**مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۷**
**جلد ۱۲، شماره ۱، ص ۳۹ – ۵۵**
DOI: 10.29252/jss.12.1.39

# مقایسه تصادفی چولگی سیستم‌های موازی در مدل پارتو

ابراهیم امینی سرشت، مجید صادقی فر، مونا شیری
گروه آمار، دانشگاه بوعلی سینا
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۲/۲۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۱/۲۶

**چکیده:** در این مقاله به مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های غیر همگن از توزیع پارتو بر حسب ترتیب تصادفی ستاره و ترتیب تصادفی محدب پرداخته می‌شود. ثابت خواهد شد که طول عمر یک سیستم موازی با مؤلفه‌های مستقل غیر همگن از مدل پارتو بر حسب ترتیب تصادفی محدب، همیشه کمتر از طول عمر یک سیستم موازی دیگر با مؤلفه‌های مستقل همگن از مدل پارتو است. همچنین تحت یک شرط کلی روی پامترهای مقیاس نتیجه‌ای در ارتباط با ترتیب تصادفی ستاره اثبات می‌شود.
**واژه‌های کلیدی:** سیستم موازی، ترتیب ستاره، ترتیب محدب، ترتیب لورنز، ترتیب بیشاندن.

## ۱ مقدمه

آماره‌های مرتب نقش بسیار مهم و کاربردی در اکثر شاخه‌های آماری اعم از استنباط در آمار پارامتری و ناپارامتری، قابلیت اعتماد، آزمون‌های طول عمر و غیره ایفا می‌کنند. به طور مثال بردار آماره‌های مرتب همواره یک آماره بسنده برای پارامتر تحت مطالعه در یک خانواده از توابع توزیع پارامتری است، همچنین آماره‌های مرتب در متون قابلیت اعتماد، معرف طول عمر سیستم‌های $k$ از $n$ هستند. یاد آوری می‌شود چنانچه برای فعال بودن یک سیستم که از $n$ مؤلفه مستقل تشکیل شده است، فعال بودن $k$ مؤلفه لازم باشد، سیستم را $k$ از $n$ نامند. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از متغیرهای طول عمر، با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشند. همچنین فرض کنید $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ نمایشی از آماره های مرتب متناظر با متغیرهای تصادفی $X_1, \dots, X_n$ باشند. طول عمر یک سیستم $k$

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم امینی سرشت، e.amini64@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05

از $n$ ، با طول عمر $(n-k+1)$ امین آماره مرتب تعیین می‌شود و شکست هر مؤلفه بر روی توزیع طول عمر مؤلفه‌های برجا مانده تاثیرگذار است. در تئوری سیستم‌ها ساده‌ترین آنها، سیستم‌های موازی و سری هستند که طول عمر آنها بترتیب مطابق با بزرگترین آماره مرتب، $X_{n:n}$ و کوچکترین آماره مرتب، $X_{1:n}$ است. بنابراین بررسی طول عمر سیستم‌های موازی معادل با بررسی بزرگترین آماره مرتب حاصل از طول عمر مؤلفه‌های این سیستم‌ها است.

نویسندگان بسیاری، جنبه‌های مختلف توزیعی آماره‌های مرتب را در حالتی که متغیرها هم توزیع و مستقل باشند را مورد مطالعه قرار داده‌اند و نتایج بسیاری در ارتباط با آنها در دسترس است و برای مطالعه بیشتر در این زمینه می‌توان به کوچر (۱۹۹۶)، باپات و کوچر (۱۹۹۴)، خالدی و کوچر (۲۰۰۰) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه کرد. در حالتی که متغیرهای تصادفی غیر هم توزیع و مستقل باشند که اغلب در موقعیت‌های مختلف بطور طبیعی رخ می‌دهند، در ادبیات موضوع نتایج مورد علاقه زیادی نیز در دسترس است که برای مطالعه بیشتر میتوان به پلجر و پروشا (۱۹۷۱)، پروشان و شانتیکومار (۱۹۷۶)، تورادو و لیلو (۲۰۱۳)، بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۱) و پالتانه (۲۰۰۸) مراجعه کرد.

در زندگی واقعی ممکن است با سیستم‌هایی سر و کار داشته باشیم که دارای مؤلفه‌های مستقل و غیر هم توزیع باشند، از آنجا که نظریه توزیعی چنین سیستم‌هایی پیچیده است، مدل‌سازی آنها و تعیین کران‌ها و تقریب‌ها برای مشخصه‌های مورد توجه و مهم آن مدل‌ها از دیدگاه کاربردی مهم و مفیدند. به عبارت دیگر، تقریبی از یک مدل تصادفی با استفاده از یک مدل ساده‌تر و یا به وسیله یک مدل که از مؤلفه‌های ساده تشکیل شده است می‌تواند کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب مدل مورد مطالعه بدست دهد. نویسندگان زیادی از این حیث به مقایسه تصادفی آماره‌های مرتب از توزیع‌های پارامتری مختلف بر حسب ترتیب های تصادفی مختلف پرداخته‌اند، که در ادامه به برخی از این نتایج اشاره می‌شود.

فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی نمایی مستقل از هم باشند، که در آن $X_i$ها دارای نرخ خطر $\lambda_i,\ i=1,\ldots,n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_1,\ldots,Y_n$ یک نمونه تصادفی دیگر از توزیع نمایی با نرخ خطر یکسان $\bar{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}{n}$ باشند. دیکسترا و همکاران (۱۹۹۷) ثابت کردند

$$Y_{n:n} \preceq_{hr} X_{n:n}. \tag{1}$$

که در آن $\preceq_{hr}$ را ترتیب تصادفی نرخ خطر نامند (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷).

خالدی و کوچر (۲۰۰۰) رابطه (۱) را از توزیع نمایی به خانواده توزیع‌های نرخ خطر متناسب[1] (PHR) بر حسب ترتیب تصادفی $\preceq_{hr}$ بسط دادند. همچنین کوچر و شو (۲۰۰۷) نشان دادند رابطه (۱) را می‌توان از ترتیب تصادفی نرخ خطر به ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی بسط داد و ثابت کردند $Y_{n:n} \preceq_{\ell r} X_{n:n}$، که در آن $\preceq_{\ell r}$ را ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی نامند. بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۳) نتایج بدست آمده بالا را برای توزیع گاما گسترش دادند.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع گاما باشند که در آن $X_i$ها دارای پارامتر شکل $0 < r < 1$ و پارامتر مقیاس $\lambda_i$، برای $i = 1, \ldots, n$ باشند. همچنین فرض کنید $Z_1, \ldots, Z_n$ یک نمونه تصادفی دیگر با حجم $n$ از توزیع گاما با پارامتر شکل یکسان $r$ و پارامتر مقیاس یکسان $\widehat{\lambda} = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}}$ باشند. بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۳) نشان دادند $Z_{n:n} \preceq_{hr} X_{n:n}$. همچنین ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۴) به طور قوی‌تر ثابت کردند که با این شرط، اگر $Z_1, \ldots, Z_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع گاما با پارامتر شکل یکسان $r$ و پارامتر مقیاس یکسان $\bar{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ باشند، آنگاه $Z_{n:n} \preceq_{\ell r} X_{n:n}$. همچنین کوچر و شو (۲۰۰۹) نتایجی را در ارتباط با مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌های غیر همگن از توزیع نمایی بر حسب ترتیب تصادفی محدب بدست آوردند. توزیع پارتو، توزیع احتمالی توانی است که بسیاری از پدیدههای اجتماعی، اقتصادی و علمی را توصیف می‌کند. به طور مثال در اقتصاد می‌تواند در تخصیص دارایی میان اشخاص مفید باشد.

گوییم متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع پارتو است هرگاه دارای تابع توزیع

$$F_{\lambda,\beta}(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\lambda},$$

باشد، که در آن $x \geq \beta > 0$ و $\lambda > 0$. در این توزیع، $1/\beta$ و $\lambda$ به ترتیب پارامترهای مقیاس و شکل توزیع نامیده می‌شوند. تابع چگالی احتمال این توزیع نیز به صورت

$$f_{\lambda,\beta}(x) = \frac{\lambda\beta^{\lambda}}{x^{\lambda+1}};\ x \in [\beta, +\infty), \beta > 0, \lambda > 0,$$

بیان می شود. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع پارتو با پارمترهای شکل $\lambda_i$، $Y_1, \ldots, Y_n$ یک نمونه تصادفی دیگر از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\widehat{\lambda} = (\prod_{i=1}^{n} \lambda_i)^{\frac{1}{n}}$ باشند.

---
[1]Proportional Hazard Rate

کوچر و شو (۲۰۱۴) نشان دادند اگر، $\hat{\lambda} \geq \lambda$ آنگاه $X_{n:n} \preceq_{\star} Y_{n:n}$. در پایان مقاله نیز به مقایسه نتایجی که در مقاله کوچر و شو (۲۰۱۴) بدست آمده است و نتایج بیان شده در این مقاله، پرداخته می‌شود.

در این مقاله یک نمونه تصادفی مستقل و غیر هم توزیع از خانواده توزیع پارتو در نظر گرفته می‌شود. سپس به مقایسه تصادفی بزرگترین آماره مرتب آن بر حسب ترتیب های تصادفی کشیدگی مانند ترتیب تصادفی محدب و ترتیب تصادفی ستاره پرداخته و نشان داده خواهد شد بزرگترین آماره مرتب از متغیرهای تصادفی مستقل در مدل پارتو همگن از بزرگترین آماره مرتب از متغیرهای تصادفی مستقل در مدل پارتو ناهمگن در ترتیب های تصادفی ستاره و محدب بزرگتر است. در این مقاله منظور از متغیرهای تصادفی همگن، متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع است و منظور از متغیرهای تصادفی ناهمگن، متغیرهای تصادفی مستقل و غیر هم توزیع است. در بخش ۲، تعاریف و نمادهای مورد نیاز بیان شده است. در بخش ۳ به مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی با مؤلفه‌هایی از توزیع پارتو برحسب ترتیب تصادفی ستاره و ترتیب تصادفی محدب پرداخته شده است. در بخش آخر بحث و نتیجه گیری بیان شده است.

## ۲ تعاریف و نمادها

فرض کنید $X$ و $Y$ متغیرهای تصادفی نامنفی بترتیب با توابع چگالی احتمال $f_X$ و $f_Y$، توابع توزیع تجمعی $F_X$ و $F_Y$، توابع بقای $\bar{F}_X(x) = ۱ - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = ۱ - F_Y(x)$ و توابع نرخ خطر $h_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}$ و $h_Y(x) = \frac{f_Y(x)}{\bar{F}_Y(x)}$ باشند.

تعریف ۱: متغیر تصادفی $X$ در ترتیب تصادفی محدب از متغیر تصادفی $Y$ کوچکتر است ($X \preceq_c Y$) اگر و فقط اگر $G^{-۱}(F(x))$ تابعی محدب نسبت به $x$ باشد، که در آن $G^{-۱}$ تابع وارون از راست پیوسته $G$ است.

لازم به ذکر است در این جا صعودی به معنی ''به طور یکنواخت غیر نزولی'' و نزولی به معنی ''به طور یکنواخت غیر صعودی'' است. همچنین فرض می کنیم $\mathcal{R}^+ = [۰, \infty)$ است.

در قابلیت اعتماد ترتیب تصادفی محدب را نیز ترتیب تصادفی صعودی نرخ خطر بیشتر[۲] ($moreIFR$) نامند. اگر توابع چگالی احتمال‌ها موجود باشد، آنگاه محدب بودن تابع $G^{-۱}(F(x))$ به این معنی است که نسبت

$$\frac{g(G^{-۱}(u))}{f(F^{-۱}(u))} = \frac{h_Y(G^{-۱}(u))}{h_X(F^{-۱}(u))},$$

[2]more Increasing Failure Rate

تابعی صعودی در $u \in [0,1]$ باشد. بنابراین $X \preceq_c Y$ به این معنی است که $Y$ طول عمری کندتر نسبت به $X$ دارد. برای مطالعه بیشتر به کوچر و شو (۲۰۰۹) مراجعه کنید.

تعریف ۲: متغیر تصادفی $X$ در ترتیب تصادفی ستاره از متغیر تصادفی $Y$ کوچکتر است $(X \preceq_\star Y)$ اگر $\frac{G^{-1}(F(x))}{x}$ تابعی صعودی از $x$ باشد.

ترتیب تصادفی ستاره را نیز ترتیب تصادفی صعودی نرخ خطر بیشتر در میانگین[3] $(moreIFRA)$ نامند. از آنجا که متوسط تابع نرخ خطر $F$ در $x$ برابر است با

$$r_X(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h_X(u)du = -\frac{\ln \bar{F}_X(x)}{x},$$

لذا رابطه $X \preceq_\star Y$ می‌تواند بر حسب میانگین نرخ خطرها نیز بیان شود، به عبارتی $X \preceq_\star Y$ هم ارز این است که نسبت

$$\frac{r_Y(G^{-1}(u))}{r_X(F^{-1}(u))},$$

تابعی صعودی در $u \in (0,1]$ باشد. توجه شود، متغیر تصادفی $X$ دارای نرخ خطر صعودی است اگر و فقط اگر $E \preceq_\star X$، که در آن $E$ متغیر تصادفی نمایی است. از مارشال و الکین (۲۰۰۷) رابطه

$$X \preceq_c Y \Longrightarrow X \preceq_\star Y,$$

بین ترتیب تصادفی محدب و ستاره برقرار است.

فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی نامنفی باشد، منحنی لورنز بصورت

$$L_X(p) = \frac{\int_0^p F^{-1}(u)du}{\mu_X};\ p \in [0,1],$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mu_X$ میانگین متغیر تصادفی $X$ است.

تعریف ۳: متغیر تصادفی $X$ در ترتیب تصادفی لورنز از متغیر تصادفی $Y$ کوچکتر است (به عبارت دیگر، $X \preceq_{Lorenz} Y$) اگر برای همه $p \in [0,1]$، آنگاه $L_X(p) \geq L_Y(p)$.

[3] more Increasing Failure Rate in Average

چاندرا و سینگاپوروالا (۱۹۸۱) نشان دادند

$$X \preceq_{\star} Y \Longrightarrow X \preceq_{Lorenz} Y \Longrightarrow CV(X) \le CV(Y), \qquad (۲)$$

که در آن $CV(X) = \sqrt{Var(X)}/E(X)$ ضریب تغییر $X$ است. کلفسجو (۱۹۸۴) نشان داد اگر $X \preceq_{\star} Y$، آنگاه $\frac{L_Y(p)}{L_X(p)}$ در $p \in [0,1]$ صعودی است، یعنی برای $p \in [0,1]$، $L_X(p) \ge L_Y(p)$.

تعریف ۴: فرض کنید $x_{(1)} \le \ldots \le x_{(n)}$ یک ترتیب صعودی از اجزای بردار $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{R}^{+n}$ باشد. بردار $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{+n}$ به معنای بیشاندن[4] از بردار $\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{+n}$ کوچکتر است و با $\boldsymbol{x} \preceq_m \boldsymbol{y}$ نمایش داده می‌شود، اگر برای هر $j = 1, \ldots, n-1$،

$$\sum_{i=1}^{j} x_{(i)} \ge \sum_{i=1}^{j} y_{(i)}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{(i)} = \sum_{i=1}^{n} y_{(i)}.$$

برای مطالعه بیشتر در ارتباط با مفهوم بیشاندن و کاربردهای آن می‌توان به مارشال وهمکاران (۲۰۱۱) و ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) مراجعه کرد.

## ۳ نتایج اصلی

در این بخش آماره‌های مرتب از نمونه‌های تصادفی غیرهم توزیع و مستقل پارتو بر حسب ترتیب‌های تصادفی محدب و ستاره مورد بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامترهای مقیاس مختلف $1/\beta_i$ برای $i = 1, \ldots, n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامتر مقیاس یکسان $1/\beta$ باشند. آنگاه خواهیم داشت $X_{n:n} \preceq_c Y_{n:n}$.

**برهان:** فرض کنید $F_{n:n}$ و $G_{n:n}$ به ترتیب توابع توزیع و $f_{n:n}$ و $g_{n:n}$ به ترتیب توابع چگالی احتمال

[4] Majorization order

متغیرهای تصادفی $X_{n:n}$ و $Y_{n:n}$ باشند. بنابراین برای هر $x \geq \max\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ خواهیم داشت

$$F_{n:n}(x) = P(X_{n:n} \leq x) = \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda],$$

و به طور مشابه برای $x \geq \beta$، می‌توان نوشت

$$G_{n:n}(x) = [1 - (\frac{\beta}{x})^\lambda]^n.$$

با توجه به تعریف ۱ کافی است ثابت شود برای هر $x \geq \max\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ تابع $G_{n:n}^{-1} F_{n:n}(x)$ محدب است. داریم

$$G_{n:n}^{-1} F_{n:n}(x) = \beta(1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}})^{-\frac{1}{\lambda}}. \tag{۳}$$

همچنین

$$g_{n:n}(G_{n:n}^{-1} F_{n:n}(x)) = \frac{n\lambda}{\beta} \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{n-1}{n}} (1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}.$$

با مشتق گیری از رابطه (۳) نسبت به $x$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
(G_{n:n}^{-1} F_{n:n}(x))' &= \frac{f_{n:n}(x)}{g_{n:n}(G_{n:n}^{-1} F_{n:n}(x))} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)} \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]}{\frac{n\lambda}{\beta} \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{n-1}{n}} (1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}})^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)}}{\frac{n}{\beta}(1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{\lambda}} (\prod_{i=1}^{n} [1 - (\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-\frac{1}{n}} - 1)}.
\end{aligned}$$

بنابراین کافی است ثابت شود

$$\varphi(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})}}{(1-\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{\lambda}}(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)},$$

در $x\geq\max\{\beta_1,...,\beta_n\}$ صعودی است. مشتق $h(x)$ نسبت به $x$ نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}
\varphi^{'}(x) &\overset{sgn}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})}\\
&\quad\times(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})}+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})}\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}})\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}(\frac{\lambda(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x^2(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})^2}+\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x^2(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)\\
&= \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}(\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x^2(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})}(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)\\
&\quad+\frac{\lambda}{n}(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})^2\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}\\
&\quad-\lambda\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x^2(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})^2}(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)\\
&\overset{sgn}{=} \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})-(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)\\
&\quad+\frac{\lambda}{n}(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})^2\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}\\
&\quad-\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})^2}(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1)\\
&= \xi_1+\xi_2.
\end{aligned}$$

که در آن

$$\xi_1 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda})})-(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^{\lambda}]^{-\frac{1}{n}}-1),$$

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{\lambda}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)}\Big)^2\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-\frac{1}{n}}\\ &\quad -\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{x(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)^2}\Big(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-\frac{1}{n}}-1\Big),\end{aligned}$$

در ادامه نشان داده می‌شود $\xi_1$ و $\xi_2$ عباراتی مثبت هستند. با استفاده از نامساوی میانگین حسابی-هندسی داریم

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-1}\Big)\geq\Big(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-1}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

یا

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)}\Big)\geq\Big(\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{-\frac{1}{n}}-1\Big),$$

بنابراین $\xi_1 \geq 0$. برای اثبات مثبت بودن $\xi_2$ کافی است نشان داده شود

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)^2}\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}}$$

از نامساوی جمع چبیشو[5] (هاردی و همکاران، ۱۹۸۸) نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)}\geq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{\beta_i}{x})^\lambda}{(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)^2}\sum_{i=1}^{n}(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda).$$

بنابراین کافی است که نشان داده شود

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda)\geq\prod_{i=1}^{n}[1-(\frac{\beta_i}{x})^\lambda]^{\frac{1}{n}},$$

که با استفاده از نامساوی میانگین حسابی-هندسی نتیجه می‌شود و اثبات تمام می‌شود.

[5] Chebyshev's sum inequality

با توجه به اینکه ترتیب تصادفی محدب، ترتیب تصادفی ستاره را نتیجه می‌دهد، نتیجه زیر برقرار است.

نتیجه ۱: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامترهای مقیاس مختلف $1/\beta_i$ برای $i = 1, \ldots, n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامتر مقیاس یکسان $1/\beta$ باشند. آنگاه $X_{n:n} \preceq_\star Y_{n:n}$.

برای اثبات نتیجه بعدی از لم‌های زیر استفاده می‌کنیم که در ادامه به بیان آن ها می‌پردازیم.

لم ۱: برای هر $x \geq 0$، تابع $\frac{x}{1-a^x}$ در بازه $a \in (0, 1)$ نسبت به $x$ صعودی است.

**برهان:** قرار دهید $\phi(x) = \frac{x}{1-a^x}$. در نتیجه مشتق $\phi(x)$ نسبت به $x$ به صورت

$$\phi'(x) = \frac{1}{(1-a^x)^2}(1 - a^x + xa^x \ln a)$$

است. بنابراین کافی است ثابت شود

$$\phi_1(x) = (1 - a^x + xa^x \ln a) \geq 0,$$

از آنجا که $\phi_1(0) = 0$، کافی است ثابت شود برای هر $x \geq 0$، $\phi_1(x)$ صعودی است. مشتق $\phi_1(x)$ نسبت به $x$ برای هر $a \in (0, 1)$ بصورت $\psi_1'(x) = xa^x(\ln a)^2 \geq 0$ است. بنابراین نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

لم ۲: (ساندر و موران، ۱۹۷۸) فرض کنید $\{F_\beta | \beta \in \mathcal{R}\}$ یک خانواده از تابع توزیع‌هایی باشند به طوری که تکیه گاه متغیر تابع توزیع $F_\beta$ بر بازه‌ای مانند $(a, b) \subseteq (0, 1)$ تعریف شود و دارای تابع چگالی $f_\beta$ باشد، آنگاه $\beta \leq \beta^*$ $F_\beta \preceq_\star F_\beta,$ اگر و فقط اگر نسبت $\frac{F'_\beta(x)}{xf_\beta(x)},$ تابعی صعودی از $x$ باشد، که در آن $F'_\beta$ مشتق تابع $F_\beta$ نسبت به $\beta$ است.

قضیه ۲: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو که برای هر $i = 1, \ldots, p$، $X_i$ دارای پارامتر شکل $\lambda_1$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_1$ باشد و برای هر $j = p+1, \ldots, n$، $X_j$ دارای پارامتر شکل $\lambda_2$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_2$ باشد. همچنین فرض کنید $p \geq 1$ و $q = n - p \geq 2$ باشد. فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل دیگری از توزیع پارتو که برای $i = 1, \ldots, p$ ، $Y_i$

دارای پارامتر شکل $\lambda_۱$ و پارامتر مقیاس $۱/\beta_۱^*$ باشد و برای $j=p+۱,\dots,n$ ، $Y_j$ دارای پارامتر شکل $\lambda_۲$ و پارامتر مقیاس $۱/\beta_۲^*$ باشد. فرض کنید $\lambda_۱ \le \lambda_۲$ ، $\beta_۱ \le \beta_۲$ و $\beta_۲^* \le \beta_۱^*$ ، آنگاه،

$$\text{اگر } \frac{\beta_۱^*}{\beta_۲^*} \ge \frac{\beta_۲}{\beta_۱} \text{، خواهیم داشت } X_{n:n}(p,q) \preceq_\star Y_{n:n}(p,q),$$

که در آن $X_{n:n}(p,q)$ و $Y_{n:n}(p,q)$ بترتیب نشان دهنده $n$–امین آماره مرتب متناظر با نمونه‌های تصادفی در نظر گرفته شده از جامعه های $X$ و $Y$ هستند.

**برهان:** **حالت۱:** فرض کنید $\beta_۱+\beta_۲ = \beta_۱^*+\beta_۲^*$، بدون کم کردن از کلیت مساله، فرض کنید $\beta_۱+\beta_۲=\beta_۱^*+\beta_۲^*=۱$ باشد. در این صورت داریم $(\beta_۱,\beta_۲) \preceq_m (\beta_۱^*,\beta_۲^*)$. قرار دهید $\beta=\beta_۲$ و $\beta^*=\beta_۲^*$. با توجه به فرضیات مساله داریم که $\beta \ge \beta^*$ و $\beta \in [\frac{۱}{۲},۱)$ است. باتوجه به لم ۲ کافی است ثابت شود نسبت $\frac{F'_\beta(x)}{xf_\beta(x)}$ صعودی در $\beta$ برای $x \ge \beta \in [\frac{۱}{۲},۱)$ است. تابع توزیع $X_{n:n}(p,q)$ بصورت

$$F_{\beta,n:n}(x) = [۱-(\frac{۱-\beta}{x})^{\lambda_۱}]^p[۱-(\frac{\beta}{x})^{\lambda_۲}]^q,$$

و تابع چگالی بصورت

$$\begin{aligned} f_{\beta,n:n}(x) &= \frac{p\lambda_۱(۱-\beta)^{\lambda_۱}}{x^{\lambda_۱+۱}}[۱-(\frac{۱-\beta}{x})^{\lambda_۱}]^{p-۱}[۱-(\frac{\beta}{x})^{\lambda_۲}]^q \\ &\quad +\frac{q\lambda_۲\beta^{\lambda_۲}}{x^{\lambda_۲+۱}}[۱-(\frac{۱-\beta}{x})^{\lambda_۱}]^p[۱-(\frac{\beta}{x})^{\lambda_۲}]^{q-۱}. \end{aligned}$$

است. با مشتق گیری از $F_{\beta,n:n}(x)$ نسبت به $\beta$ داریم

$$\begin{aligned} F'_{\beta,n:n}(x) &= \frac{p\lambda_۱(۱-\beta)^{\lambda_۱-۱}}{x^{\lambda_۱}}[۱-(\frac{۱-\beta}{x})^{\lambda_۱}]^{p-۱}[۱-(\frac{\beta}{x})^{\lambda_۲}]^q \\ &\quad -\frac{q\lambda_۲\beta^{\lambda_۲-۱}}{x^{\lambda_۲}}[۱-(\frac{۱-\beta}{x})^{\lambda_۱}]^p[۱-(\frac{\beta}{x})^{\lambda_۲}]^{q-۱}. \end{aligned}$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\frac{F'_{\beta,n:n}(x)}{xf_{\beta,n:n}(x)} = \frac{۱}{۱-\beta} - \frac{۱}{\beta(۱-\beta)}(۱+\frac{p\lambda_۱(۱-\beta)^{\lambda_۱}[x^{\lambda_۲}-\beta^{\lambda_۲}]}{q\lambda_۲\beta^{\lambda_۲}[x^{\lambda_۱}-(۱-\beta)^{\lambda_۱}]})^{-۱}.$$

لذا کافی است ثابت کنیم تابع

$$\psi(x) = \frac{x^{\lambda_۲} - \beta^{\lambda_۲}}{x^{\lambda_۱} - (۱-\beta)^{\lambda_۲}},$$

صعودی نسبت به $x \geq \beta$ برای $\beta \in [\frac{۱}{۲}, ۱)$ است. با مشتق گیری از $\psi(x)$ نسبت به $x$ داریم

$$\begin{aligned} \psi'(x) &\overset{sgn}{=} \lambda_۲ x^{\lambda_۲ - ۱}(x^{\lambda_۱} - (۱-\beta)^{\lambda_۱}) - \lambda_۱ x^{\lambda_۱ - ۱}(x^{\lambda_۲} - \beta^{\lambda_۲}) \\ &\geq \lambda_۲ x^{\lambda_۲ - ۱}(x^{\lambda_۱} - \beta^{\lambda_۱}) - \lambda_۱ x^{\lambda_۱ - ۱}(x^{\lambda_۲} - \beta^{\lambda_۲}). \end{aligned} \quad (۴)$$

وقتی $x = \beta$ باشد، به وضوح معلوم است که $\psi'(x) \geq ۰$. برای حالتی که $x > \beta$ ، کافی است نشان داده شود $\lambda_۲ x^{\lambda_۲ - ۱}(x^{\lambda_۱} - \beta^{\lambda_۱}) \geq \lambda_۱ x^{\lambda_۱ - ۱}(x^{\lambda_۲} - \beta^{\lambda_۲})$، یا بطور مشابه $\frac{\lambda_۱}{۱-(\frac{\beta}{x})\lambda_۱} \geq \frac{\lambda_۲}{۱-(\frac{\beta}{x})\lambda_۲}$. قرار دهید $a = \frac{\beta}{x} \in (۰, ۱)$. با استفاده از لم ۱ برای $\lambda_۱ \geq \lambda_۲$ داریم $\frac{\lambda_۱}{۱-a^{\lambda_۱}} \geq \frac{\lambda_۲}{۱-a^{\lambda_۲}}$. بنابراین اثبات برای این قسمت کامل می شود.

**حالت ۲:** فرض کنید $\beta_۱ + \beta_۲ \neq \beta_۱^* + \beta_۲^*$ . بدون کم کردن از کلیت مساله، فرض کنید $\beta_۱ + \beta_۲ = c(\beta_۱^* + \beta_۲^*)$ که در آن $c$ یک عدد ثابت است. در این صورت $(\beta_۱, \beta_۲) \preceq_m (c\beta_۱^*, c\beta_۲^*)$. حال فرض کنید $Z_۱, \ldots, Z_n$ متغیرهای تصادفی پارتو مستقل با پارامتر شکل $\lambda$ و $Z_i$ با پارامتر مقیاس $c\beta_۱^*$ برای $i = ۱, \ldots, p$ و $Z_j$ با پارامتر مقیاس $c\beta_۲^*$ برای $j = p+۱, \ldots, n$ باشد. از نتیجه حاصل شده در حالت اول داریم

$$X_{n:n}(p, q) \preceq_\star Z_{n:n}(p, q) \quad (۵)$$

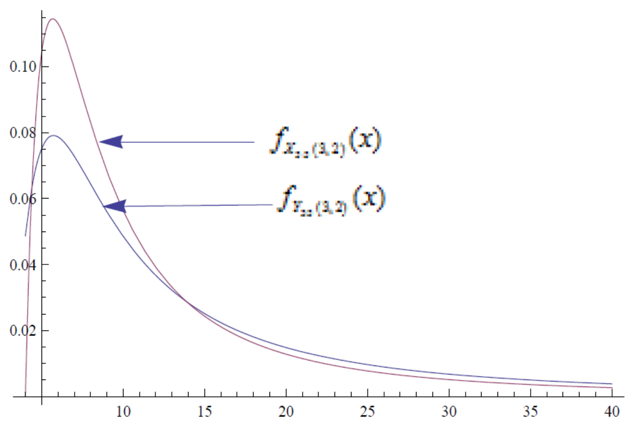
از طرف دیگر، از آنجا که ترتیب تصادفی ستاره ثابت مقیاس است، نتیجه شود که

$$Z_{n:n}(p, q) \preceq_\star Y_{n:n}(p, q). \quad (۶)$$

بنابراین با ترکیب روابط (۵) و (۶) نتیجه مطلوب در این حالت نیز بدست می آید.

مثال ۱: فرض کنید $(X_۱, \ldots, X_۵)$ یک بردار تصادفی از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارمترهای مقیاس $(\beta_۱, \beta_۱, \beta_۱, \beta_۲, \beta_۲) = (۱, ۱, ۱, ۴, ۴)$ و پارامتر شکل یکسان $\lambda_۱ = ۱$ باشد.

همچنین فرض کنید $(Y_۱, \dots, Y_۵)$ یک بردار تصادفی دیگر از متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارمترهای مقیاس $(\beta^*_۱, \beta^*_۱, \beta^*_۲, \beta^*_۲, \beta^*_۲) = (۲, ۲, ۲, ۳, ۳)$ و پارامتر شکل یکسان ۲ $= \lambda_۲$ باشد. در نمودار ۱ تابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی $X_{۵:۵}(۳, ۲)$ و $Y_{۵:۵}(۳, ۲)$ رسم شده است. واضح است که تابع چگالی احتمال $Y_{۵:۵}(۳, ۲)$ چوله تر از تابع چگالی احتمال $X_{۵:۵}(۳, ۲)$ است که این واقعیت مطابق با نتیجه بدست آمده در قضیه ۲ است. از طرفی شرایط قضیه ۲ را برای مثال ذکر شده به راحتی می توان بررسی کرد، بنابراین، می توان نتیجه گرفت $X_{۵:۵}(۳, ۲) \preceq_\star Y_{۵:۵}(۳, ۲)$. با توجه به رابطه (۲) و اینکه نتیجه قضیه ۲ برقرار است نشان داده می‌شود که نابرابری بین ضریب تغییرات را نیز می‌توان نتیجه گرفت.




**شکل ۱.** تابع چگالی احتمال $f_{X_{۵:۵}(۳,۲)}(x)$ و $f_{Y_{۵:۵}(۳,۲)}(x)$.

با استفاده از نرم افزار Mathematica تابع میانگین $X_{۵:۵}(۳, ۲)$ به صورت

$$\mu_{X_{۵:۵}(۳,۲)} = \int_۴^\infty x f_{X_{۵:۵}(۳,۲)}(x) dx = ۹/۸۳۷۹.$$

حساب می‌شود. همچنین واریانس آن برابر است با

$$\sigma^۲_{X_{۵:۵}(۳,۲)} = \int_۴^\infty x^۲ f_{X_{۵:۵}(۳,۲)}(x) dx - \mu^۲_{X_{۵:۵}(۳,۲)} = ۵۱۴/۹۵۵.$$

بنابراین ضریب تغییر $X_{5:5}(3,2)$ برابر است با

$$CV[X_{5:5}(3,2)] = \frac{\sigma_{X_{5:5}(3,2)}}{\mu_{X_{5:5}(3,2)}} = 2/306653.$$

به طور مشابه $CV[Y_{5:5}(3,2)] = 5/185465$، بنابراین با توجه به رابطه (۲)،

$$CV[X_{5:5}(3,2)] \leq CV[Y_{5:5}(3,2)].$$

با توجه به رابطه بین ترتیب تصادفی ستاره و ترتیب تصادفی لورنز که در بخش ۲ بیان شد نتیجه بطور مستقیم از قضیه ۲ برقرار می شود.

نتیجه ۲: فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو که برای هر $i = 1, \ldots, p$، $X_i$ دارای پارامتر شکل $\lambda_1$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_1$ باشد و برای هر $j = p+1, \ldots, n$، $X_j$ دارای پارامتر شکل $\lambda_2$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_2$ باشد. همچنین فرض کنید $p \geq 1$ و $q = n - p \geq 2$ باشد. فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل دیگری از توزیع پارتو که برای $i = 1, \ldots, p$، $Y_i$ دارای پارامتر شکل $\lambda_1$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_1^*$ باشد و برای $j = p+1, \ldots, n$، $Y_j$ دارای پارامتر شکل $\lambda_2$ و پارامتر مقیاس $1/\beta_2^*$ باشد. فرض کنید $\lambda_1 \leq \lambda_2$، $\beta_1 \leq \beta_2$ و $\beta_2^* \leq \beta_1^*$، آنگاه،

اگر $\frac{\beta_2^*}{\beta_1^*} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1}$ باشد، خواهیم داشت $X_{n:n}(p,q) \preceq_{Lorenz} Y_{n:n}(p,q)$.

تذکر ۱: کوچر و شو (۲۰۱۴) نتایجی در ارتباط با مقایسه تصادفی چولگی بزرگترین آماره مرتب از توزیع پارتو بیان کرده و به بحث در ارتباط با مقایسه تصادفی بزرگترین آماره‌های مرتب از توزیع پارتو بر حسب ترتیب تصادفی ستاره پرداخته است. در همه موارد پارامتر مقیاس ثابت است و فقط پارامتر شکل تغییر می‌کند و منحصراً در قضیه ۱.۵ از کوچر و شو (۲۰۱۴) است که پارامترهای مقیاس متفاوت در نظر گرفته شده‌اند. توجه شود که نتیجه این قضیه، در ارتباط با ترتیب تصادفی ستاره است که ضعیفتر از نتیجه بدست آمده، قضیه ۱ در این مقاله است، که در آن پارامتر شکل یکسان و پارامترهای مقیاس متفاوت در نظر گرفته شده‌اند و نتیجه در ارتباط با مقایسه تصادفی بر حسب ترتیب تصادفی محدب است که از ترتیب تصادفی ستاره قویتر است. همان‌طور که در بخش ۲ بیان شد، ترتیب تصادفی محدب ترتیب تصادفی ستاره را نتیجه می‌دهد، اما عکس مطلب درست نیست. همچنین اگر توجه کنیم معلوم است که نتیجه۱ کاملاً متفاوت از قضیه ۱.۵ از مقاله کوچر و شو (۲۰۱۴) است، زیرا جهت نامساوی‌ها با توجه به مدل‌های در نظر گرفته

شده، در قضیه ۱.۵ از مقاله کوچر و شو (۲۰۱۴) و نتیجه ۱ متفاوت هستند. علاوه بر این لازم به ذکر است که رابطه بیان شده برای عبارت $G^{-1}_{n:n}(F_{n:n}(x))/x$ در مقاله کوچر و شو (۲۰۱۴) نادرست است و لذا نتیجه قضیه ۱.۵ از این مقاله نادرست است و نامساوی بیان شده در نتیجه ۱ از مقاله حاضر با توجه به اثبات دقیق قضیه درست است. همچنین در قضیه ۲، پارامترهای شکل و مقیاس در مدل متفاوت در نظر گرفته شده است و شرطی که در قضیه ذکر شده است یک شرط کاملاً کلی است. لذا با توجه به مطالب ذکر شده، نتایج حاصل از این مقاله با نتایج مطرح شده در بخش ۲.۴ از مقاله کوچر و شو (۲۰۱۴) هم‌پوشانی نخواهند داشت.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های موازی با مؤلفه‌هایی مستقل و غیر هم‌توزیع از توزیع پارتو در نظر گرفته و سپس با اعمال شرایطی روی پارامترهای توزیع نتایج جدیدی در ارتباط با مقایسه تصادفی آن‌ها بر حسب ترتیب تصادفی ستاره و ترتیب تصادفی محدب بدست آورده شد. ابتدا حالتی در نظر گرفته شد که مؤلفه‌ها در سیستم مستقل از هم و غیر هم‌توزیع و در سیستمی دیگر مؤلفه‌ها مستقل و هم‌توزیع باشند. با فرض آن که $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامترهای مقیاس مختلف $1/\beta_i$ برای $i = 1, \dots, n$ باشند و $Y_1, \dots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پارتو با پارامتر شکل یکسان $\lambda$ و پارامتر مقیاس یکسان $1/\beta$ باشند. نشان داده شد $X_{n:n} \preceq_{c[\star]} Y_{n:n}$. از این نابرابری می‌توان کران‌ها و تقریب‌های مناسبی از برخی مشخصه‌های خاص و مطلوب سیستم‌های موازی که از مؤلفه‌های مستقل و غیر هم‌توزیع تشکیل شده را با استفاده از طول عمر سیستم‌های موازی بدست آورد. به عنوان مثال از آنجا که ترتیب تصادفی ستاره نابرابری بین ضریب تغییرات را نتیجه می‌دهد (چاندرا و سینگاپوروالا،۱۹۸۱)، می‌توان گفت که اگر نابرابری $\preceq_\star$ بین طول عمر سیستم‌های موازی برقرار باشد، آنگاه ضریب تغییرات طول عمر سیستم اول کمتر از سیستم دوم خواهد بود. همچنین حالتی را در نظر گرفته شد که سیستم‌ها هر کدام دارای مؤلفه‌های مستقل و غیر هم‌توزیع باشند، سپس با اعمال شرایطی روی پارامتر مقیاس، نتایج مشابهی در این حالت اثبات شد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران و ویراستار محترم که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند.

## مراجع

Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013), Hazard Rate Comparison of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components, *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 153-160.

Bapat, R. B. and Kochar, S. C. (1994), On likelihood-ratio Ordering of Order Statistics, *Linear Algebra and Its Applications*, **199**, 281-291.

Chandra, M., and Singapurwalla, N. (1981), Relationships Between Some Notions, which Are Common to Reliability and Economics, *Mathematics and Operation Research*, **6**, 113-121.

Dykstra, R., Kochar, S. C., and Rojo, J. (1997), Stochastic Comparisons of Parallel Systems of Heterogeneous Exponential Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **65**, 203-211.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G. (1988), *Inequalities, Cambridge Mathematical Library*, Cambridge: Cambridge University Press.

Khaledi, B. E., and Kochar, S. C. (2000), Some New Results on Stochastic Comparisons of Parallel Systems, *Journal of Applied Probability*, **37**, 283-291.

Klefsjo, B. (1984), Reliability Interpretations of Some concepts from Economics, *Naval Research, Logistics Quart*, **31**, 301-308.

Kochar, S. C. and Xu, M. (2014), On the Skewness of Order Statistics with Applications, *Annals of Operations Research*, **212**, 127-138.

Kochar, S. C. and Xu, M. (2009), Comparisons of Parallel Systems According to the Convex Transform Order, *Journal of Applied Probability*, **46**, 342-352.

Kochar, S. C. and Xu, M. (2007). Stochastic Comparisons of Parallel Systems when Components Have Proportional Hazard Rates, *Probability in the Engineering and Informational Science*, **21**, 597-609.

Kochar, S. C. (1996), Dispersive Ordering of Order Statistics, *Statistics and Probability Letters*, **27**, 271-274.

Marshall, A. W., Olkin, I., and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of majorization and its applications*, Springer-Verlag, New York.

Păltănea, E. (2008), On the Comparison in Hazard Rate Ordering of Fail-safe Systems, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **7**, 1993-1997.

Pledger, P. and Proschan, F. (1971), *Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, in Optimizing Methods in Statistics*, J. S. Rustagi, Ed., 89-113, Academic Press, New York, NY, USA.

Proschan, F. and Sethuraman, J. (1976), Stochastic Comparisons of Order Statistics from Heterogeneous Populations, with Applications in Reliability, *Journal of Multivariate Analysis*, **6**, 608-616.

Saunders, I. W. and Moran, P. A. (1978), On the Quantiles of the Gamma and F Distributions. *Journal of Applied Probability*. **15**, 426-432.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*. New York: Springer-Verlag.

Torrado, N. and Lillo, R. E. (2013), Likelihood Ratio Order of Spacings from Two Heterogeneous Samples. *Journal of Multivariate Analysis*. **114**, 338-348.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011), New Results on Comparisons of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components. *Statistics and Probability Letters*. **81**, 36-44.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2014), A Stochastic Inequality for the Largest Order Statistics from Heterogeneous Gamma Variables. *Journal of Multivariate Analysis*. **129**, 145-150.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2009), Characterization of MRL Order of Fail-safe Systems with Heterogeneous Exponential Components. *Journal of Statistical Planning and Inference*. **139**, 3027-3037.