصادفی مستقل  $\{Z_i | N = n\}$ ،  $i = 1, 2, 3$  دارای توزیع

GG با پارامترهای  $(n\alpha_i, \lambda, \gamma)$  هستند. بدیهی است که

$$\{Y_1 | N = n\} = \max(Z_1, Z_2) | N = n, \quad \{Y_2 | N = n\} = \max(Z_2, Z_3) | N = n.$$

برای بردار تصادفی دومتغیره، می توان یک بردار تصادفی وابسته به صورت

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 0 & \text{if } Y_1 = Z_1 \\ 1 & \text{if } Y_1 = Z_2 \end{cases} \quad \Lambda_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } Y_2 = Z_2 \\ 1 & \text{if } Y_2 = Z_3. \end{cases}$$

در نظر گرفت. توجه شود که اگر  $Y_1 = Y_2$  آنگاه  $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$ . ولی اگر  $Y_1 < Y_2$  یا  $Y_1 > Y_2$  آنگاه  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  قابل تشخیص نیست. تمام ترتیب های ممکنه  $Z_i$  ها، مقادیر  $(Y_1, Y_2)$  و  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  و احتمال های متناظر آنها در جدول ۲ آورده شده اند.

جدول ۲: تمام ترتیب های ممکنه  $Z_i$  ها، مقادیر  $(Y_1, Y_2)$  و  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  و احتمال های متناظر آنها.

حالت	ترتیب های ممکنه	$Y_1$	$Y_2$	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	احتمال	مجموعه
۱	$Z_1 < Z_2 < Z_3$	$Z_3$	$Z_3$	۱	۱	$\frac{\alpha_2 \alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_0$
۲	$Z_2 < Z_1 < Z_3$	$Z_3$	$Z_3$	۱	۱	$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_0$
۳	$Z_1 < Z_3 < Z_2$	$Z_3$	$Z_2$	۰	۱	$\frac{\alpha_2 \alpha_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_1$
۴	$Z_3 < Z_1 < Z_2$	$Z_1$	$Z_2$	۰	۰	$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_1$
۵	$Z_2 < Z_3 < Z_1$	$Z_1$	$Z_3$	۰	۱	$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_2$
۶	$Z_3 < Z_2 < Z_1$	$Z_1$	$Z_2$	۰	۰	$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}$	$I_2$

ابتدا، تابع شبه لگاریتم درستنمایی شرطی با شرطی کردن روی  $N$  تشکیل داده می شود، سپس  $N$  با  $E(N|Y_1, Y_2)$  جایگذاری می گردد. برای ایجاد مرحله E الگوریتم EM بدین صورت عمل می شود: هنگامی

<sup>۳</sup>Expectation-Maximization

که مشاهدات در مجموعه  $I_0$  قرار داشته باشند کل مشاهدات استفاده می‌شوند. هنگامی که مشاهدات در مجموعه  $I_1$  قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن  $(y_1, y_2)$  به دو شبه مشاهده به صورت  $(y_1, y_2, u_1(\Theta))$  و  $(y_1, y_2, u_2(\Theta))$  ایجاد می‌شود به طوری که  $u_1(\Theta)$  و  $u_2(\Theta)$  احتمال‌های شرطی هستند، که در آن  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  به ترتیب مقادیر  $(1, 0)$  و  $(0, 1)$  اختیار می‌کند. بنابراین

$$u_1(\Theta) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3}, \quad u_2(\Theta) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}.$$

به طور مشابه، هنگامی که مشاهدات در مجموعه  $I_2$  قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن  $(y_1, y_2)$  به دو شبه مشاهده به صورت  $(y_1, y_2, v_1(\Theta))$  و  $(y_1, y_2, v_2(\Theta))$  ایجاد می‌شود، به طوری که  $v_1(\Theta)$  و  $v_2(\Theta)$  احتمال‌های شرطی هستند، که در آن  $(\Lambda_1, \Lambda_2)$  به ترتیب مقادیر  $(0, 1)$  و  $(1, 1)$  را اختیار می‌کند. بنابراین

$$v_1(\Theta) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad v_2(\Theta) = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

در ادامه  $u_1(\Theta)$ ,  $u_2(\Theta)$ ,  $v_1(\Theta)$  و  $v_2(\Theta)$  به اختصار با  $u_1, u_2, v_1$  و  $v_2$  نشان داده می‌شوند. مرحله E: فرض کنید  $b_i = E(N|y_{1i}, y_{2i}, \Theta)$ . تابع لگاریتم شبه درستنمایی بدون در نظر گرفتن مقدار ثابت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \ell_{\text{pseudo}}(\Theta) &= \log(\theta) \sum_{i=1}^m b_i - m \log(C(\theta)) + (2m - m_0) \log(\lambda) \\ &+ (m_1 u_1 + m_2) \log(\alpha_1) + (m_1 + m_2 v_1) \log(\alpha_2) \\ &+ (m_0 + m_1 u_2 + m_2 v_2) \log(\alpha_3) + \gamma \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (y_{1i} + y_{2i}) \\ &+ \gamma \sum_{i \in I_0} y_i - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_0} (e^{\gamma y_i} - 1) - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (e^{\gamma y_{1i}} + e^{\gamma y_{2i}} - 2) \\ &+ \alpha_1 \left( \sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \right) \\ &+ \alpha_2 \left( \sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) \right) \\ &+ \alpha_3 \left( \sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \right) \\ &+ \sum_{i \in I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) - \sum_{i \in I_0} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_i} - 1)}) \\ &- \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) - \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma} (e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) . \end{aligned}$$



مرحله M: در این مرحله،  $\ell_{\text{pseudo}}(\Theta)$  نسبت به پارامترها ماکسیم می‌شود. برای مقدار ثابت  $\lambda$  و  $\gamma$ ، ماکسیم نسبت به  $\alpha_1, \alpha_2$  و  $\alpha_3$  به صورت

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_1(\lambda, \gamma) &= \frac{m_1 u_1 + m_2}{\sum_{i \in I_0} b_i Q_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i Q_i}, \\ \hat{\alpha}_2(\lambda, \gamma) &= \frac{m_1 + m_2 v_1}{\sum_{i \in I_0} b_i Q_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i Q_i}, \\ \hat{\alpha}_3(\lambda, \gamma) &= \frac{m_0 + m_1 u_2 + m_2 v_2}{\sum_{i \in I_0} b_i Q_i + \sum_{i \in I_1} b_i Q_i + \sum_{i \in I_2} b_i Q_i},\end{aligned}\quad (13)$$

است، که در آن  $Q_i = \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)})$ . ماکسیم  $\ell_{\text{pseudo}}(\Theta)$  نسبت به  $\theta$ ، با حل معادله غیرخطی

$$\frac{\theta C'(\theta)}{C(\theta)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i. \quad (14)$$

نسبت به  $\theta$  به دست می‌آید. سرانجام، ماکسیم  $\ell_{\text{pseudo}}(\Theta)$  نسبت به  $\lambda$  و  $\gamma$ ، با ماکسیم کردن تابع شبه لگاریتم درستنمایی

$$\ell_{\text{pseudo}}(\hat{\alpha}_1(\lambda, \gamma), \hat{\alpha}_2(\lambda, \gamma), \hat{\alpha}_3(\lambda, \gamma), \lambda, \gamma, \theta),$$

به دست آورده می‌شود. الگوریتم ۱ می‌تواند برای محاسبه برآوردگرهای ماکسیم درستنمایی پارامترها براساس الگوریتم EM استفاده شوند:

الگوریتم ۱:

- گام ۱: یک مقدار اولیه برای  $\Theta$  در نظر گرفته شود، مثلاً  $\Theta^{(0)} = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \lambda^{(0)}, \gamma^{(0)}, \theta^{(0)})'$ .
- گام ۲: مقدار  $(\Theta^{(0)}) = E(N | y_{1i}, y_{2i}; \Theta^{(0)})$  با  $b_i$  استفاده از (۹) محاسبه شود.
- گام ۳: مقادیر  $u_1, u_2, v_1$  و  $v_2$  محاسبه می‌شوند.
- گام ۴: تابع شبه لگاریتم درستنمایی  $\ell_{\text{pseudo}}(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3^{(0)}, \lambda, \gamma, \theta^{(0)})$  نسبت به  $\lambda$  و  $\gamma$  ماکسیم شود و به ترتیب با  $\hat{\lambda}^{(1)}$  و  $\hat{\gamma}^{(1)}$  نشان داده شوند.
- گام ۵: مقدار  $\hat{\alpha}_i^{(1)} = \hat{\alpha}_i(\hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\gamma}^{(1)})$  بر اساس رابطه (۱۳) محاسبه شود.
- گام ۶: مقدار  $\hat{\theta}$  از حل معادله (۱۴) پیدا نموده و با  $\hat{\theta}^{(1)}$  نشان داده شود.
- گام ۷: مقدار  $\Theta^{(0)}$  با  $(\hat{\alpha}_1^{(1)}, \hat{\alpha}_2^{(1)}, \hat{\alpha}_3^{(1)}, \hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\gamma}^{(1)}, \hat{\theta}^{(1)}) = \Theta^{(1)}$  جایگذاری شود و مراحل تا زمانی که فرایند همگرا شود ادامه یابد.

## ۵ مثال‌های عددی

در این بخش توزیع BGGPS برای برازش به دو مجموعه داده‌های واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا شش زیرکلاس از این توزیع در نظر گرفته شده‌اند:

توزیع‌های دو متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته (BGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی (BGGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته-پواسون (BGPP)، گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله‌ای (BGGb) با  $k = 10$ ، گومپرتز تعمیم‌یافته-لگاریتمی (BGGL) و گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله‌ای منفی (BGGNB) با  $k = 2$ .

اولین مجموعه داده‌های دو متغیره در نظر گرفته شده در این مقاله، اولین بار توسط واشنگتن پست ارائه شده است (سزورگو و ولش، ۱۹۸۹). این داده‌ها مربوط به لیگ فوتبال آمریکا برای طی سه هفته متوالی مسابقات در سال ۱۹۸۶ است. در اینجا،  $Y_1$  نشان‌دهنده زمانی است که اولین امتیاز با ضربه به توپ حاصل شده است و  $Y_2$  نشان‌دهنده زمانی است که اولین امتیاز با انتقال توپ به آخر زمین حاصل شده است. تمام داده‌ها بر ۱۰۰ تقسیم شده‌اند. کوندو و گوپتا (۲۰۱۰)، جمالیزاده و کوندو (۲۰۱۳) و ال‌شرپانی و همکاران (۲۰۱۳) نیز این داده‌ها را مورد تحلیل قرار داده‌اند.

دومین مجموعه داده‌های دو متغیره مربوط به ۴۴ مورد تقاضا (درخواست خسارت) از بیمه حوادث موتورسیکلت تا انتهای سال ۱۳۹۴ است که شامل هزینه‌های صدمه به اموال ( $Y_1$ ) و هزینه‌های درمانی ( $Y_2$ ) است و توسط بیمه ایران گزارش شده است. این مجموعه داده‌ها در جدول ۳ گزارش شده است که تا نزدیک‌ترین ۱۰۰۰۰۰ واحد گرد شده و سپس بر این عدد تقسیم شده‌اند.

توزیع‌ها به مجموعه داده‌های دو متغیره برازش شده و برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی و مقادیر لگاریتم درست‌نمایی متناظر محاسبه شده‌اند. همچنین، انحرافات استاندارد (SE) بر اساس ماتریس اطلاع مشاهده به‌دست آمده‌اند. برای هر مدل برازش شده، معیار اطلاع آکائیکی (AIC)، معیار اطلاع آکائیکی اصلاح‌شده (AICC) و معیار اطلاع بی‌زی (BIC) نیز محاسبه شده‌اند. از آنجایی که آماره کلموگروف-اسمیرنوف (K-S) برای حالت یک متغیره استفاده می‌شود p-مقدارهای متناظر این آماره برای  $Y_1$ ،  $Y_2$  و  $V = \max(Y_1, Y_2)$  محاسبه شده‌اند. سرانجام، آزمون نسبت درست‌نمایی (LRT) و p-مقدارهای متناظر برای آزمون مناسب بودن توزیع BGG در مقابل سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت. نتایج در جداول ۴ و ۵ آورده شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که تمام مدل‌ها برای این دو مجموعه داده‌ها مناسب هستند.

جدول ۳: تعداد تقاضاهای بیمه حوادث موتور سیکلت از شرکت بیمه.

۵۳۵	۳۸۰	۱۳۴	۴۱۱	۳۴۳	۵۵۰	۵۴۶	۱۴۴	۴۲۸	۸۹۰	۵۰۰	Y <sub>1</sub>
۲۰۶	۲۲۶	۹۴۵	۱۹۲	۱۶۱	۱۳۲	۲۸۶	۱۹۳	۲۷۲	۲۹۲	۱۶۸	Y <sub>2</sub>
۷۲۰	۲۳۰	۳۷۴	۱۷۵	۲۵۲	۳۰۰	۶۶۵	۱۹۹	۴۱۲	۶۲۰	۴۹۱	Y <sub>1</sub>
۴۰۰	۷۸۴	۸۸۱	۱۷۵	۵۲۲	۴۱۷	۴۵۶	۲۴۳	۱۹۸	۱۸۳	۶۸۴	Y <sub>2</sub>
۲۰۵	۱۹۲	۱۹۸	۱۱۴	۳۳۵	۴۹۹	۱۶۰	۲۲۴	۳۲۳	۷۰۶	۴۷۰	Y <sub>1</sub>
۱۲۲	۱۱۴	۱۷۱	۳۸۹	۸۰۷	۴۷۹	۳۴۲	۳۴۹	۱۰۳	۲۲۲	۵۷۰	Y <sub>2</sub>
۳۳۵	۱۷۱	۵۲۹	۵۵۰	۳۸۰	۵۰۰	۴۲۳	۳۹۸	۳۰۶	۳۶۸	۴۷۶	Y <sub>1</sub>
۲۶۴	۹۹۹	۲۰۲	۱۰۷	۲۶۷	۱۹۸	۳۷۵	۹۷۶	۱۸۹	۱۶۵	۲۷۴	Y <sub>2</sub>

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله خانواده‌ای از توزیع‌های جدیدی، تحت عنوان خانواده توزیع‌های دو متغیره گومپرتر تعمیم یافته-سری توانی معرفی شد. این کلاس جدید از توزیع‌های دو متغیره شامل چندین مدل دیگر است که به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفتند. چندین ویژگی از توزیع مانند تابع چگالی احتمال توام و شرطی، توابع توزیع حاشیه‌ای و امید ریاضی شرطی محاسبه شد. پس از برآورد پارامترهای این مدل، برای نشان دادن میزان انعطاف‌پذیری و توانمندی این توزیع دو متغیره، از دو سری داده واقعی برای برازش مدل استفاده گردید. با توجه به نتایج حاصله از مقایسه در بخش کاربردها می‌توان نتیجه گرفت که مدل جدید برای این مجموعه داده‌ها مناسب است و می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع‌های دو متغیره دیگر باشد.

## تقدیر و تشکر

مولفین لازم می‌دانند از داوران گرامی، سردبیر و اعضای هیات تحریریه محترم مجله که با نظرات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند. از دانشگاه یزد نیز بخاطر حمایت و پشتیبانی از این مقاله قدردانی می‌گردد.

جدول ۴: نتایج برای شش توزیع برآزش شده روی مجموعه داده‌های اول.

BGGNB	BGGL	BGGB	BGGP	BGGG	BGG	آماره
۰/۰۱۹۵	۰/۰۶۷۵	۰/۰۵۹۷	۰/۰۵۷۸	۰/۰۶۰۵	۰/۰۹۲۱	$\hat{\alpha}_1$
۰/۰۲۲۸	۰/۰۵۰۴	۰/۰۴۹۷	۰/۰۴۹۵	۰/۰۴۸۳	۰/۰۶۵۳	SE
۰/۱۳۲۵	۰/۴۷۲۰	۰/۳۹۸۸	۰/۳۸۹۶	۰/۴۱۹۷	۰/۵۷۲۲	$\hat{\alpha}_2$
۰/۱۲۳۶	۰/۱۵۸۶	۰/۲۰۴۰	۰/۲۱۱۲	۰/۱۷۹۸	۰/۱۶۱۴	SE
۰/۲۴۲۱	۰/۸۳۳۱	۰/۷۴۰۹	۰/۷۱۷۲	۰/۷۴۷۱	۱/۱۵۱۹	$\hat{\alpha}_3$
۰/۲۳۱۳	۰/۲۶۳۴	۰/۳۵۸۱	۰/۳۷۴۶	۰/۳۱۹۳	۰/۲۳۸۸	SE
۱۱/۶۳۸۶	۱۲/۲۴۸۹	۱/۲۸۰۲	۱۱/۴۶۱۶	۱۲/۰۹۶۱	۹/۶۱۸۷	$\hat{\lambda}$
۲/۰۲۷۲	۲/۳۰۰۸	۱/۷۶۶۶	۱/۸۱۵۹	۲/۱۹۰۰	۱/۵۵۹۰	SE
۱/۳e-۱۲	۱/۵e-۱۲	۱/۲e-۱۲	۱/۱e-۱۲	۱/۳e-۱۲	۲/۱e-۱۲	$\hat{\gamma}$
۰/۱۱۴۰	۰/۰۹۶۲	۰/۱۰۰۸	۰/۱۰۶۰	۰/۰۵۹۴	۰/۰۴۵۵	SE
۰/۷۱۸۶	۰/۸۰۵۳	۰/۲۳۲۵	۱/۹۹۳۰	۰/۶۱۲۸	—	$\hat{\theta}$
۰/۳۱۳۷	۰/۱۷۸۱	۰/۲۰۷۴	۱/۶۱۰۵	۰/۲۳۵۴	—	SE
۳۸/۱۷۲	۳۸/۳۵۸	۳۸/۱۶۶	۳۸/۲۳۲۸	۳۸/۳۶۳	۳۶/۶۷۰	$\log(\ell)$
-۶۴/۳۴۴	-۶۴/۷۱۶	-۶۴/۳۳۲	-۶۴/۴۶۵	-۶۴/۷۲۵	-۶۳/۳۴۰	AIC
-۶۱/۹۴۴	-۶۲/۳۱۶	-۶۱/۹۳۲	-۶۲/۰۶۵	-۶۲/۳۲۵	-۶۱/۶۷۳	AICC
-۵۳/۹۱۸	-۵۴/۲۹۰	-۵۳/۹۰۶	-۵۴/۰۳۹	-۵۴/۲۹۹	-۵۴/۶۵۱	BIC
۰/۱۰۰۱	۰/۱۰۷۱	۰/۱۰۱۶	۰/۱۰۰۵	۰/۱۰۲۸	۰/۱۲۸۲	مقدار $p$ -K-S ( $X_1$ )
۰/۲۶۸۱	۰/۳۳۲۱	۰/۲۶۸۸	۰/۲۶۷۹	۰/۲۹۵۳	۰/۳۴۰۸	مقدار $p$ -K-S ( $X_2$ )
۰/۳۲۹۲	۰/۴۱۶۵	۰/۳۲۶۲	۰/۳۲۷۱	۰/۳۶۸۵	۰/۳۹۲۹	مقدار $p$ -K-S ( $V$ )
۳/۰۰۴	۳/۳۷۶	۲/۹۹۲	۳/۱۲۶	۳/۳۸۶	—	LRT
۰/۰۸۳۰	۰/۰۶۶۱	۰/۰۸۳۶	۰/۰۷۷۰	۰/۰۶۵۷	—	مقدار $p$

جدول ۵: نتایج برای شش توزیع برازش شده روی مجموعه داده‌های دوم.

BGGNB	BGGL	BGGB	BGGP	BGGG	BGG	آماره
۲/۷۷۰۲	۵/۵۴۲۶	۵/۵۴۰۵	۵/۵۴۰۷	۵/۵۴۰۱	۵/۵۴۰۵	$\hat{\alpha}_1$
۲/۳۲۷	۱/۳۱۸	۱/۳۰۰	۱/۳۱۷	۱/۳۸۰	۱/۳۱۶	SE
۱/۷۹۶۵	۳/۵۹۴۳	۳/۵۹۳۴	۳/۵۹۱۸	۳/۵۹۲۹	۳/۵۹۳۱	$\hat{\alpha}_2$
۱/۲۵۱	۰/۸۶۲	۰/۸۶۹	۰/۸۶۲	۰/۸۳۲	۰/۸۶۲	SE
۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	$\hat{\alpha}_3$
۱/۱۱۵	۱/۱۴۲	۱/۰۶۴	۱/۱۷۱	۱/۱۴۲	۱/۱۴۰	SE
۵۸۳۹/۹۳	۵۸۴۱/۲۷	۵۸۴۰/۰۱۳	۵۸۳۹/۸۷۱	۵۸۳۹/۶۷۵	۵۸۳۹/۹۵۹	$\hat{\lambda}$
۷۲۷/۵۴۱	۷۳۶/۱۱۲	۷۲۶/۸۷۵	۷۳۵/۷۷۵	۷۷۱/۰۴۷	۷۳۵/۷۰۱	SE
۲.۲۵e-۰۵	۴.۰۷e-۰۵	۳.۱۲e-۰۶	۹.۹۳e-۰۶	۶.۴۱e-۰۵	۱۰e-۰۸	$\hat{\gamma}$
۰/۰۰۱۵۴	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۰۰۰۹	SE
۱۱e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۲e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	—	$\hat{\theta}$
۰/۰۴۲۸	۰/۰۵۰۱	۰/۰۴۴۷	۰/۰۴۸۳	۰/۴۰۹۴	—	SE
۶۳۴/۹۹۳	۶۳۵/۳۸۵	۶۳۴/۹۸۴	۶۳۵/۲۱۴	۶۳۵/۴۲۸	۶۳۳/۸۸۲	log( $\ell$ )
-۱۲۵۷/۹۸	-۱۲۵۸/۷۷	-۱۲۵۷/۹۶	-۱۲۵۸/۴۲	-۱۲۵۸/۸۵	-۱۲۵۷/۷۶	AIC
-۱۲۵۵/۷۱	-۱۲۵۶/۵۰	-۱۲۵۵/۶۹	-۱۲۵۶/۱۵	-۱۲۵۶/۵۸	-۱۲۵۶/۱۸	AICC
-۱۲۶۰/۱۲	-۱۲۶۰/۹۱	-۱۲۶۰/۱۱	-۱۲۶۰/۵۶	-۱۲۶۰/۹۹	-۱۲۴۸/۸۴	BIC
۰/۸۰۹	۰/۸۲۳	۰/۸۱۷	۰/۸۱۱	۰/۸۱۲	۰/۸۳۱	مقدار $p$ -K-S ( $X_1$ )
۰/۱۹۳	۰/۲۷۱	۰/۱۹۷	۰/۲۰۳	۰/۲۱۵	۰/۴۲۸	مقدار $p$ -K-S ( $X_2$ )
۰/۶۹۱	۰/۷۲۴	۰/۶۸۸	۰/۶۹۴	۰/۷۳۱	۰/۷۶۲	مقدار $p$ -K-S ( $V$ )
۳/۱۱۶	۳/۲۵۱	۳/۰۹۲	۳/۱۴۲	۳/۲۸۷	—	LRT
۰/۰۸۴۱	۰/۰۷۲۲	۰/۰۸۴۶	۰/۰۸۱۷	۰/۰۷۱۴	—	مقدار $p$

## مراجع

- Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42.
- Barreto-Souza, W., Morais, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 645-657.
- Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On some Lifetime Distributions with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.
- Csorgo, S. and Welsh, A. (1989), Testing for Exponential and Marshall-Olkin Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **23**, 287-300.
- El-Gohary, A., Alshamrani, A. and Al-Otaibi, A. (2013), The Generalized Gompertz Distribution, *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 13-24.
- El-Sherpieny, E. A., Ibrahim, S. A. and Bedar, R. E. (2013), A New Bivariate Distribution with Generalized Gompertz Marginals, *Asian Journal of Applied Sciences*, **1**, 141-150.
- Flores, J., Borges, P., Cancho, V. G. and Louzada, F. (2013), The Complementary Exponential Power Series Distribution, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **27**, 565-584.
- Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distributions, *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.
- Jamalizadeh, A. and Kundu, D. (2013), Weighted Marshall-Olkin Bivariate Exponential Distribution, *Statistics*, **47**, 917-928.
- Kundu, D. and Gupta, R. D. (2010), A Class of Bivariate Models with Proportional Reversed Hazard Marginals, *Sankhya B*, **72**, 236-253.

- Kundu, D. and Gupta, A. K. (2014), On Bivariate Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, **123**, 19-29.
- Kuş, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.
- Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2012), Generalized Exponential-Power Series Distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 4047-4066.
- Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2017), The Compound Class of Linear Failure Rate-Power Series Distributions: Model, Properties and Applications, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 1414-1440
- Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, Series B, **84**, 641-652.
- Morais, A. L. and Barreto-Souza, W. (2011), A Compound Class of Weibull and Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1410-1425.
- Noack, A. (1950), A Class of Random Variables with Discrete Distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, **21**, 127-132.
- Rozeegar, R. and Nadarajah, S. (2017), The Quadratic Hazard Rate Power Series Distribution, *Journal of Testing and Evaluation*, **45**, 1058-1072.
- Silva, R. B., Bourguignon, M., Dias, C. R. B. and Cordeiro, G. M. (2013), The Compound Class of Extended Weibull Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **58**, 352-367.
- Tahmasebi, S. and Jafari, A. A. (2016), Generalized Gompertz-Power Series Distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **45**, 1579-1604.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.

Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley, New York.



# **A Class of Bivariate Generalized Gompertz-Power Series Distributions**

**Roozegar, R., Jafari, A. A.**

Department of Statistics, Yazd University, Yazd , Iran.

**Abstract:** In this paper, we introduce a family of bivariate generalized Gompertz-power series distributions. This new class of bivariate distributions contains several models such as: bivariate generalized Gompertz -geometric, -Poisson, - binomial, - logarithmic, -negative binomial and bivariate generalized exponential-power series distributions as special cases. We express the method of construction and derive different properties of the proposed class of distributions. The method of maximum likelihood and EM algorithm are used for estimating the model parameters. Finally, we illustrate the usefulness of the new distributions by means of application to real data sets.

**Keywords:** Bivariate generalized Gompertz distribution, EM algorithm, Maximum likelihood estimation, Power series class of distribution.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62E15, 62H10, 62F10.