

توزیع مقادیر کرانگین موزون و ویژگی‌های آن

مهدیه مظفری^۱، مهرداد نادری^۲، علیرضا عربپور^۲

گروه آمار، مجتمع آموزش عالی بم

^۲بخش آمار، دانشگاه شهید باهنر کرمان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۲/۲۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۱/۲۶

چکیده: در این مقاله یک توزیع وزن دار شده جدید بر پایه توزیع مقادیر کرانگین معرفی می‌گردد. ویژگی‌ها و مشخصه‌های اساسی این توزیع از قبیل تابع توزیع تجمعی، تابع مولد گشتاور، ضریب چولگی و کشیدگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از به دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها، دو مثال واقعی برای بررسی مناسب بودن مدل و عملکرد برآوردها ارائه شده است. واژه‌های کلیدی: برآورد ماکسیمم درستنمایی، توزیع آلفا-چوله، توزیع مقادیر کرانگین، توزیع مقادیر کرانگین موزون.

۱ مقدمه

یکی از توزیع‌های پرکاربرد در مسائلی مانند قابلیت اعتماد، زیست شناسی، نظریه تجدید، تحلیل بقا و ... توزیع‌های موزون هستند. توزیع‌های موزون نخستین بار توسط پتل و راتو (۱۹۷۷) مطرح شده و ویژگی‌ها و حالات خاص و متفاوت آنها در مقالات زیادی مورد بحث قرار گرفته‌اند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ بوده و $W(\cdot)$ یک تابع وزن باشد. در این صورت متغیر تصادفی $Y = W(X) \geq 0$ دارای توزیع موزون نسبت به X یا نسبت به $f_X(x)$ است. در این صورت

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مهرداد نادری، mehrdad.naderi@gmail.com

تابع چگالی Y با فرض آنکه $E(W(X)) < \infty$ ، به صورت

$$f_Y(y) = \frac{yf_X(y)}{E(Y)}, \quad (1)$$

خواهد بود. یکی از حالت‌های خاص از خانواده توزیع‌های موزون، خانواده توزیع‌های چوله متقارن است. توزیع متغیر تصادفی X چوله متقارن نامیده می‌شود، هرگاه

$$f(x) = 2g(x)G(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

که در آن $g(\cdot)$ یک تابع چگالی احتمال متقارن حول صفر و $G(\cdot)$ یک تابع با شرایط $0 \leq G(x) \leq 1$ و $G(x) + G(-x) = 1$ است.

به عنوان یک حالت خاص، اگر به جای تابع $G(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی $g(\cdot)$ به همراه یک پارامتر چولگی به صورت $G(\lambda x)$ جایگزین شود، گروهی از توزیع‌های چوله به دست خواهد آمد (آرنولد و لین، ۲۰۰۴). بدین ترتیب خانواده توزیع چوله نرمال^۱ تک متغیره توسط آزالینی (۱۹۸۵) معرفی گردید، که تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_Y(y; \lambda) = 2\phi(y)\Phi(\lambda y), \quad y, \lambda \in \mathbb{R},$$

است، که در آن Φ و ϕ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد و λ پارامتر چولگی است که میزان چولگی توزیع را کنترل می‌نماید. تعمیم‌های زیاد دیگری از توزیع‌های چوله متقارن توسط پژوهشگران مورد مطالعه قرار گرفته است. به عنوان مثال می‌توان به آرلانو-واله (۲۰۰۴)، گومز و همکاران (۲۰۰۶) و نکوخو و علامت‌ساز (۲۰۱۱) اشاره کرد. در میان این تعمیم‌ها، الال-الیورو (۲۰۱۰) یک کلاس جدید از توزیع‌های چوله نرمال را با عنوان خانواده توزیع‌های آلفا-چوله-نرمال^۲ و با در نظر گرفتن تابع وزن

$$W(X) = (1 - \alpha X)^2 + 1, \quad (2)$$

¹Skew Normal Distribution

²Alpha-Skew-Normal Distribution

در رابطه (۱) معرفی کرد، که در آن X دارای توزیع نرمال استاندارد است. دلیل استفاده از این تابع، ساخت توزیع‌های دومدی و چوله است، که امکان برازش بهتر به داده‌ها را فراهم می‌آورد. پس از وی، هرندی و علامت‌ساز (۲۰۱۳) کلاس توزیع‌های آلفا-چوله-لاپلاس^۳ را طبق همان ساختار، بیان کردند. اخیراً نیز هزریکا و چاکرابرتی (۲۰۱۴) خانواده توزیع‌های آلفا-چوله-لجستیک^۴ را مورد بررسی قرار دادند. تمامی این محققین نشان دادند که توزیع‌های به دست آمده به دلیل حداکثر دومدی بودن تابع چگالیشان، برای برازش بر داده‌ها منعطف‌تر از سایر توزیع‌ها هستند.

در این مقاله تلاش می‌شود یک توزیع موزون جدید بر اساس توزیع مقادیر کرانگین و تابع وزنی (۲) معرفی گردد. دلیل اصلی استفاده از توزیع مقادیر کرانگین ارتباط بین این توزیع و نظریه مقادیر کرانگین با توزیع‌های چوله است که این ارتباط نخستین بار توسط چانگ و جنتن (۲۰۰۷) مطرح گردیده است. آنها نشان دادند که تحت شرایط معین می‌توان توزیع مقادیر کرانگین را در خانواده توزیع‌های چوله متقارن معرفی کرد. همچنین پس از بررسی ویژگی‌ها و مشخصه‌های توزیع معرفی شده و یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با مثال‌های واقعی نشان داده خواهد شد که توزیع مقادیر کرانگین موزون انعطاف‌پذیر است.

در بخش ۲ پس از بیان توزیع مقادیر کرانگین، توزیع مقادیر کرانگین موزون معرفی خواهد شد. برخی از ویژگی‌ها و مشخصه‌های توزیع جدید در بخش ۳ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. پس از معرفی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی توزیع مقادیر کرانگین موزون در بخش ۴، با بیان دو مثال واقعی مناسب مدل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در انتها یک نتیجه‌گیری کلی به همراه برخی پیشنهادات بیان خواهد شد.

۲ توزیع مقادیر کرانگین موزون

نظریه مقادیر کرانگین و توزیع‌های متناظر آن در پدیده‌های طبیعی مانند بارش، سیل، تندبادها، آلودگی هوا، نتایج پیشرفته ظریف و حساس در فرایندهای نقطه‌ای کاربرد فراوان دارند. متغیر تصادفی X دارای توزیع مقادیر کرانگین است، هرگاه دارای تابع توزیع به صورت

$$F_X(x; \mu, \sigma) = \exp\{-\exp(-\frac{x - \mu}{\sigma})\}, \quad (۲)$$

^۳Alpha-Skew-Laplace Distribution

^۴Alpha-Skew-Logistic Distribution

باشد و با نماد $X \sim EV(\mu, \sigma)$ نشان داده می‌شود. در ادامه، توزیع مقادیر کرانگین موزون معرفی می‌شود.

تعریف ۱: متغیر تصادفی Y دارای توزیع مقادیر کرانگین دومدی است و با $Y \sim BEV(\mu, \sigma)$ نشان داده می‌شود، هرگاه دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$f(y) = \frac{\epsilon}{\sigma^2 \pi^2 + \epsilon(\mu + \sigma\gamma)^2} y^\gamma \exp\left\{-\frac{y-\mu}{\sigma} \exp\left(-\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}, \quad (4)$$

باشد، که در آن $\gamma \approx 0.5772$. واضح است که اگر $X \sim EV(0, 1)$ ، آنگاه Y یک توزیع موزون از X با وزن $W(X) = X^2$ است.

فرض کنید تابع وزن به فرم (۲) باشد و برای سادگی و بدون از دست دادن کلیت مسئله، μ و σ در تابع چگالی احتمال (۳) به ترتیب صفر و یک باشند.

تعریف ۲: اگر متغیر تصادفی Y دارای تابع چگالی احتمال به صورت

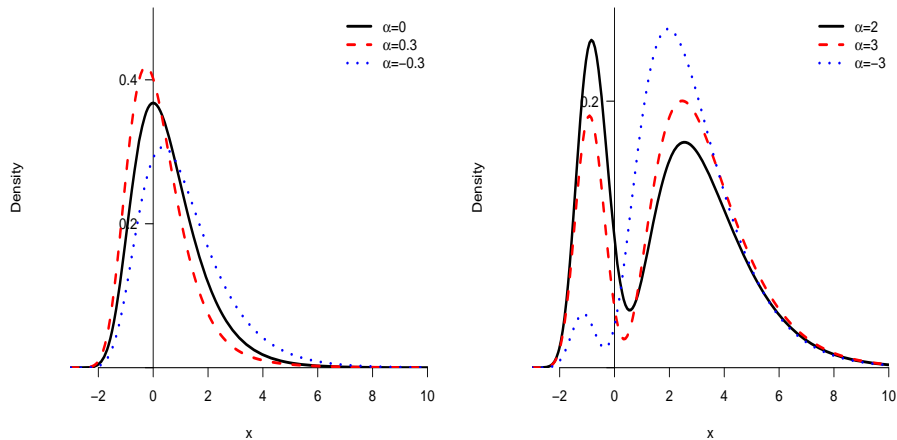
$$f(y; \alpha) = C^{-1}((1 - \alpha y)^\alpha + 1) \exp\{-y - \exp\{-y\}\}, \quad y, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

باشد، که در آن $C = 2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2(\pi^2/6 + \gamma^2)$ ، در این صورت Y دارای توزیع مقادیر کرانگین موزون است و با نماد $Y \sim WEV(\alpha)$ نشان داده می‌شود.

در این تابع چگالی، α یک پارامتر چولگی است که سبب به وجود آمدن چولگی در توزیع می‌شود. حال اگر $Y \sim WEV(\alpha)$ ، با در نظر گرفتن پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ متغیر تصادفی $Z = \mu + \sigma Y$ دارای تابع چگالی به صورت

$$f(z; \mu, \sigma, \alpha) = C^{-1} \sigma^{-1} \left((1 - \alpha(z - \mu)/\sigma)^\alpha + 1 \right) \times \exp\left\{-\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) - \exp\left\{-\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right\}\right\}, \quad (6)$$

است، که با نماد $Z \sim WEV(\mu, \sigma, \alpha)$ نشان داده می‌شود. نمودار تابع (۵) برای مقادیر مختلف α در شکل ۱ رسم شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود، نمودار تابع چگالی برای مقادیر $\alpha \in [-1, 1]$ تک‌مدی و برای مقادیر خارج از این ناحیه دومدی است.



شکل ۱. تابع چگالی احتمال مقادیر کرانگین موزون به ازای مقادیر مختلف α .

۳ مشخصه‌های توزیع مقادیر کرانگین موزون

در این بخش، برخی از ویژگی‌ها و مشخصه‌های توزیع مقادیر کرانگین موزون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

لم ۱: فرض کنید Y دارای توزیع $WEV(\alpha)$ باشد. در این صورت

الف- برای $\alpha = 0$ داریم $Y \sim EV(0, 1)$.

ب- اگر $\alpha \rightarrow \pm\infty$ آنگاه $Y \sim BEV(0, 1)$.

قضیه ۱: اگر $Y \sim WEV(\alpha)$ ، آنگاه تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F(y; \alpha) = C^{-1}[\exp\{-\exp\{-y\}\}((1 - \alpha y)^2 + 1) + 2\alpha(1 + \alpha y)Ei(-\exp\{-y\}) + \alpha^2 \int_{-\infty}^y Ei(-\exp\{-t\})dt], (\gamma)$$

است، که در آن C در تعریف ۲ بیان شده است و

$$Ei(x) = \gamma + \ln(x) + \exp\left\{\frac{x}{\gamma}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n! \gamma^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{\gamma} \rfloor} \frac{1}{\gamma k + 1}.$$

برهان: با انتگرال‌گیری از تابع چگالی (۵) داریم

$$\begin{aligned} F(y; \alpha) &= C^{-1} \int_{-\infty}^y ((1 - \alpha t)^\gamma + 1) \exp\{-t - \exp\{-t\}\} dt \\ &= C^{-1} [\gamma \exp\{-\exp\{-y\}\} - \gamma \alpha (y \exp\{-\exp\{-y\}\} \\ &\quad - Ei(-\exp\{-y\})) + \alpha^\gamma (y^\gamma \exp\{-\exp\{-y\}\} \\ &\quad + \gamma y Ei(-\exp\{-y\}) + \int_{-\infty}^y Ei(-\exp\{-t\}) dt)] \\ &= C^{-1} [\exp\{-\exp\{-y\}\} ((1 - \alpha y)^\gamma + 1) \\ &\quad + \gamma \alpha (1 + \alpha y) Ei(-\exp\{-y\}) + \alpha^\gamma \int_{-\infty}^y Ei(-\exp\{-t\}) dt]. \end{aligned}$$

نتیجه ۱: در حالت خاص با حد گرفتن از (۷) هنگامی که $\alpha \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه تابع توزیع تجمعی توزیع مقادیر کرانگین دومدی ($BEV(0, 1)$) به صورت

$$F(y) = C^{-1} [\gamma \exp\{-\exp\{-y\}\} + \gamma y Ei(-\exp\{-y\}) + \int_{-\infty}^y Ei(-\exp\{-t\}) dt],$$

به دست خواهد آمد، که در آن $C = 6/(\pi^2 + 6\gamma^2)$.

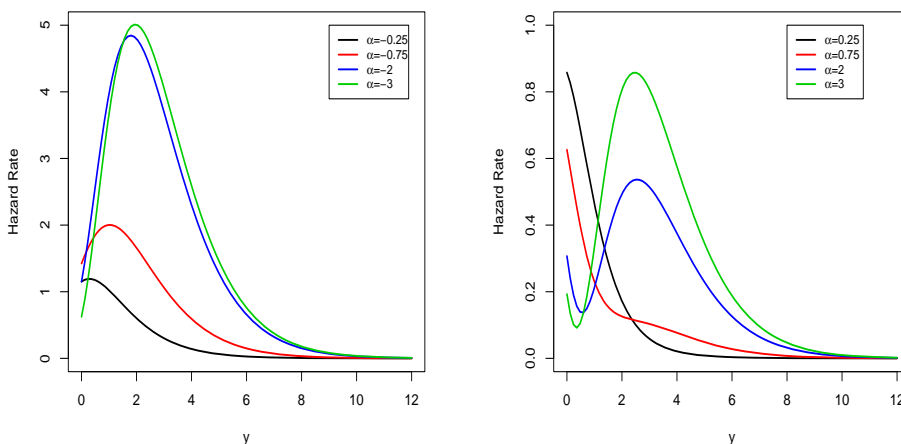
با توجه به تابع توزیع به دست آمده در قضیه ۱، به سادگی می‌توان تابع نرخ شکست متغیر تصادفی $Y \sim WEV(\alpha)$ را که به صورت

$$h_Y(y) = \frac{f(y; \alpha)}{1 - F(y; \alpha)},$$

تعریف می‌شود، محاسبه کرد. این تابع برای مقادیر مختلف α در شکل ۲ رسم شده است.

قضیه ۲: اگر $Y \sim WEV(\alpha)$ و $X \sim EV(0, 1)$ ، آنگاه تابع مولد گشتاور Y برای $t < 1$ به صورت

$$M_Y(t) = C^{-1} M_X(t) [\gamma - \gamma \alpha \psi(1 - t) + \alpha^\gamma (\psi(1 - t)^\gamma + \psi(1 - t, 1))], \quad (8)$$



شکل ۲. تابع نرخ شکست توزیع مقادیر کرانگین موزون به ازای مقادیر مختلف α .

است، که در آن $M_X(t) = \Gamma(1 - t)$ تابع مولد گشتاور X ، $\psi(y) = \frac{\partial \ln(\Gamma(y))}{\partial y}$ و $\psi(k, y)$ مشتق مرتبه k ام ψ بر حسب y است.

برهان:

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= E(\exp\{tY\}) \\
 &= C^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ty\} ((1 - \alpha y)^{\alpha} + 1) \exp\{-y - \exp\{-y\}\} dy \\
 &= C^{-1} [\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ty\} \exp\{-y - \exp\{-y\}\} dy \\
 &\quad - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} y \exp\{ty\} \exp\{-y - \exp\{-y\}\} dy \\
 &\quad + \alpha^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha} \exp\{ty\} \exp\{-y - \exp\{-y\}\} dy] \\
 &= C^{-1} M_X(t) [\alpha - \alpha \psi(1 - t) + \alpha^{\alpha} (\psi(1 - t)^{\alpha} + \psi(1 - t, \alpha))].
 \end{aligned}$$

نتیجه ۲: در حالت خاص با حد گرفتن از (۸) هنگامی که $\alpha \rightarrow \pm\infty$ آنگاه تابع مولد گشتاور توزیع مقادیر کرانگین دومدی عبارت است از

$$M_Y(t) = \frac{\phi}{\pi^2 + \phi\gamma^2} M_X(t) [\psi(1-t)^2 + \psi(1-t, 1)].$$

نتیجه ۳: اگر $Y \sim WEV(\alpha)$ ، آنگاه گشتاور مرتبه n ام آن به صورت

$$\mu_n = E(Y^n) = C^{-1} [2\mu_n^* - 2\alpha\mu_{n+1}^* + \alpha^2\mu_{n+2}^*], \quad (9)$$

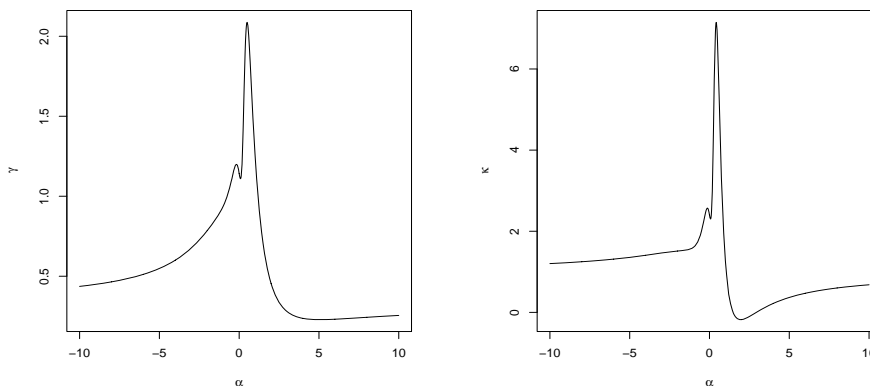
است، که در آن μ_n^* گشتاور مرتبه n ام توزیع مقادیر کرانگین استاندارد است. در این صورت می‌توان واریانس و ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع $WEV(\alpha)$ را به ترتیب به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \mu_2 - \mu_1^2, \\ \gamma &= \frac{\mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3}{(\mu_2 - \mu_1^2)^{3/2}}, \\ \kappa &= \frac{\mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 6\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_1^4}{(\mu_2 - \mu_1^2)^2} - 3. \end{aligned}$$

کران ضریب‌های چولگی و کشیدگی توزیع $WEV(\alpha)$ ، با استفاده از بهینه‌سازی عددی نسبت به α به صورت $0.228 \leq \gamma \leq 2.086$ و $-0.179 \leq \kappa \leq 7.148$ است، که در شکل ۳ قابل مشاهده است.

۴ مثال‌های عددی

در این بخش استنباط آماری پیرامون پارامتر $\theta = (\mu, \sigma, \alpha)$ برای خانواده مکانی-مقیاس تعریف شده در رابطه (۶) مورد بررسی قرار گرفته می‌شود. بدین منظور فرض کنید $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $WEV(\mu, \sigma, \alpha)$ باشد. در این صورت لگاریتم تابع درستنمایی آن عبارت است



شکل ۳. نمودار ضرایب چولگی و کشیدگی نسبت به پارامتر شکل α .

از

$$\ell(\mu, \sigma, \alpha | \mathbf{z}) = -n \ln(\sigma) - n \ln(2 - 2\alpha\gamma + \alpha^2(\frac{\pi^2}{6} + \gamma^2)) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \exp\left\{-\left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)\right\} + \ln\left(\left(1 - \alpha\left(\frac{z_i - \mu}{\sigma}\right)\right)^2 + 1\right).$$

با استفاده از ماکسیمم‌سازی این تابع می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها را به دست آورد. به دلیل بسته نبودن فرم برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی برای به دست آوردن این برآوردگرها از دستور *mle* در بسته *stat4* موجود در نرم‌افزار *R* استفاده شده است.

در ادامه، با استفاده از دو مثال واقعی کارایی توزیع معرفی شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. با به دست آوردن برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع مقادیر کرانگین موزون و محاسبه ملاک اطلاع آکائیک^۵ (AIC)، توزیع‌های مختلف برازش داده شده، با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

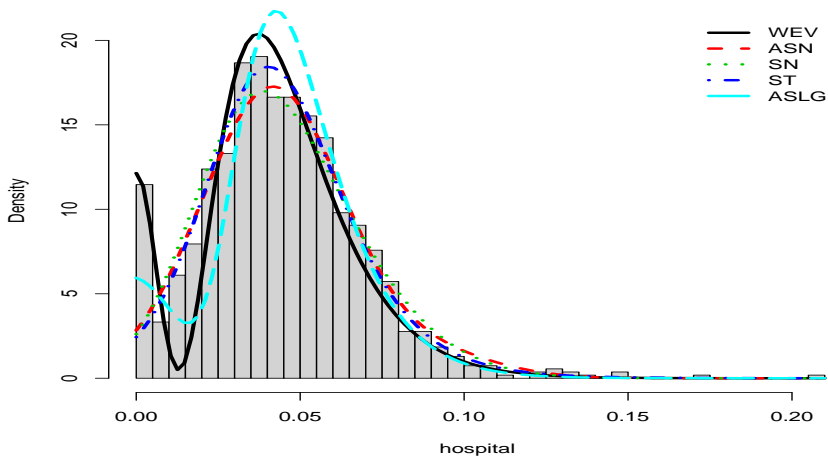
مثال ۱۱: داده‌های بیمارستانی مربوط به ۱۰۸۲ بیمارستان در ۱۰ ایالت آمریکا است که در آن ۶ متغیر مربوط به بیماران اندازه‌گیری شده است. این داده‌ها نخستین بار توسط الال-اولیورو (۲۰۱۰) برای برازش توزیع آلفا-چوله-نرمال مورد استفاده قرار گرفت. در این مطالعه، متغیر نرخ خروجی بیماران (ستون

⁵Akaike Information Criterion

سوم از داده‌ها) مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از برازش توزیع‌های چوله-نرمال (SN)، آلفا-چوله-نرمال (ASN)، چوله-t-استیودنت (ST)، آلفا-چوله-لجستیک (ASLG) و مقادیر کرانگین موزون (WEV) در جدول ۱ آورده شده است. با مشاهده مقادیر AIC دیده می‌شود که مدل مقادیر کرانگین موزون دارای کمترین مقدار است و بنابراین برازش بهتر و مناسبتری را روی داده‌ها انجام می‌دهد. این موضوع از هیستوگرام داده‌ها و نمودار توزیع‌های برآورد شده (شکل ۴) نیز قابل مشاهده است.

جدول ۱. برآورد پارامترها به همراه خطاهای استاندارد (داخل پرانتز) برای داده‌های بیمارستان.

مدل	μ	σ	α	ν	$\log - like$	AIC
ST	۰٫۰۲۸۹ (۰٫۰۰۴۲)	۰٫۰۰۰۶ (۰٫۰۰۰۱)	۰٫۹۲۹۸ (۰٫۳۷۸۱)	۸٫۵۵۵۶ (۲٫۳۶۰۷)	-۲۵۰۳٫۴۰۹	۵۰۱۶٫۳۰۷
SN	۰٫۰۳۴۴ (۰٫۰۰۰۱)	۰٫۰۲۴۵ (۰٫۰۰۰۱)	۱٫۳۱۰۶ (۰٫۲۲۷)	-	-۲۵۰۲٫۶۰۳	۵۰۱۱٫۲۰۶
ASN	۰٫۰۵۸۸ (۰٫۰۴۳۶)	۰٫۰۲۳۵ (۰٫۰۰۱۰)	۰٫۸۰۳۱ (۰٫۰۰۳۴)	-	-۲۴۹۷٫۵۳۶	۵۰۰۱٫۰۷۲
ASLG	۰٫۰۵۶۲ (۰٫۰۴۱۷)	۰٫۰۰۸۴ (۰٫۰۰۰۶)	۱٫۲۳۸۸ (۰٫۰۳۶۵)	-	-۳۱۴۱٫۹۸۲	۶۲۸۹٫۹۶۴
WEV	۰٫۰۱۱۲ (۰٫۰۰۶۳)	۰٫۰۱۰۸ (۰٫۰۰۲۸)	۶٫۳۹۳۲ (۰٫۱۵۶)	-	-۲۴۴۳٫۰۴	۴۸۹۲٫۰۸



شکل ۴. هیستوگرام نرخ خروجی بیماران به همراه توزیع‌های برازش داده شده.

مثال ۱۲: یکی از داده‌های پیکاربرد برای برازش بر روی مدل‌های چوله، داده‌های ورزشکاران استرالیایی است. این داده‌ها که مربوط به شاخص‌های بدنی ۱۰۱ مرد و ۱۰۰ زن ورزشکار است در بسته‌ی sn نرم افزار R تحت عنوان ais موجود است. در این قسمت داده‌های مربوط به شاخص توده بدن^۶ (BMI) برای برازش مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج این برازش در جدول ۲ خلاصه شده است. با توجه به مقدار AIC مدل‌های برازش شده، مشاهده می‌شود که توزیع مقادیر کرانگین موزون بهترین برازش را بر داده‌ها انجام می‌دهد. این موضوع از هیستوگرام داده‌ها و منحنی‌های برازنده شده در شکل ۵ قابل ملاحظه است.

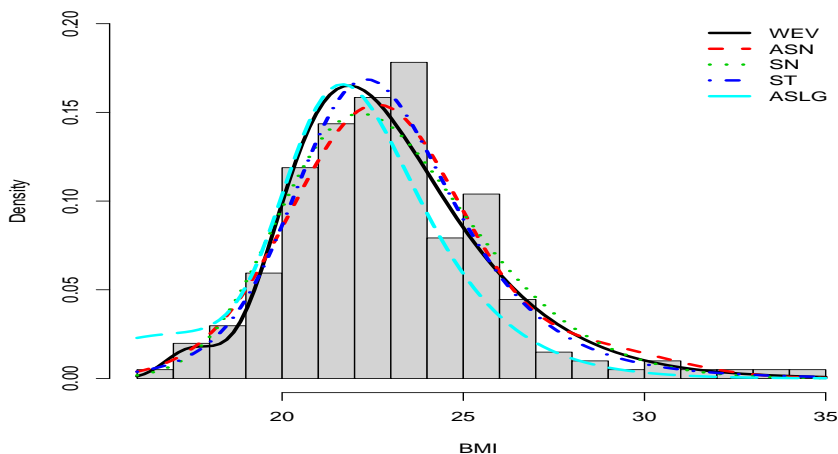
جدول ۲. برآورد پارامترها به همراه خطاهای استاندارد (داخل پرانتز) برای داده‌های BMI.

مدل	μ	σ	α	ν	$\log - like$	AIC
ST	۲۰٫۸۹۷۰ (۰٫۷۶۹۳)	۷٫۹۳۴۶ (۳٫۶۴۱۸)	۱٫۱۲۵۹ (۰٫۷۱۶۵)	۶٫۰۷۷۲ (۳٫۵۷۱۴)	-۴۸۹٫۱۳۱۳	۹۸۰٫۸۹۲۳
SN	۲۰٫۰۴۷۰ (۰٫۳۶۰۸)	۱۶٫۵۸۸۳ (۲٫۱۱۰۶)	۲٫۱۸۹۹ (۰٫۵۲۸۲)	-	-۴۹۰٫۱۳۱۳	۹۸۶٫۲۶۲۶
ASN	۲۴٫۸۳۳۸ (۰٫۶۵۷۴)	۲٫۶۵۲۵ (۰٫۸۴۵۳)	۰٫۹۹۳۶ (۰٫۳۶۴۸)	-	-۴۸۸٫۶۸۹۷	۹۸۳٫۳۷۹۴
ASLG	۱۹٫۹۳۹۹ (۰٫۴۲۸۴)	۱٫۲۵۱۷ (۰٫۵۸۷۶)	-۱٫۵۰۵۲ (۰٫۳۹۶۷)	-	-۵۰۵٫۴۰۰۸	۱۰۱۶٫۸۰۲
WEG	۱۹٫۲۱۷۹ (۰٫۴۱۵۶)	۱٫۵۳۶۳ (۰٫۶۳۷۸)	-۱٫۷۱۱۹ (۰٫۴۵۵۲)	-	-۴۸۶٫۷۸۸۷	۹۷۹٫۵۷۷۴

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله توزیع جدیدی بر اساس توزیع مقادیر کرانگین معرفی شده است. ویژگی‌ها و مشخصه‌های این توزیع از قبیل گشتاورها و تابع مولد گشتاوری، تابع توزیع و کران‌های چولگی و کشیدگی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. همچنین با استفاده از داده‌های واقعی نشان داده شده است که به دلیل موزون بودن تابع چگالی توزیع بر حسب توزیع مقادیر کرانگین، توزیع معرفی شده دارای انعطاف مناسبی در برازش داده‌ها است. با توجه به مناسب بودن توزیع می‌توان از آن برای استنباط‌های بی‌زی نیز استفاده کرد و برآوردگرهای بی‌زی آن را به دست آورد. همچنین با توجه به معرفی توزیع چوله تعمیم‌یافته مقادیر کرانگین توسط ریبیروا (۲۰۱۴) می‌توان تعمیم موزون آن را معرفی کرد.

⁶Body Mass Index



شکل ۵. هیستوگرام داده‌های شاخص توده بدنی به همراه توزیع‌های برازش داده شده.

مراجع

- Arellano-Valle, R. B., Gómez, H. W. and Quintana, F. A. (2004), A New Class of Skew-Normal Distributions, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **33**, 1465-1480.
- Arnold, B. C. and Lin, G. D. (2004), Characterization of the Skew-Normal and Generalized Chi Distributions, *Sankhya*, **66**, 593-606.
- Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
- Chang, S. M. and Genton, M. G. (2007), Extreme Value Distributions for the Skew-Symmetric Family of Distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 1705-1717.
- Elal-Olivero, D., Gómez, H. W. and Quintana, F. A. (2009), Bayesian Modeling Using a Class of Bimodal Skew Elliptical Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 1484-1492.
- Elal-Olivero, D. (2010), Alpha-Skew-Normal Distribution, *Proyecciones Journal of Mathematics*, **29**, 224-240.
- Gómez, H. W., Salinas, H. S. and Bolfarine, H. (2006), Generalized Skew-Normal Models: Properties and Inference, *Statistic*, **40**, 495-505.

- Gómez, H. W., Elal-Olivero, D., Salinas, H. S. and Bolfarine, H. (2011), Bimodal Extension Based on the Skew-Normal Distribution With Application to Pollen Data, *Environmetrics*, **22**, 50-62.
- Harandi, S. S. and Alamatsaz, M. H. (2013), Alpha-Skew-Laplace Distribution, *Statistical Probability Letter*, **83**, 774-782.
- Hazarikaa, P. J. and Chakraborty, S. (2014), Alpha-Skew-Logistic Distribution, *IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM)*, **10**, 36-46.
- Jenkinson, A. F. (1955), The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Meteorological Elements, *Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society*, **87**, 145-158.
- Nekoukhou, V. and Alamatsaz, M. H. (2011), A Family of Skew-Symmetric-Laplace Distributions, *Statistical Papers*, **53**, 685-696.
- Patil, G. P. and Rao, C. R. (1977), *The Weighted Distributions: A Survey and Their Applications*, In: Krishnaiah, P. R. (Ed.), *Applications of Statistics*, 385-405, North-Holland Publishing Co.
- Ribereau, P., Masiello, E. and Naveau, P. (2014), Skew Generalized Extreme Value Distribution: Probability Weighted Moments Estimation and Application to Block Maxima Procedure, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 5037-5052.