

## برآورد ماکسیمم درست‌نمایی ماتریس کوواریانس مدل ARMA با استفاده از ماتریس باند

بهزاد منصوری و رحیم چینی پرداز

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۱/۲۶ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

**چکیده:** در این مقاله یک روش برای برآورد ماتریس کوواریانس مدل ARMA با بهره‌گیری از ماتریس باند پیشنهاد شده است. تابع درست‌نمایی مدل ARMA با ماتریس کوواریانس قطری به دست آمده و تقریب‌هایی نیز برای معیارهایی مانند کولبک-لیبلر و چرنوف ارائه شده است. بعلاوه دو قاعده برای ممیزی مدل‌های ARMA با استفاده از تقریب‌های به دست آمده پیشنهاد شده است. سپس با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده و واقعی، توانایی روش پیشنهادی در ممیزی مدل‌های مختلف ARMA نشان داده شده است. کاهش قابل ملاحظه تعداد محاسبات برای سری‌های زمانی بزرگ و نرخ خطای ممیزی پایین از ویژگی‌های قواعد پیشنهاد شده است. همچنین عدم نیاز به فرض نرمال بودن در یک قضیه نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** مدل ARMA، ماتریس باند، تابع درست‌نمایی، ممیزی سری‌های زمانی

### ۱ مقدمه

مدل‌های ARMA رایج‌ترین روش کلاسیک برای مدل‌سازی سری‌های زمانی با کاربردی بسیار گسترده در علوم مختلف می‌باشند. می‌توان نشان داد که کوواریانس یک سری زمانی با مدل ARMA دارای ساختار یک ماتریس باند است (چان، ۱۹۹۱). از این خصوصیت می‌توان برای تقریب تابع درست‌نمایی مدل ARMA استفاده کرد و آن را در زمینه‌هایی مانند نظریه اطلاع، روش‌های انتخاب مدل، ممیزی و خوشه‌بندی سری‌های زمانی و ... به خدمت گرفت. در این مقاله، روشی برای تقریب تابع درست‌نمایی مدل

ARMA پیشنهاد شده و برای ممیزی مدل‌های ARMA استفاده شده است. در چند دهه گذشته، تحلیل ممیزی سری‌های زمانی از جمله مباحث آماری جالب برای محققین بوده است و کاربردهای وسیعی در علمی مانند مهندسی، زمین‌شناسی، پزشکی، اقتصاد، علوم رفتاری و غیره یافته است. بعضی از این کاربردها در شاموی و استوفر (۲۰۱۱) لیست شده‌اند. استفاده از روش‌های پارامتری در ممیزی سری‌های زمانی نیازمند اعمال مربوط به حاصلضرب ماتریس‌ها و وارون ماتریس‌ها است. از طرفی ابعاد بزرگ ماتریس‌های کواریانس سری‌های زمانی در مدل‌های ARMA منجر به محاسبات دست و پاگیر و طولانی می‌شود. از این رو اکثر محققان از روش‌های ناپارامتری برای ممیزی سری‌های زمانی استفاده کرده‌اند. شاموی و آنگر (۱۹۷۴) با استفاده از معیار اطلاع ممیزی کولبک-لیبلر، بهترین توابع ممیزی خطی را برای ممیزی بین دو فرآیند مانای نرمال وقتی میانگین‌های دو فرآیند برابر هستند، فراهم نمودند. از دیگر افرادی که در زمینه تحلیل ممیزی در حوزه طیفی سری‌های زمانی مطالعه کردند می‌توان به آلاگان (۱۹۸۶)، درگاهی - نوبری و لی‌کاک (۱۹۸۱)، کاکیزاوا و همکاران (۱۹۸۸)، شاموی (۲۰۰۳) و چینی پرداز و همکاران (۱۳۸۸) اشاره کرد. برخی محققین نیز از موجک‌ها به منظور ممیزی ناپارامتری سری‌های زمانی استفاده کردند. مهاراجه و آلونسو (۲۰۰۷) با استفاده از واریانس موجک‌ها در سطوح بلوک بندی شده و فریزلویز و اومباو (۲۰۰۹) با استفاده از تابع طیف موجکی تکاملی به ممیزی سری‌های زمانی پرداختند. منصوری و چینی پرداز (۲۰۱۶) نیز معیارهای ممیزی کولبک-لیبلر و چرنوف را با استفاده از تابع طیف موجکی تکاملی به دست آوردند. روش‌های ناپارامتری ممیزی سری‌های زمانی چه در حوزه طیفی و چه در حوزه موجک بر پایه تبدیل‌هایی هستند که داده‌ها را از حوزه زمان به حوزه طیف یا طیف-زمان انتقال داده و هیچگونه مدل خاصی را برای داده‌ها در نظر نمی‌گیرند. با این وجود در بسیاری از موارد محقق علاقه‌مند است که ساختار مدل ARMA را در ممیزی سری‌های زمانی حفظ کند. در این راستا تلاش‌هایی صورت گرفته که از آن میان می‌توان به چان (۱۹۹۱)، چان و همکاران (۱۹۹۶)، چینی پرداز (۲۰۰۰) و منصوری و همکاران (۲۰۱۰) اشاره کرد. در این مقالات تابع ممیزی سری‌های زمانی برای مدل‌های مختلف ARMA با روش نسبت درستنمایی به دست آمده است. با این وجود، تاکنون در حوزه زمان، از ماکسیم کردن فاصله‌هایی مانند کولبک-لیبلر و چرنوف برای ممیزی مدل‌های ARMA استفاده نشده است. این در حالی است که در این زمینه تحقیقات گسترده‌ای در ممیزی ناپارامتری سری‌های زمانی در حوزه طیفی و موجک‌ها صورت گرفته است. نظر به اهمیت این معیارهای ممیزی، در این مقاله تقریب‌هایی برای آن‌ها در مدل‌های ARMA به دست آمده که محقق می‌تواند با برازش مدل به داده‌های تحت مطالعه، به ممیزی بین چند مدل مختلف نیز بپردازد.

در بخش ۲ با یک رهیافت جدید تابع درستنمایی مدل ARMA با استفاده از ماتریس باند به دست

آمده است و در یک قضیه خاصیت نرمال ساز بودن تبدیل بکار گرفته شده، اثبات شده است. در بخش ۳، نسبت درستی‌نمایی دو مدل ARMA با یک روش جدید محاسبه شده و در بخش ۴، از نتایج بخش ۲ و ۳ مقاله به منظور تقریب معیارهای ممیزی کولبک-لیبلر و چرنوف استفاده شده است. همچنین در این بخش می‌توان بسط نتایج را برای حالت‌های خاص مدل‌های اتورگرسیو و میانگین متحرک نیز دید. در بخش ۵ مطالعه‌ای شبیه‌سازی صورت گرفته و با روش شبیه سازی توانایی معیارها در ممیزی مدل‌های مختلف ARMA نشان داده شده است. بخش ۶ به استفاده از نتایج به دست آمده برای ممیزی دو مجموعه داده واقعی اختصاص یافته است. سرانجام بحث و نتیجه گیری ارائه شده است.

## ۲ تقریب تابع درستی‌نمایی مدل ARMA با استفاده از ماتریس باند

سری زمانی  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_T)'$  از الگوی  $ARMA(p, q)$  با نمایش

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} \quad (1)$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $\varepsilon_t$  نوفه سفید بوده به طوری که  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$  و فرض می‌شود که این مدل مانا و وارون‌پذیر باشد. این الگو در حالت خاص می‌تواند به شکل اتورگرسیو محض  $AR(p)$  یا میانگین متحرک محض  $MR(q)$  ظاهر شود. حالت خاص  $AR(p)$  به صورت

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

را در نظر بگیرید، که در آن  $x \sim N(0, \Sigma)$ . حال تابع چگالی احتمال  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T)'$  عبارت است از

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2\right\} \\ &= (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=1}^T x_{t-i} x_{t-j}\right\}. \end{aligned}$$

که در آن  $\alpha_0 = 1$  در حالت کلی

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T (x_t - \alpha_1 x_{t-1} - \dots - \alpha_p x_{t-p})^2 &= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=1}^T x_{t-i} x_{t-j} \\ &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^2 \sum_{t=i+1}^{T+i} x_{t-i}^2 \\ &+ 2 \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=j+1}^{T+i} x_{t-i} x_{t-j}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} p(\varepsilon) &= (\pi \sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T}{2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \left[ \sum_{i=0}^p \alpha_i^2 \sum_{t=i+1}^{T+i} x_{t-i}^2 + 2 \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=j+1}^{T+i} x_{t-i} x_{t-j} \right]\right\}. \end{aligned}$$

همچنین می‌توان نشان داد

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i^2 \sum_{t=i+1}^{T+i} x_{t-i}^2 + 2 \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=i+1}^p (-1)^{i+j} \alpha_i \alpha_j \sum_{t=j+1}^{T+i} x_{t-i} x_{t-j} = \mathbf{x}' \mathbf{B}_{2p+1, \alpha} \mathbf{x} \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha}$  ماتریس باند با بعد  $T$  و باند  $(2p+1)$  و به صورت:

$$\mathbf{B}_{2p+1, \alpha} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_p & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{p-1} & a_p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_p & a_{p-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

است، که در آن  $p$  یک مقدار صحیح است (چان و همکاران، ۱۹۹۶). دقت شود که در رابطه (۳)  $a_i$  ها تابعی از  $\alpha_i$  ها در رابطه (۲) هستند. بنابراین ساختار ماتریس کوواریانس یک مدل  $AR(p)$  به صورت

$\Sigma = (\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{B}_{2p+1, \alpha}^{-1})$  است. حال تابع چگالی احتمال بردار  $\mathbf{x}$  به صورت

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} |(\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{B}_{2p+1, \alpha}^{-1})|^{-\frac{1}{2}} \exp\{\mathbf{x}' (\sigma_\varepsilon^2 \mathbf{B}_{2p+1, \alpha}^{-1})^{-1} \mathbf{x}\}$$

است که تابعی از ماتریس  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha}^{-1}$  می‌باشد. هر ماتریس باند دلخواه از مرتبه  $2p+1$  ( $p = 2, 3, \dots$ ) را می‌توان با استفاده از مجموعی وزنی از ماتریس‌های باند ۳ ( $\mathbf{B}_3$ ) تقریب زد. چان (۱۹۹۱) در یک مطالعه عددی نشان داد که بهترین ماتریس باند ۳ در تقریب یک ماتریس متقارن  $2p+1$  به صورت

$$\mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

است. پس تقریب عبارت است از

$$\mathbf{B}_{2p+1, \alpha} \approx \sum_{j=0}^p c_j \mathbf{B}_3^j \quad (5)$$

ضرایب  $c_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ) با توجه به رابطه  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha}$  با  $\mathbf{B}_3$  به دست می‌آیند. به عنوان مثال در یک مدل  $AR(3)$  به شکل  $x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \alpha_3 x_{t-3} + \varepsilon_t$  داریم

$$\begin{cases} c_0 = 1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - 2(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2), \\ c_1 = 3\alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3), \\ c_2 = \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3, \\ c_3 = -\alpha_3. \end{cases}$$

$r$  امین مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{B}_3$  برابر است با

$$\lambda_r = -2 \cos\left(\frac{r\pi}{T+1}\right), \quad (6)$$

و بردار ویژه متناظر با  $\lambda_r$  به صورت

$$\xi'_r = \sqrt{\frac{2}{T+1}} \left\{ \sin \frac{r\pi}{T+1}, \sin \frac{2r\pi}{T+1}, \dots, \sin \frac{Tr\pi}{T+1} \right\}, \quad (r = 1, \dots, T). \quad (۷)$$

است. بنابراین ماتریس  $T \times T$  بردارهای ویژه به صورت  $\mathbf{L} = (\xi_1, \dots, \xi_T)'$  به دست می‌آید. ماتریس  $\mathbf{L}$  متقارن است و همچنین  $\mathbf{L}\mathbf{L}' = \mathbf{L}'\mathbf{L} = \mathbf{I}$  حال داریم

$$\mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1}\mathbf{L}' \approx c_0 + c_1\mathbf{\Lambda}_\nu + \dots + c_p\mathbf{\Lambda}_\nu^p,$$

که در آن یک ماتریس قطری است به طوری که  $r$  امین عنصر روی قطر آن  $[\mathbf{\Lambda}]_{rr} = -2 \cos(\frac{r\pi}{T+1})$  است. زیرا

$$\mathbf{L}\mathbf{B}_\nu^m\mathbf{L}' = (\mathbf{L}\mathbf{B}_\nu\mathbf{L}')(\mathbf{L}\mathbf{B}_\nu\mathbf{L}') \dots (\mathbf{L}\mathbf{B}_\nu\mathbf{L}') = \mathbf{\Lambda}_\nu^m.$$

بنابراین  $\mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1}\mathbf{L}' \approx \sum_{i=0}^p c_i \mathbf{L}\mathbf{B}_\nu^i\mathbf{L}' = \sum_{i=0}^p c_i \mathbf{\Lambda}_\nu^i$  در نتیجه با اعمال تبدیل  $\mathbf{y} = \mathbf{L}'\mathbf{x}$  داریم

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{T}{\nu}} \left| (\sigma_\varepsilon^\nu \mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1, \alpha}^{-1} \mathbf{L}') \right|^{-\frac{1}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \mathbf{y}' (\sigma_\varepsilon^\nu \mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1, \alpha}^{-1} \mathbf{L}')^{-1} \mathbf{y} \right\}.$$

با قرار دادن  $\omega_r = \frac{r\pi}{T+1}$  که در آن  $V_r = \sigma_\varepsilon^\nu \left[ \sum_{j=0}^p c_j (-2 \cos(\omega_r))^j \right]^{-1}$  داریم

$$\mathbf{y}' [(\sigma_\varepsilon^\nu \mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1, \alpha}^{-1} \mathbf{L}')^{-1}] \mathbf{y} = \sum_{r=1}^T \left[ \frac{1}{V_r} \right] y_r^2.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد،  $\left| (\sigma_\varepsilon^\nu \mathbf{L}\mathbf{B}_{\nu p+1, \alpha}^{-1} \mathbf{L}') \right| = \prod_{r=1}^T V_r$  بنابراین

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{T}{\nu}} \left( \prod_{r=1}^T V_r \right)^{-\frac{1}{\nu}} \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^T \left[ \frac{1}{V_r} \right] y_r^2 \right\}, \quad (۸)$$

که در آن  $y_r = \sqrt{\frac{2}{T+1}} \sum_{t=1}^T x_t \sin(\omega_r t)$  ،  $r = 1, \dots, T$  در واقع تبدیل  $\mathbf{y} = \mathbf{L}' \mathbf{x}$  باعث غیر همبسته شدن عناصر بردار  $\mathbf{y}$  می‌شود. علاوه بر آن قضیه ۱، نشان می‌دهد که تحت شرایطی ساده، حتی اگر عناصر بردار  $\mathbf{x}$  نرمال نباشند، عناصر بردار  $\mathbf{y}$  دارای توزیع نرمال خواهند بود. برای یک مدل  $MA(q)$  به شکل  $x_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}$  با اعمال تبدیل  $\mathbf{y} = \mathbf{L}' \mathbf{x}$  به روش مشابه با فرایند  $AR(p)$  می‌توان نشان داد

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \left| \prod_{r=1}^T U_r \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^T \left[ \frac{1}{U_r} \right] y_r^2 \right\}, \quad (9)$$

که در آن  $U_r = \sigma_\varepsilon^2 \left[ \sum_{i=0}^q c_i (-2 \cos(\omega_r))^i \right]^2$ . همچنین برای یک بردار  $\mathbf{x}$  با مدل  $ARMA(p, q)$  نیز با اعمال تبدیل  $\mathbf{y} = \mathbf{L}' \mathbf{x}$  داریم

$$p(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \left| \prod_{r=1}^T W_r \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^T \left[ \frac{1}{W_r} \right] y_r^2 \right\}, \quad (10)$$

که در آن

$$W_r = \frac{\sum_{i=0}^q c_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{j=0}^p c'_j (-2 \cos(\omega_r))^j} \sigma_\varepsilon^2.$$

ضرایب  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) و  $c'_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ) به ترتیب با توجه به رابطه  $\mathbf{B}_{2q+1, \beta}$  و  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha}$  با  $\mathbf{B}_2$  به دست می‌آیند.

قضیه ۱: فرض کنید سری زمانی  $\{x_t, t = 1, \dots, T\}$  از یک الگوی مانا و وارون‌پذیر  $ARMA(p, q)$  به شکل  $\alpha(B)x_t = \beta(B)\varepsilon_t$  پیروی می‌کند، که در آن

$$\alpha(B) = 1 + \alpha_1 B + \dots + \alpha_p B^p, \quad \beta(B) = 1 + \beta_1 B + \dots + \beta_q B^q$$

و فرض می‌شود که  $\alpha(B)$  و  $\beta(B)$  ریشه مشترک نداشته باشند و نوبه سفید دارای گشتاور تا مرتبه سوم متناهی باشد. آنگاه  $y_r = \sqrt{\frac{2}{T+1}} \sum_{t=1}^T x_t \sin(\omega_r t)$  به صورت مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد است.

برهان: از آنجایی که فرایند، مانا است می‌توان نوشت  $x_t = \frac{\beta(B)}{\alpha(B)}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$  که در آن  $\{\psi_j, j = 0, 1, \dots\}$  یک دنباله همگرا به صفر بوده و از اینرو  $x_t$  از یک دنباله مطلقاً جمع‌پذیر از سری زمانی نوفه سفید با میانگین صفر و واریانس متناهی تشکیل شده است. با توجه به همگرا به صفر بودن  $\psi_j$  ها، برای هر  $\varepsilon$  دلخواه یک  $N$  صحیح و مثبت وجود دارد که به ازای آن

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} < \varepsilon. \quad (11)$$

$$y_r = \sqrt{\frac{2}{T+1}} \sum_{t=1}^T \sin(\omega_r t) \left( \sum_{j=0}^N \psi_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right),$$

که در آن با توجه به (11)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} \left\{ \sqrt{\frac{2}{T+1}} \sum_{t=1}^T \sin(\omega_r t) \sum_{j=N+1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \right\} = 0,$$

با اثبات مشابه فولر (۱۹۹۶) می‌توان نشان داد

$$\sqrt{\frac{2}{T+1}} \sum_{t=1}^T \sin(\omega_r t) \sum_{j=0}^N \psi_j \varepsilon_{t-j} = \frac{1}{\sqrt{T+1}} \sum_{t=1}^T \delta_t \varepsilon_t + R_T,$$

که در آن

$$\begin{aligned} \delta_t &= \sqrt{2} \sum_{j=0}^N \psi_j \sin(\omega_r(t+j)), \\ R_T &= \sqrt{\frac{2}{T+1}} \left[ \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{s=j+1}^N \psi_s \varepsilon_{-j} \sin(\omega_r(s-j)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{s=j+1}^N \psi_s \varepsilon_{T-j} \sin(\omega_r(T+s-j)) \right]. \end{aligned}$$



حال  $R_T$  در احتمال به صفر همگرا است و  $\delta_t$  نیز با مقداری متناهی مانند  $M$  کران دار است (فولر، ۱۹۹۶) از این رو

$$s_T^2 = \sum_{t=1}^T Var(\delta_T \varepsilon_t) = CT,$$

که در آن  $C$  یک ثابت متناهی است. حال به ازای مقداری مانند  $\eta = 1$  داریم

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s_T^{2+\eta}} \sum_{t=1}^T E(|\delta_T \varepsilon_t|^{2+\eta}) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{CT})^{2+\eta}} \sum_{t=1}^T \int |\delta_T \varepsilon|^{2+\eta} dF(\varepsilon) \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{CT})^{2+\eta}} \sum_{t=1}^T \int M^{2+\eta} \varepsilon^{2+\eta} dF(\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

در نتیجه بنا بر شرط لیاپونوف عبارت  $\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \delta_T \varepsilon_t$  به توزیع نرمال استاندارد همگرا است. در اینجا با محدود کردن کلاس نوفه سفید به داشتن سه گشتاور متناهی نتیجه قوی‌تر از فولر (۱۹۹۶) را نتیجه می‌دهد. چون شرط لیاپونوف شرط لیندبرگ را نتیجه می‌دهد.

### ۳ تقریب معیارهای کولبک-لیبلر و چرنوف

فرض کنید سری زمانی  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{T-1})'$  متعلق به یکی از دو مدل  $H_1$  یا  $H_2$  به صورت

$$\begin{cases} H_1 : x_t = \alpha_{11}x_{t-1} + \dots + \alpha_{1p}x_{t-p} + \varepsilon_{1t} + \beta_{11}\varepsilon_{1t-1} + \dots + \beta_{1q}\varepsilon_{1t-q} \\ H_2 : x_t = \alpha_{21}x_{t-1} + \dots + \alpha_{2p}x_{t-p} + \varepsilon_{2t} + \beta_{21}\varepsilon_{2t-1} + \dots + \beta_{2q}\varepsilon_{2t-q} \end{cases} \quad (12)$$

باشد. با اعمال تبدیل  $\mathbf{y} = \mathbf{L}'\mathbf{x}$ ، داریم  $y_r | H_1 \sim N(0, W_{1r})$  و  $y_r | H_2 \sim N(0, W_{2r})$  که در آن

$$W_{1r} = \frac{\sum_{i=0}^q c_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{j=0}^p c'_j (-2 \cos(\omega_r))^j} \sigma_{\varepsilon_1}^2, \quad W_{2r} = \frac{\sum_{i=0}^q d_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{j=0}^p d'_j (-2 \cos(\omega_r))^j} \sigma_{\varepsilon_2}^2,$$

ضرایب  $c_i$  و  $c'_j$  با توجه به رابطه ماتریس‌های  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha_1}$  و  $\mathbf{B}_{2q+1, \beta_1}$  در مدل  $H_1$  با ماتریس  $\mathbf{B}_3$  و ضرایب  $d_i$  و  $d'_j$  با توجه به رابطه ماتریس‌های  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha_2}$  و  $\mathbf{B}_{2q+1, \beta_2}$  در مدل  $H_2$  با ماتریس  $\mathbf{B}_3$  به دست می‌آیند. بنابراین لگاریتم نسبت درست‌نمایی عبارت است از

$$LLR = -\frac{1}{\nu} \ln \left( \frac{\prod_{r=1}^T W_{1r}}{\prod_{r=1}^T W_{2r}} \right) + \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^T \left[ \frac{1}{W_{2r}} - \frac{1}{W_{1r}} \right] y_r^2. \quad (13)$$

از لگاریتم نسبت درست‌نمایی می‌توان معیار کولبک-لیبلر را تقریب زد. معیار کولبک-لیبلر توسط کولبک و لیبلر کولبک و لیبلر (۱۹۵۱) و کولبک کولبک (۱۹۷۸) به عنوان یک شبه فاصله بین دو جامعه با توابع احتمال  $p_1(\mathbf{x})$  و  $p_2(\mathbf{x})$  به صورت

$$I(p_1; p_2) := E_{p_1} \left\{ \ln \frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})} \right\} = \int \ln \left[ \frac{p_1(\mathbf{x})}{p_2(\mathbf{x})} \right] p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (14)$$

معرفی گردید. با استفاده از رابطه (۱۳)، به سادگی می‌توان معیار کولبک-لیبلر را به عنوان یک شبه فاصله بین دو مدل  $H_1$  و  $H_2$  به صورت

$$I(H_1, H_2; \mathbf{x}) = \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^T \left[ \frac{W_{1r}}{W_{2r}} + \ln \frac{W_{2r}}{W_{1r}} - 1 \right]. \quad (15)$$

به دست آورد. پارزان (۱۹۹۰) معیار چرنوف را برای ممیزی پیشنهاد کرد. معیار چرنوف به عنوان یک شبه فاصله بین دو جامعه با توابع احتمال  $p_1(\mathbf{x})$  و  $p_2(\mathbf{x})$  عبارت است از (پارزان، ۱۹۹۰):

$$Q_h(p_1; p_2) := -\frac{1}{\nu} \ln E_{p_1} \left\{ \left( \frac{p_2(\mathbf{x})}{p_1(\mathbf{x})} \right)^h \right\}, \quad 0 < h < 1. \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (۱۳) ، می‌توان معیار چرنوف را یک شبه فاصله بین دو مدل  $H_1$  و  $H_2$  به صورت

$$Q(H_1, H_2; \mathbf{x}) = -\frac{1}{T} \left\{ \ln \left( \frac{\prod_{r=1}^T W_{1r}}{\prod_{r=1}^T W_{2r}} \right)^{\frac{h}{\gamma}} + \ln \left( \prod_{r=1}^T \left[ 1 - h \left( 1 - \frac{W_{1r}}{W_{2r}} \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma}} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\gamma T} \left\{ \sum_{r=1}^T \left( \ln \left( \frac{(\gamma - h)W_{2r} + hW_{1r}}{W_{1r}} \right) - h \ln \left( \frac{W_{1r}}{W_{2r}} \right) \right) \right\}. \quad (17)$$

به دست آورد. از روابط (۱۵) و (۱۷) می‌توان برای ممیزی مدل‌های ARMA بهره برد. فرض کنید که بردار سری زمانی مانند  $\mathbf{z}$  می‌بایست به یکی از این دو مدل  $H_1$  یا  $H_2$  اختصاص یابد. با اعمال تبدیل  $\mathbf{L}'\mathbf{z}$  ، بردار جدید  $\mathbf{z}$  تولید می‌شود که برای  $r$  امین عنصر آن داریم ،  $z_r \sim N(0, W_{zr})$  که در آن

$$W_{zr} = \frac{\sum_{i=0}^q e_{zi} (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{j=0}^p e'_{zj} (-2 \cos(\omega_r))^i} \sigma_{\varepsilon_z}^2.$$

ضرایب  $e_{zi}$  و  $e'_{zj}$  نیز با توجه به رابطه ماتریس‌های  $\mathbf{B}_{2p+1, \alpha_z}$  و  $\mathbf{B}_{2q+1, \beta_z}$  مربوط به سری زمانی  $\mathbf{z}$  با ماتریس  $\mathbf{B}_3$  به دست می‌آیند. با استفاده از معیار کولبک-لیبلر در رابطه (۱۵) بردار  $\mathbf{z}$  به مدل اول اختصاص می‌یابد هرگاه

$$I(H_2; \mathbf{z}) - I(H_1; \mathbf{z}) = \frac{1}{\gamma} \sum_{r=1}^T \left[ W_{zr} \left( \frac{1}{W_{2r}} - \frac{1}{W_{1r}} \right) + \ln \left( \frac{W_{2r}}{W_{1r}} \right) \right] \geq 0,$$

و در غیر این صورت به مدل دوم اختصاص می‌یابد. همچنین با استفاده از معیار چرنوف در رابطه (۱۷) بردار  $\mathbf{z}$  به مدل اول اختصاص می‌یابد هرگاه

$$Q(H_2; \mathbf{z}) - Q(H_1; \mathbf{z}) = \frac{1}{\gamma T} \left\{ \sum_{r=1}^T \frac{(\gamma - h)W_{2r} + hW_{zr}}{(\gamma - h)W_{1r} + hW_{zr}} - h \ln \left( \frac{W_{1r}}{W_{2r}} \right) \right\} \geq 0,$$

و در غیر این صورت به مدل دوم اختصاص می‌یابد.

#### ۴ ممیزی مدل‌های ARMA با معیارهای ممیزی

معیارهای ممیزی به دست آمده در بخش قبل وابسته به کمیت‌هایی مانند  $W_{1r}$ ،  $W_{2r}$  و  $W_{zr}$  است. این کمیت‌ها به نوبه خود توابعی از پارامترهای اتورگرسیو و میانگین متحرک سری‌های تحت مطالعه هستند. در صورت مجهول بودن این پارامترها می‌توان به روش ماکسیمم درست‌نمایی آنها را برآورد کرده و سپس کمیت‌های  $W_{zr}$  و  $W_{2r}$ ،  $W_{1r}$  را نیز برآورد نمود. فرض کنید از دو مدل  $ARMA(p, q)$  در رابطه (۱۲) دو نمونه  $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$  (از مدل  $H_1$ ) و  $\{y_1, \dots, y_{n_2}\}$  (از مدل  $H_2$ ) در اختیار باشند. برای هر یک از سری‌های نمونه اول و دوم یک مدل  $ARMA(p, q)$  برازش داده و پارامترهای مدل به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد می‌شود. سپس با استفاده از این پارامترهای برآورد شده، مقادیر  $\hat{c}_{ik}$  و  $\hat{c}'_{jk}$  مربوط به سری  $k$  ام در نمونه اول و مقادیر  $\hat{d}_{ik}$  و  $\hat{d}'_{jk}$  مربوط به سری  $k$  ام در نمونه دوم محاسبه می‌شود. روش محاسبات در ادامه با چند مثال از مدل‌های مختلف شرح داده شده است. با قرار دادن:

$$\begin{aligned} \bar{c}_i &= \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \hat{c}_{ik}, \\ \bar{c}'_j &= \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \hat{c}'_{jk}, \\ \bar{\sigma}_j &= \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \hat{\sigma}_{jk}, \quad j = 1, 2, \\ \bar{d}_i &= \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} \hat{d}_{ik}, \\ \bar{d}'_j &= \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} \hat{d}'_{jk}, \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن  $\hat{\sigma}_{jk}$  برآورد واریانس سری  $k$  ام در نمونه  $j$  ام است. داریم

$$\hat{W}_{1r} = \frac{\sum_{i=0}^q \bar{c}_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{i=0}^p \bar{c}'_i (-2 \cos(\omega_r))^i} \bar{\sigma}_1, \quad \hat{W}_{2r} = \frac{\sum_{i=0}^q \bar{d}_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{i=0}^p \bar{d}'_i (-2 \cos(\omega_r))^i} \bar{\sigma}_2,$$

بار دیگر مسأله تخصیص بردار سری زمانی مشاهده شده  $\mathbf{z}$  به یکی از این دو مدل  $H_1$  یا  $H_2$  را در نظر بگیرید. با برازش یک مدل  $ARMA(p, q)$  به سری زمانی  $\mathbf{z}$ ، مقادیر  $\hat{e}_i$  و  $\hat{e}'_i$  را به ترتیب با استفاده از برآورد پارامترهای میانگین متحرک و اتور گرسیو سری  $\mathbf{z}$  برآورد می‌شود. همچنین با برآورد  $\hat{\sigma}_z^2$  داریم:

$$\hat{W}_{zr} = \frac{\sum_{i=0}^q \hat{e}_i (-2 \cos(\omega_r))^i}{\sum_{i=0}^p \hat{e}'_i (-2 \cos(\omega_r))^i} \hat{\sigma}_z^2. \quad (19)$$

حال بردار  $\mathbf{z}$  با استفاده از معیار کولبک-لیبلر به مدل اول اختصاص می‌یابد هرگاه

$$I(H_2; \mathbf{z}) - I(H_1; \mathbf{z}) = \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^T [\hat{W}_{zr} (\frac{1}{\bar{W}_{\nu r}} - \frac{1}{\bar{W}_{1r}}) + \ln(\frac{\bar{W}_{\nu r}}{\bar{W}_{1r}})] \geq 0, \quad (20)$$

و در غیر این صورت به مدل دوم اختصاص می‌یابد. همچنین بردار  $\mathbf{z}$  با استفاده از معیار چرنوف به مدل اول اختصاص می‌یابد هرگاه

$$Q(H_2; \mathbf{z}) - Q(H_1; \mathbf{z}) = \frac{1}{\nu T} \left\{ \sum_{r=1}^T \frac{(1-h)\bar{W}_{\nu r} + h\hat{W}_{zr}}{(1-h)\bar{W}_{1r} + h\hat{W}_{zr}} - h \ln\left(\frac{\bar{W}_{1r}}{\bar{W}_{\nu r}}\right) \right\} \geq 0, \quad (21)$$

و در غیر این صورت به مدل دوم اختصاص می‌یابد.

**مثال ۱:** فرض کنید که سری زمانی  $t = 1, \dots, T$ ،  $z_t = \varphi z_{t-1} + \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ ، می‌بایست به یکی از دو مدل  $H_1: x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$  یا  $H_2: y_t = \alpha_2 y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_2 \varepsilon_{t-1}$  را به ترتیب از جوامع اول و دوم اختصاص داده شود که در آن نمونه‌های  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n_1}$  و  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n_2}$  را به ترتیب از جوامع اول و دوم در اختیار داریم. همچنین فرض کنید که  $\sigma_1 = \sigma_2$  باشد. پس از برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درست‌نمایی داریم:

$$c_0 = 1 + \beta_1^2, c_1 = \beta_1, c'_0 = 1 + \alpha_1^2, c'_1 = \alpha_1 \Rightarrow \bar{W}_{1r} = \frac{1 + \bar{\beta}_1^2 - 2\bar{\beta}_1 \cos(\omega_r)}{1 + \bar{\alpha}_1^2 - 2\bar{\alpha}_1 \cos(\omega_r)}$$

$$d_0 = 1 + \beta_2^2, d_1 = \beta_2, d'_0 = 1 + \alpha_2^2, d'_1 = \alpha_2 \Rightarrow \bar{W}_{2r} = \frac{1 + \bar{\beta}_2^2 - 2\bar{\beta}_2 \cos(\omega_r)}{1 + \bar{\alpha}_2^2 - 2\bar{\alpha}_2 \cos(\omega_r)}$$

$$e_0 = 1 + \theta^2, e_1 = \theta, e'_0 = 1 + \varphi^2, e'_1 = \varphi \Rightarrow \hat{W}_r = \frac{1 + \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta} \cos(\omega_r)}{1 + \hat{\varphi}^2 - 2\hat{\varphi} \cos(\omega_r)}$$

که در آن  $\bar{\beta}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} \hat{\beta}_{2k}$ ،  $\bar{\beta}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\beta}_{1k}$ ،  $\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{k=1}^{n_2} \hat{\alpha}_{2k}$ ،  $\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} \hat{\alpha}_{1k}$  و  $\hat{\beta}_{ik}$  و  $\hat{\alpha}_{ik}$  نیز به ترتیب برآورد ضریب اتور گرسیو و میانگین متحرک مربوط به سری  $k$  ام در نمونه  $i$  ام ( $i = 1, 2$ ) هستند. بنابراین بردار  $Z$  با استفاده از معیار کولبک-لیبلر به مدل اول اختصاص می‌یابد هرگاه

$$\sum_{r=1}^T [\hat{W}_r \left( \frac{1}{\bar{W}_{2r}} - \frac{1}{\bar{W}_{1r}} \right) + \ln \left( \frac{\bar{W}_{2r}}{\bar{W}_{1r}} \right)] \geq 0,$$

و در غیر این صورت به مدل دوم اختصاص می‌یابد. همچنین برای تخصیص بردار  $Z$  با استفاده از معیار چرنوف می‌توان از رابطه (۲۱) استفاده کرد.

## ۵ مطالعه شبیه‌سازی

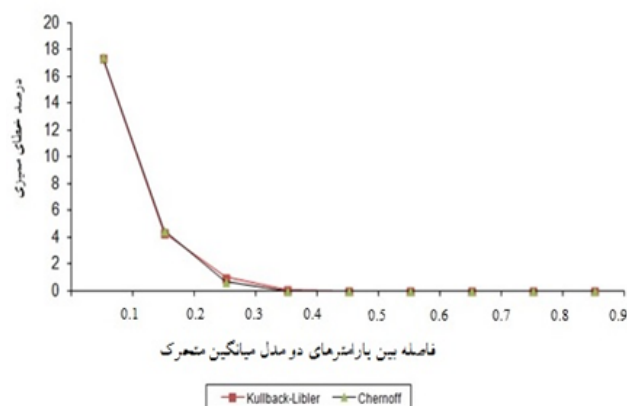
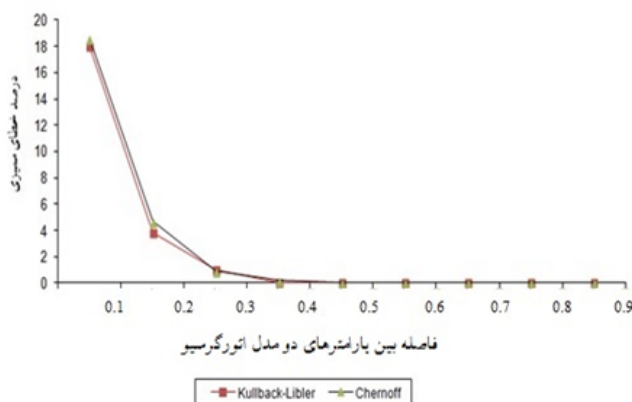
به منظور بررسی دقت نتایج به دست آمده در بخش قبل خصوصاً قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱) یک مطالعه شبیه‌سازی انجام شده است. برنامه‌های شبیه‌سازی در نرم افزار *SPLUS/۲۰۰۸* نوشته شده‌اند. از میان مدل‌های مختلف ARMA، چهار مدل  $AR(1)$ ،  $AR(2)$ ،  $MA(1)$ ،  $MA(2)$  و  $ARMA(1, 1)$  مورد توجه قرار گرفته‌اند. از هر یک از دو مدل  $H_1$  و  $H_2$  برای مقادیر مختلف  $\alpha$  و  $\beta$  یک نمونه آزمایشی ۳۰۰ تایی با طول ۲۰۰ شبیه‌سازی شد. واریانس‌های دو جامعه برابر یک فرض شده‌اند. سپس با استفاده از این نمونه‌ها پارامترهای دو جامعه به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد شده و با استفاده از آنها مقادیر  $\hat{c}_{ik}$  و  $\hat{c}'_{jk}$  مربوط به سری  $k$  ام از مدل اول و مقادیر  $\hat{d}_{ik}$  و  $\hat{d}'_{jk}$  مقادیر مربوط به سری  $k$  ام از جامعه دوم محاسبه شده است. سپس با استفاده از رابطه (۱۸) میانگین آنها به عنوان پارامترهای نهایی هر یک از دو مدل در نظر گرفته شده است.

در مرحله بعد از هر دو مدل  $H_1$  و  $H_2$ ، ۵۰ سری زمانی هر یک با طول ۲۰۰ شبیه‌سازی شد. این سری‌ها مستقل از نمونه‌هایی هستند که برای برآورد پارامترها استفاده شده‌اند. سری‌های تولید شده با استفاده از قاعده ممیزی کولبک-لیبلر در رابطه (۲۰) و قاعده ممیزی چرنوف در رابطه (۲۱) به یکی از دو مدل تخصیص داده شده‌اند. در معیار چرنوف پارامتر  $h$  برابر  $3/0$  انتخاب شده است. در شکل ۱ درصد مشاهدات اشتباه تخصیص داده شده برای مدل  $MA(1)$  نمایش داده شده است. نتایج مدل  $AR(1)$

مشابه است که برای صرفه جویی در صفحات آورده نشده است. جدول ۱ (ممیزی بین دو مدل اتورگرسیو)، عملکرد معیار کولبک-لیبلر به صورت جزئی بهتر از معیار چرنوف بوده حال آنکه در جدول ۲ (ممیزی بین دو مدل میانگین متحرک)، عملکرد معیار چرنوف به صورت جزئی بهتر بوده است. با این وجود تفاوت زیادی بین عملکرد این دو معیار مشاهده نمی‌شود. در مجموع عملکرد معیارهای ممیزی خوب بوده و با دور شدن مدل‌ها درصد خطای ممیزی کاهش یافته و به صفر می‌رسد. نتایج ممیزی بین مدل‌های  $AR(2)$ ،  $MA(2)$  و  $ARMA(1,1)$  را می‌توان به ترتیب در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ مشاهده کرد. به منظور بررسی تأثیر افزایش طول سری زمانی بر عملکرد معیارهای ممیزی پیشنهاد شده، در اینجا علاوه بر سری‌هایی با طول ۲۰۰، ۵۰ سری با طول ۵۰۰ نیز از هر یک از دو مدل تولید شده و سپس با قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱) به یکی از دو مدل تخصیص یافته‌اند. همچنین به منظور بررسی خاصیت نرمال سازی تبدیل پیشنهاد شده در مطالعه شبیه‌سازی با سری‌هایی با خطاهای غیرنرمال (توزیع تی استیودنت با ۱۰ درجه آزادی) نیز تکرار شده است. در جداول ۱ تا ۳ درصد مشاهداتی که به اشتباه تخصیص داده شده‌اند، درج شده است. همان‌گونه که در جدول‌های ۱ تا ۳ ملاحظه می‌شود عملکرد معیارهای ممیزی حتی در مواردی که پارامترهای جوامع بسیار نزدیک بوده‌اند خوب بوده و با دور شدن جوامع درصد خطای ممیزی کاهش یافته و به صفر می‌رسد. از سوی دیگر با افزایش طول سری زمانی از ۲۰۰ به ۵۰۰ نتایج ممیزی بسیار بهبود یافته و در بسیاری از موارد خطای ممیزی به صفر رسیده است که این نشان دهنده سازگاری معیارهای پیشنهادی در این مقاله می‌باشد. همچنین نتایج ممیزی فرآیندهای غیرنرمال نیز خوب بوده و نشان می‌دهد که معیارهای پیشنهادی در این مقاله توانایی ممیزی فرآیندهای غیرنرمال را نیز دارند. از دیگر نکات قابل توجه آنکه خطای ممیزی دو معیار کولبک-لیبلر و چرنوف مشابه بوده و در غالب موارد یکسان می‌باشند. مقایسه نتایج به دست آمده با بهترین نتایجی که در حوزه زمان و فرکانس توسط چینی پرداز و همکاران (۱۳۸۸) به دست آمده است نشان می‌دهد که خطای ممیزی در اینجا بطور قابل ملاحظه‌ای کمتر می‌باشد. همچنین سرعت انجام محاسبات بسیار بالا می‌باشد. این امر به دلیل قطری شدن ماتریس واریانس کوواریانس سری است.

## ۶ ممیزی داده‌های واقعی

در این بخش توانایی قواعد ممیزی پیشنهاد شده در این مقاله را با دو مجموعه داده واقعی، داده‌های درآمد و رشد جمعیت در ایالت‌های مختلف آمریکا مطالعه خواهیم کرد. هر کدام از این دو مجموعه داده شامل دو گروه مجزا و تمامی سری‌های زمانی در دو گروه ناماناستند و در نتیجه قبل از تحلیل



شکل ۱: درصد خطای ممیزی بین دو مدل اتورگرسو با استفاده از تقریب معیارهای کولبک-لیبلر و چرنوف به ازای فاصله بین پارامترهای دو مدل.

می‌بایست مانا شوند. اطلاعات کامل در رابطه با ماهیت داده‌ها و نحوه ایستاسازی آنها در کالپاکیس و همکاران (۲۰۰۱) آمده است. الف-داده‌های درآمد: داده‌های درآمد یک مجموعه از سری‌های زمانی مربوط به میزان درآمد در ۲۵ ایالت آمریکا در فاصله سال‌های ۱۹۲۹ تا ۱۹۹۹ هستند و در سایت <http://www.bea.gov/bea/regional/spi> قابل دسترسی هستند. ایالت‌ها (با حروف اختصاری) عبارتند از: *CT, DC, DE, FL, MA, ME, MD, NC, NJ, NY, PA, RI, VA, VT*, *SD, WV, CA, IL, ID, IA, IN, KS, ND, NE, OK* شامل دو گروه هستند: گروه اول شامل ایالت‌های ساحل شرقی آمریکا به همراه دو ایالت کالیفرنیا (*CA*) و ایلینویز (*IL*) می‌شود که در آنها روند افزایش درآمد بسیار سریع بوده است. ایالت‌های میانه و غربی



جدول ۱: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند  $AR(2)$  برای پارامترهای مختلف  $\alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{11}$  و  $\alpha_{22}$  با قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱).

$$H_2 : x_t = \alpha_{21}x_{t-1} + \alpha_{22}x_{t-2} + \varepsilon_t \text{ در مقابل } H_1 : x_t = \alpha_{11}x_{t-1} + \alpha_{12}x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$(\alpha_{11}, \alpha_{12})$							
Non-Gaussian $T = 200(500)$				Gaussian $T = 200(500)$			
$(-\alpha_1, -\alpha_2)$	$(-\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha_1, \alpha_1)$	$(\alpha_1, \alpha_2)$	$(-\alpha_1, -\alpha_2)$	$(-\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha_{21}, \alpha_{22}) \downarrow$
(۰)۰	(۰)۳	(۶)۱۰	(۹)۲۵	(۰)۰	(۰)۰	(۲۰) ۲۴	(۰)۲, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۳	(۶)۱۰	(۸)۲۵	(۰)۰	(۰)۰	(۲۰) ۲۴	(۰)۲, (۰)۲
(۱۶)۲۷	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۹)۲۲	(۰)۲	(۰)۰	(-۰)۲, (-۰)۲
(۱۶)۲۷	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۹)۲۲	(۰)۲	(۰)۰	(-۰)۲, (-۰)۲
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۵, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۵, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۳	(۰)۳	(۱)۹	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۶	(۰)۸, (۰)۴
(۰)۰	(۰)۳	(۰)۳	(۱)۹	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۶	(۰)۸, (۰)۴
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲	(۰)۳	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۳	(۰)۴, (۰)۸
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲	(۰)۳	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۳	(۰)۴, (۰)۸

جدول ۲: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند  $MA(2)$  برای پارامترهای مختلف  $\beta_{21}, \beta_{12}, \beta_{11}$  و  $\beta_{22}$  با قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱).

$$H_2 : x_t = \varepsilon_t - \beta_{21}\varepsilon_{t-1} - \beta_{22}\varepsilon_{t-2} \text{ در مقابل } H_1 : x_t = \varepsilon_t - \beta_{11}\varepsilon_{t-1} - \beta_{12}\varepsilon_{t-2}$$

$(\beta_{11}, \beta_{12})$							
Non-Gaussian $T = 200(500)$				Gaussian $T = 200(500)$			
$(-\alpha_1, -\alpha_2)$	$(-\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha_1, \alpha_1)$	$(\alpha_1, \alpha_2)$	$(-\alpha_1, -\alpha_2)$	$(-\alpha_1, \alpha_2)$	$(\alpha_1, \alpha_2)$	$(\beta_{21}, \beta_{22}) \downarrow$
(۰)۰	(۰)۱	(۴)۱۲	(۱۲)۲۴	(۰)۰	(۰)۱	(۱۴) ۲۶	(۰)۲, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۱	(۴)۱۲	(۱۲)۲۴	(۰)۰	(۰)۱	(۱۴) ۲۶	(۰)۲, (۰)۲
(۱۴)۲۳	(۰)۲	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲۱	(۰)۲	(۰)۰	(-۰)۲, (-۰)۲
(۱۴)۲۳	(۰)۱	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲۱	(۰)۲	(۰)۰	(-۰)۲, (-۰)۲
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۳	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۵, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۳	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۵, (۰)۲
(۰)۰	(۰)۱	(۰)۲	(۲)۷	(۰)۱	(۰)۲	(۱)۹	(۰)۸, (۰)۴
(۰)۰	(۰)۱	(۰)۲	(۲)۷	(۰)۲	(۰)۲	(۱)۹	(۰)۸, (۰)۴
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۱)۳	(۰)۴, (۰)۸
(۰)۰	(۰)۰	(۰)۲	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۱)۳	(۰)۴, (۰)۸

آمریکا گروه دوم را تشکیل می‌دهند که در آنها روند افزایش درآمد کند بوده است. این مجموعه از سری‌ها نامانا در میانگین و واریانس هستند. با مراحل پیشنهاد شده توسط کالپاکیس و همکاران (۲۰۰۱) سری‌ها ایستا شده و در نهایت به آنها مدل  $ARIMA(1, 1, 0)$  برازش شد. برای ممیزی این مجموعه داده‌ها از دو قاعده ممیزی پیشنهادی (۲۰) و (۲۱) استفاده شد. در روش یکی را کنار گذاشتن<sup>۱</sup>، تمامی سری‌ها توسط هر دو معیار ممیزی کولبک-لیبلر و چرنوف به درستی به جوامع خود تخصیص یافتند. قابل ذکر است که در معیار چرنوف برای مقادیر مختلف  $h$  نتایج یکسانی حاصل می‌شود.

<sup>1</sup>Leave-One-Out method

جدول ۳: نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند  $ARMA(1, 1)$  برای پارامترهای مختلف  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  و  $\beta_2$  با قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱).

$$H_2 : x_t = \alpha_2 x_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_2 \varepsilon_{t-1} \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$(\alpha_1, \beta_1)$							
Non-Gaussian $T = 200(500)$				Gaussian $T = 200(500)$			
$(-\alpha_1, -\beta_1)$	$(\alpha_1, \beta_1)$	$(\alpha_2, \beta_2)$	$(\alpha_2, \beta_2)$	$(-\alpha_1, -\beta_1)$	$(\alpha_1, \beta_1)$	$(\alpha_2, \beta_2)$	$(\alpha_2, \beta_2)$
(۰)۰	(۹)۳۰	(۱۶)۲۵	(۱۲)۲۷	(۰)۰	(۱۳)۲۴	(۹)۲۷	$(\alpha_2, \beta_2) \downarrow$ (۰)۳, (۰)۱
(۰)۱	(۹)۳۲	(۱۷)۲۶	(۱۱)۲۳	(۰)۰	(۱۳)۲۳	(۱۰)۲۵	
(۰)۰	(۹)۲۵	(۱۷)۱۸	(۱۶)۲۶	(۰)۳	(۱۱)۲۷	(۱۵)۲۴	(۰)۴, (۰)۲
(۰)۰	(۱۰)۲۰	(۱۶)۱۸	(۱۶)۲۶	(۰)۲	(۹)۲۷	(۱۵)۲۲	
(۰)۷	(۲)۳	(۲)۳	(۰)۱۱	(۲)۹	(۰)۱۰	(۱)۱۱	(۰)۳, (۰)۴
(۰)۷	(۲)۳	(۲)۳	(۰)۱۰	(۲)۷	(۱)۱۰	(۱)۱۱	
(۰)۴	(۰)۱۰	(۲)۱۱	(۰)۷	(۲)۶	(۲)۸	(۴)۱۰	(۰)۱, (۰)۲
(۱)۴	(۰)۱۰	(۲)۱۲	(۰)۷	(۲)۶	(۲)۸	(۴)۱۰	
(۱۱)۱۶	(۰)۰	(۰)۱	(۰)۰	(۹)۲۶	(۰)۰	(۰)۰	$(-\alpha_1, -\beta_1)$ (۰)۰
(۱۱)۱۵	(۰)۰	(۰)۰	(۰)۰	(۱۱)۲۵	(۰)۰	(۰)۰	

**داده‌های جمعیت:** داده‌های جمعیت نیز یک مجموعه از سری‌های زمانی مربوط به میزان درآمد در

۲۰ ایالت آمریکا در فاصله سال‌های ۱۹۰۰ تا ۱۹۹۹ هستند. این داده‌ها را می‌توان از سایت

[http://www.census.gov/population/estimates/st\\_stts.html](http://www.census.gov/population/estimates/st_stts.html) اخذ نمود. این ۲۰ ایالت

شامل دو گروه هستند. در ایالت‌های:  $CA, CO, FL, GA, MD, NC, SC, TN, TX, VA$  و

$WA$  رشد جمعیت سریع بوده و ایالت‌های:  $IL, MA, MI, NJ, NY, OK, PA, ND, SD$

رشد جمعیت تثبیت شده بوده است. این مجموعه از سری‌ها نیز نامانا در میانگین و واریانس هستند. بار

دیگر به پیروی از کالپاکیس و همکاران (۲۰۰۱) و با انجام مراحل پیشنهاد شده توسط آنها سری‌ها مانا

شده و در نهایت به این سری‌ها نیز مدل  $ARIMA(1, 1, 0)$  برازش شد. برای ممیزی این مجموعه داده‌ها

از دو قاعده ممیزی پیشنهادی (۲۰) و (۲۱) استفاده شد. در روش یکی را کنار گذاشتن، ۱۶ سری توسط

قواعد ممیزی (۲۰) و (۲۱) به درستی به جوامع خود تخصیص یافتند. ایالت‌های  $CA$  و  $WA$  از گروه

اول و ایالت‌های  $IL$  و  $MA$  از گروه دوم به اشتباه تخصیص یافتند. در اینجا نیز، با مقادیر مختلف  $h$  در

معیار چرنوف نتایج یکسانی حاصل می‌شود.

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله با رهیافتی جدید نشان داده شد که تابع اتوکواریانس یک مدل ARMA دارای ساختار

یک ماتریس باند است. سپس یک تبدیل با استفاده از بردارهای ویژه ماتریس باند برای محاسبه تابع

درست‌نمایی یک مدل ARMA پیشنهاد شد. در تبدیل پیشنهادی به دلیل قطری شدن ماتریس کوواریانس سری، تعداد محاسبات برای محاسبه معکوس ماتریس کوواریانس و دیگر محاسبات به مقدار بسیار زیادی کاهش می‌یابد. در قضیه ۱ نشان داده شد که تبدیل پیشنهادی نرمال‌ساز است. تقریب‌هایی برای معیارهای کولبک-لیبلر و چرنوف بدست آمد. همچنین دو قاعده برای ممیزی مدل‌های ARMA با استفاده از تقریب‌های به دست آمده ارائه گردید. بر اساس داده‌های شبیه‌سازی شده و واقعی، توانایی روش پیشنهادی در ممیزی مدل‌های مختلف ARMA نشان داده شد. نتایج بیانگر عملکرد مناسب قواعد ممیزی پیشنهادی بود. گالینو و پنا (۲۰۰۷) و پنا و گالینو (۲۰۰۸) تحقیقاتی در مورد ارتباط بین مباحث ممیزی و انتخاب مدل در سری‌های زمانی، بخصوص مدل‌های ARMA انجام داده‌اند. بر این اساس می‌توان در تحقیقات بعد نتایج بدست آمده را به راحتی در زمینه انتخاب مدل به کار گرفت.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و سردبیر محترم مجله به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان و اصلاحات پیشنهادی ویراستار مجله که در بالا بردن کیفیت مقاله موثر بود نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

- چینی پرداز، ر.، منصوری، ب. و شفیعی بابائی، س. (۱۳۸۸)، ممیزی سری‌های زمانی ARMA مبتنی بر معیارهای واگرایی: روش حوزه فرکانس. مجله پژوهش‌های آماری ایران، ۶، ۳۷-۵۵.
- Alagon, J. (1986), *Discrimination Analysis for Time Series. Ph.D. Thesis*, Oxford University.
- Chan, H. T. (1991), *Discriminant Analysis of Time Series, Ph.D. Thesis*, Newcastle University.
- Chan, H. T., Chinipardaz, R. and Cox, T. F. (1996), Discrimination of AR, MA and ARMA Time Series Models, *Communications in Statistics - Theory and Method*, **25**, 1247-1260.
- Chernoff, H. (1952), A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the Sum of the Observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 573-578.
- Chinipardaz, R. (2000), Discrimination Analysis in AR(1) Plus Noise Processes, *Iranian Journal of Science and Technology*, Transaction A, **24**, 165-172.

- Dargahi - Noubary, G. R. and Laycock, P. J. (1981), Spectral Ratio Discriminants and Information Theory, *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 71-86.
- Fryzlewicz, P. and Ombao, H. (2009), Consistent Classification of Non Stationary Time Series Using Stochastic Wavelet Representations. *Journal of American Statistical Association*, **104**, 299-312.
- Fuller, W. A. (1996), *Introduction to Statistical Time Series, 2nd Edt.*, John Wiley, New York.
- Galeano, P. and Peña, D. (2007), On the Connection Between Model Selection Criteria and Quadratic Discrimination in ARMA Time Series Models, *Statistics and Probability Letters*, **77**, 896-900.
- Kakizawa, Y., Shumway, R. and Taniguchi, M. (1998), Discrimination and Clustering for Multivariate Time Series, *Journal of American Statistical Association*, **93**, 328-340.
- Kalpakis, K., Gada, D. and Puttagunta, V. (2001), Distance Measures for Effective Clustering of ARIMA Time Series, *Proceedings of the IEEE International Conference on Data Mining, San Jose, CA*, 273-280.
- Kullback, S. (1978), *Information Theory and Statistics*, Dover Publications, Inc, New York.
- Kullback, S. and Leibler, R. A. (1951), On Information and Sufficiency, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79-86.
- Maharaj, E. A. and Alonso, A. M. (2007), Discrimination of Locally Stationary Time Series Using Wavelets, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 879-895.
- Mansouri, B. and Chinipardaz, R. (2016), Asymptotic Information Measures Discrimination of Non-Stationary Time Series based on Wavelet Domain, *Revista Colombiana de Estadística*, **39**, 81-95.
- Mansouri, B., Chinipardaz, R. and Parham, G. A. (2010), Discrimination Analysis in AR(p) Plus Different Noises Processes. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science*, **35**, 139-150.
- Parzen, E. (1990), Time Series, Statistics and Information, *IMA Preprint Series 663*, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnesota.
- Peña, D. and Galeano, P. (2008), A Unified Approach to Model Selection, Discrimination, Goodness of Fit and Outliers in Time Series, *Advances in Mathematics and Statistical Modeling*, *BC Arnold et al (eds.)*, Birkhäuser Boston, 267-278.

- Shumway, R. H. (2003), Time-Frequency Clustering and Discriminant Analysis, *Statistics and Probability Letters*, **63**, 307-314.
- Shumway, R. H. and Stoffer, D. S. (2011), *Time Series Analysis and its Applications with R Examples*, 3rd Edt., Springer, New York.
- Shumway, R. H. and Unger, A. N. (1974), Linear Discriminant Function for Stationary Time Series, *Journal of American Statistical Association*, **69**, 948-956.