

توزیع چوله-لاپلاس موزون دوپارامتری

پیمان امیری، مهرداد نادری، احد جمالیزاده

گروه آمار، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۵/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: یک روش مناسب در برازش داده‌های نامتقارن و تحلیل داده‌هایی با ساختار غیر نرمال، استفاده از کلاس توزیع‌های وزن دار شده است. در این مقاله خانواده دیگری از توزیع‌های چوله-لاپلاس بر اساس تابع وزن دو پارامتری و به منظور برازش بهتر داده‌هایی از جوامع نامتقارن چند مدی و غیر نرمال معرفی می‌شود. همچنین برخی مشخصه‌های اصلی توزیع از جمله چولگی و کشیدگی، تابع مولد گشتاور و غیره مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در انتها نیز کاربرد توزیع برای برازش به داده‌ها، با استفاده از یک مجموعه داده واقعی مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس، توزیع چوله-لاپلاس، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، تابع مولد گشتاور.

۱ مقدمه

یکی از توزیع‌های پراهمیت در پژوهش‌های آماری توزیع نرمال است. در بسیاری از تحلیل‌های آماری فرض نرمال بودن مبنای اصلی استنباط‌های آماری است. این در حالی است که جامعه‌های متعددی را می‌توان برشمرد که ساختار احتمالی آنها از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند. به عنوان مثال، در علوم همانند اقتصاد، پزشکی و زمین‌شناسی و همچنین در برخی مسائل آماری همچون رگرسیون، سری زمانی و قابلیت اعتماد در داده‌ها نوعی عدم تقارن وجود دارد که این امر کارایی توزیع‌های متقارن همانند توزیع نرمال و لاپلاس برای برازش مدلی مناسب به این گونه داده‌ها را کاهش می‌دهد. برای پاسخ به چنین نقیصی، اقدامات

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مهرداد نادری، mehrdad.naderi@ymail.com

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62E10، 65C05، 62E15

زیادی برای دستیابی به توزیع‌هایی که قابلیت مدل‌بندی داده‌های چوله را داشته باشند، صورت پذیرفته است. در سال‌های اخیر توزیع‌های چوله متعددی توسط پژوهشگران معرفی شده و با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. اکثر توزیع‌های چوله معرفی شده، به کلاس بزرگتری از توزیع‌ها یعنی توزیع‌های موزون تعلق دارند. با استفاده از نظریه توزیع‌های موزون، با گرفتن وزن مناسب می‌توان قابلیت انعطاف‌پذیری توزیع‌ها را افزایش داد. این کلاس که نخستین بار توسط پتل و رائو (۱۹۷۷) مطرح شد بر اساس یک تابع چگالی و یک تابع حقیقی مقدار به عنوان تابع وزن به دست می‌آید. به‌طور دقیق‌تر، اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f(x)$ باشد، آنگاه تابع چگالی موزون $g(x)$ ، با وزن $w(x) > 0$ و با شرط موجود بودن امید ریاضی $w(x)$ ، به صورت

$$g(x) = \frac{w(x)f(x)}{E[w(X)]}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

به دست می‌آید. به عنوان مثال اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ و تابع چگالی $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$ باشد، آنگاه با در نظر گرفتن تابع وزن $w(x) = x^\alpha$ توزیع گاما با پارامترهای (α, λ) به دست خواهد آمد. بر این اساس، آزالینی (۱۹۸۵) با در نظر گرفتن تابع چگالی نرمال استاندارد و تابع وزنی معادل با تابع توزیع نرمال استاندارد (یعنی $\Phi(x)$) توزیع چوله-نرمال با تابع چگالی $\phi(x)\Phi(x)$ را معرفی نمود و سپس آن را به توزیع $\phi(x)\Phi(\lambda x)$ تعمیم داد که در آن λ یک پارامتر شکل^۱ است. همان‌طور که مشخص است در توزیع جدید پارامتر λ که به صورت وزنی به توزیع نرمال اضافه شده است، سبب به وجود آمدن چولگی می‌شود.

این تعمیم بعدها مبنای مطالعات زیادی برای معرفی توزیع‌های چوله دیگر بر اساس توزیع‌های کلاسیک نظیر t -استودنت و لاپلاس قرار گرفت و تعمیم‌های متنوعی برای توزیع چوله-نرمال نظیر چوله- t -استودنت و چوله-لاپلاس (گوبتا و همکاران، ۲۰۰۲) مطرح شد. هدف اصلی از ارائه این تعمیم‌ها افزایش میزان انعطاف‌پذیری در توزیع‌ها بود. این توزیع‌ها علی‌رغم مناسب بودن در برازش داده‌ها در اکثر موارد، دارای یک نقص می‌باشند. این نقص زمانی خود را نمایان می‌سازد که داده‌ها از جوامع دو یا چند نمایی آمده باشند. یک راه معقول در مواجهه با این مشکل، در نظر گرفتن خانواده توزیع‌های آمیخته بر پایه توزیع‌های چوله است (لین، ۲۰۱۰؛ لین و همکاران، ۲۰۱۴، ۲۰۰۷). گرچه این خانواده، توزیع‌هایی چند نمایی را به وجود می‌آورد، اما این روش زمانی کاربردی است که داده‌ها از چند جامعه آمده باشند.

روش دیگر برای ساخت توزیع‌های چند نمایی و چوله نخستین بار در مقالات ناداراجا و کاتز (۲۰۰۳) و

¹Shape parameter

نکوخو و علامت‌ساز (۲۰۱۱) مطرح شد. پس از آنها الال-الیویرو (۲۰۰۲)؛ هرندی و علامت‌ساز (۲۰۱۳) و هازاریکا و چاکبرابرتی (۲۰۱۴)، به ترتیب توزیع‌های آلفا-چوله نرمال، آلفا-چوله لاپلاس و آلفا-چوله لوژستیک را معرفی کردند. آنها برای ساخت توزیع جدید به ترتیب با در نظر گرفتن توزیع‌های نرمال، لاپلاس و لوژستیک و تابع وزن $w(x) = (1 - \alpha x)^2 + 1$ در (۱) توزیع‌هایی چوله و حداکثر ۲ نما را ارائه دادند. به منظور تعمیم توزیع‌های آلفا-چوله به توزیع‌هایی کاراتر، شفيعی و همکاران (۲۰۱۶) با در نظر گرفتن توزیع نرمال و تابع وزن $w(x) = (1 - \alpha x - \beta x^3)^2 + 1$ خانواده توزیع‌های آلفا-بتا چوله-نرمال را معرفی کردند. آنها ضمن اثبات حداکثر ۴ مدی بودن این توزیع با برازش توزیع بر روی داده‌های مختلف نشان دادند که این توزیع نسبت به سایر مدل‌های رقیب از لحاظ میزان انعطاف‌پذیری و برازش جوامع نامتقارن دارای برتری محسوس است.

در این مقاله نیز تلاش شده است که توزیعی بر پایه توزیع لاپلاس و با قابلیت انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به آن ارائه شود. این توزیع که به توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس نام‌گذاری شده است با استفاده از تابع وزنی به‌کار رفته در شفيعی و همکاران (۲۰۱۶) و توزیع لاپلاس به‌دست می‌آید. هدف اصلی از ارائه این مدل آن است که چون توزیع لاپلاس دم کلفت‌تر از توزیع نرمال است، این توزیع می‌تواند در برازش داده‌هایی با این خاصیت مفیدتر باشد. پس از معرفی توزیع جدید، برخی از ویژگی‌های آن مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته شده و با ارائه یک مثال واقعی نشان داده می‌شود که توزیع ارائه شده در برازش داده‌ها مناسب است. در این مقاله برای رسم نمودارها و برآورد پارامترهای مدل و همچنین مقایسه مدل‌های مختلف از نرم‌افزار آماری R استفاده شده است.

در بخش ۲، ابتدا توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس معرفی شده و پیرو آن تابع توزیع تجمعی و برخی حالات خاص این توزیع بیان خواهد شد. برخی ویژگی‌های توزیعی، توزیع معرفی شده از قبیل گشتاورها، ضرایب چولگی و کشیدگی در بخش ۳ مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. همچنین در این بخش نشان داده می‌شود که توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس نیز حداکثر ۴ نمایی است و دارای پهنای باند بزرگتر در ضریب چولگی و کشیدگی نسبت به توزیع آلفا-بتا چوله-نرمال است. در بخش ۴، برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع جدید محاسبه شده است. در انتها نیز با برازش مدل پیشنهادی به مجموعه داده‌های شاخص نرخ تورم کشور ایران، کارآیی مدل ارائه شده در برابر سایر مدل‌های رقیب مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲ توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس

در این بخش، توزیعی جدید برای برآزش جوامع نامتقارن براساس توزیع لاپلاس و تعمیمی از توزیع آلفا-چوله لاپلاس ارائه شده توسط الال-الیورو (۲۰۰۲) معرفی می‌شود. متغیر تصادفی Y دارای توزیع آلفا-چوله لاپلاس است هرگاه دارای تابع چگالی

$$f(y; \alpha) = \frac{(1 - \alpha y)^2 + 1}{4(1 + \alpha^2)} \exp\{-|y|\}, \quad y, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

باشد $(Y \sim ASL(\alpha))$. پارامتر α در این توزیع، یک پارامتر شکل است که چولگی و کشیدگی توزیع را کنترل می‌کند.

تعریف ۱: متغیر تصادفی Y دارای توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس با پارامترهای α و β است، هرگاه تابع چگالی به صورت

$$g(y, \alpha, \beta) = C[(1 - \alpha y - \beta y^2)^2 + 1] \exp\{-|y|\}, \quad (y, \alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

باشد، که در آن $C = [4(1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta)]^{-1}$.

در شکل ۱ تابع چگالی این توزیع برای مقادیر متفاوت پارامترها رسم شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که برای برخی مقادیر α و β چگالی توزیع دارای ۳ یا ۴ نما است. (اثبات این مطلب در ادامه بیان می‌شود). همچنین برای مقادیر منفی β چگالی دارای چولگی منفی است. در ادامه حالات خاص و ویژگی‌های توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس مطرح می‌شوند.

قضیه ۱: فرض کنید Y دارای توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس باشد. در این صورت

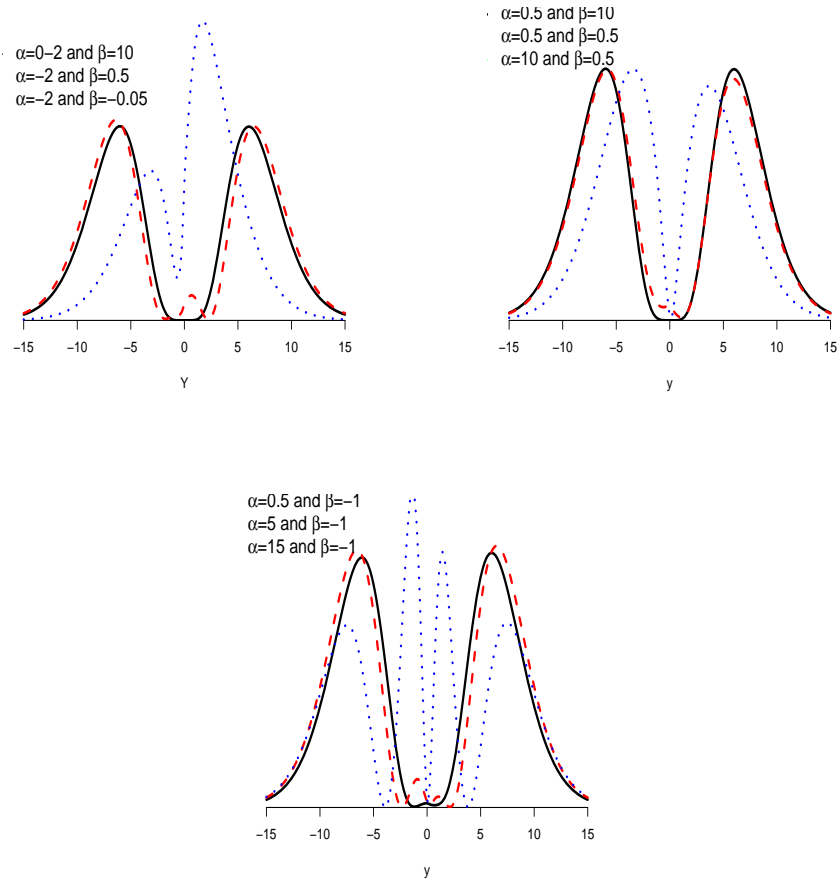
$$-Y \sim ABSL(-\alpha, -\beta) \quad (1)$$

(۲) اگر $\alpha = \beta = 0$ باشد، آنگاه Y دارای توزیع لاپلاس استاندارد با تابع چگالی

$$f(y, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\{-|y|\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

خواهد بود.

(۳) اگر $\beta = 0$ ، آنگاه تابع چگالی توزیع Y به تابع چگالی توزیع آلفا-چوله لاپلاس (۲) تبدیل خواهد شد.



شکل ۱: تابع چگالی توزیع آلفا-بتا-چوله-لاپلاس برای مقادیر مختلفی از پارامترها.

همچنین با قرار دادن $\alpha = 0$ ، تابع چگالی توزیع $ABSL$ به تابع چگالی بتا-چوله لاپلاس تبدیل می‌شود، که دارای نمایش

$$f(y; \beta) = \frac{(1 - \beta Y^2)^2 + 1}{4(1 + 36\beta^2)} \exp\{-|y|\}, \quad (Y, \beta)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (4)$$

است و با نماد $BSL(\beta)$ نمایش داده می‌شود.

(۴) تابع چگالی متغیر تصادفی Y زمانی که $\alpha \rightarrow \pm\infty$ همگرا به $\frac{Y^2}{4} \exp\{-|y|\}$ بوده و زمانی که

$\beta \rightarrow \pm\infty$ به $\frac{y}{\sqrt{4\beta}} \exp\{-|y|\}$ میل می‌کند.

برهان: با انجام اعمال ریاضی ساده اثبات بدیهی است.

گزاره ۱: با اعمال جبری، به سادگی می‌توان نشان داد که تابع چگالی توزیع $ABSL(\alpha, \beta)$ به صورت حاصل جمع دو تابع چگالی است که یکی از آنها متقارن است. به بیان دیگر رابطه

$$\begin{aligned} g(y, \alpha, \beta) &= C[(1 - \alpha y - \beta y^3)^2 + 1] \exp\{-|y|\} \\ &= C[2 + (\alpha y + \beta y^3)^2] \exp\{-|y|\} - 2C(\alpha y + \beta y^3) \exp\{-|y|\} \\ &= g_1(y; \alpha, \beta) - 2C(\alpha y + \beta y^3) \exp\{-|y|\}, \end{aligned}$$

برقرار است، که در آن $g_1(y; \alpha, \beta) = C[2 + (\alpha y + \beta y^3)^2] \exp\{-|y|\}$ یک تابع چگالی متقارن است.

گزاره ۲: تابع چگالی توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس حداکثر ۴ نمایی است.

برهان: با مشتق‌گیری از تابع چگالی توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس نسبت به y داریم:

$$\begin{aligned} g'(y; \alpha, \beta) &= C \exp\{-|y|\} [-2(1 - \alpha y - \beta y^3)(\alpha + 3\beta y^2) \\ &\quad + \frac{y}{|y|} ((1 - \alpha y - \beta y^3)^2 + 1)]. \end{aligned}$$

با توجه به تابع مشتق به دست آمده، ملاحظه می‌شود که این تابع یک چندجمله‌ای درجه ۷ است. حال با مساوی صفر قرار دادن این تابع، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که تعداد ریشه‌های آن حداکثر ۷ بوده و لذا تعداد نماهای تابع چگالی توزیع $ABSL$ حداکثر ۴ است. برای محاسبه تابع توزیع تجمعی آلفا-بتا چوله-لاپلاس می‌توان حدود متغیر Y را تفکیک کرده، سپس تابع توزیع تجمعی آن را محاسبه کرد. بدین ترتیب داریم:

(الف) برای هر $y < 0$ با انتگرال‌گیری از تابع چگالی (۳):

$$\begin{aligned} G(y; \alpha, \beta) &= C \exp\{y\} [1 + (1 - \alpha y)^2 + 2\alpha(1 + \alpha(1 - y)) \\ &\quad - 2\beta(y^3 - 3y^2 + 6y - 6) + 2\alpha\beta(y^4 - 4y^3 + 12y^2 - 24y + 24) \\ &\quad + \beta^2(y^6 - 6y^5 + 30y^4 - 120y^3 + 360y^2 - 720y + 720)]. \end{aligned}$$

(ب) به طور مشابه برای هر $y \geq 0$:

$$G(y, \alpha, \beta) = 1 + C \exp\{-y\}[(1 + (1 - \alpha y)^2) + 2\alpha(1 + \alpha(1 + y)) - 2\beta(y^3 + 3y^2 + 6y + 6) + 2\alpha\beta(y^4 + 4y^3 + 12y^2 + 24y + 24) + \beta^2(y^6 + 6y^5 + 30y^4 + 120y^3 + 360y^2 + 720y + 720)].$$

۳ ویژگی‌های توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس

در این بخش گشتاورهای توزیع $ABSL$ ، که برای توصیف شکل توزیع احتمالاتی و محاسبه جنبه‌های مختلف توزیع از جمله چولگی، کشیدگی و واریانس استفاده می‌شوند، محاسبه و تابع مولد گشتاورهای ارائه خواهند شد.

گزاره ۳: فرض کنید $Y \sim ABSL(\alpha, \beta)$. آن‌گاه r امین گشتاور آن به صورت

$$E(Y^r) = 2C \left[\alpha^2 E_g(Y^{r+2}) - 2\alpha E_g(Y^{r+1}) + 2E_g(Y^r) + \beta^2 E_g(Y^{r+6}) - 2\beta E_g(Y^{r+3}) + 2\alpha\beta E_g(Y^{r+4}) \right],$$

است، که در آن $E_g(Y^i)$ ، i امین گشتاور توزیع لاپلاس بوده که به صورت

$$E_g(Y^i) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \sigma^k \mu^{i-k} k! [\alpha + (-1)^k], \quad i = 0, 1, \dots$$

محاسبه می‌شود.

با توجه به گشتاورهای به دست آمده در گزاره ۳، می‌توان واریانس و ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع $ABSL$ را محاسبه کرد. ضرایب چولگی و کشیدگی یکی از مهمترین ویژگی‌های توزیع‌ها است، زیرا دامنه تغییرات ضرایب چولگی و کشیدگی نشان‌دهنده میزان انعطاف‌پذیری شکل تابع چگالی آنها است. در دو فرع زیر به محاسبه این دو ضریب خواهیم پرداخت.

نتیجه ۱: با توجه به گشتاورهای مرتبه اول و دوم توزیع $ABSL(\alpha, \beta)$ که در گزاره ۳ به دست آمدند،

واریانس Y را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} Var(Y) = & ۴C[۱۰\alpha^۲ + ۲۰۳۰۴\beta^۲ + ۶۷۲\alpha\beta + ۱۴\alpha^۴ + ۷۲۵۷۶۰۰\beta^۴ \\ & + ۲ + ۴۱۷۶۰\alpha^۲\beta^۲ + ۱۰۰۸\alpha^۳\beta + ۷۴۳۰۴۰\alpha\beta^۳], \end{aligned}$$

به دست آورد. فرض کنید $Y \sim ABSL(\alpha, \beta)$. آنگاه ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع که به ترتیب با γ و κ نشان داده می‌شوند به صورت

$$\gamma = \frac{\mu_۳ - ۳\mu_۱\mu_۲ + ۲\mu_۱^۳}{(\mu_۲ - \mu_۱)^۲}, \quad \kappa = \frac{\mu_۴ - ۴\mu_۱\mu_۳ + ۶\mu_۱^۲\mu_۲ - ۳\mu_۱^۴}{(\mu_۲ - \mu_۱)^۲} - ۳,$$

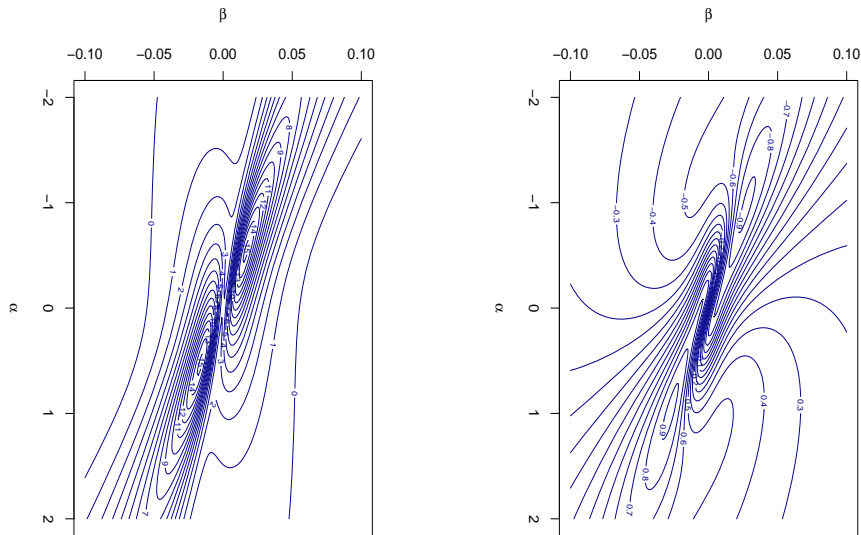
خواهند بود، که در آن

$$\begin{aligned} \mu_۱ &= -\frac{۲\alpha + ۲۴\beta}{۱ + \alpha^۲ + ۳۶۰\beta^۲ + ۲۴\alpha\beta}, \\ \mu_۲ &= \frac{۲ + ۱۲\alpha^۲ + ۲۰۱۶۰\beta^۲ + ۷۲۰\alpha\beta}{۲(۱ + \alpha^۲ + ۳۶۰\beta^۲ + ۲۴\alpha\beta)}, \\ \mu_۳ &= -\frac{۲۴\alpha + ۷۲۰\beta}{۱ + \alpha^۲ + ۳۶۰\beta^۲ + ۲۴\alpha\beta}, \\ \mu_۴ &= \frac{۲۴ + ۳۶۰\alpha + ۴۰۳۲۰\alpha\beta + ۱۸۱۴۴۰۰\beta^۲}{۱ + \alpha^۲ + ۳۶۰\beta^۲ + ۲۴\alpha\beta}. \end{aligned}$$

در شکل ۲ نمودار کران‌نما ضرایب چولگی و کشیدگی نسبت به پارامترهای α و β رسم شده است. با توجه به این شکل می‌توان مشاهده کرد که ضریب چولگی توزیع $ABSL$ در فاصله $(-۰.۸, ۰.۸)$ بوده و ضریب کشیدگی آن در فاصله $(۰, ۱۵)$ قرار دارد.

گزاره ۴: فرض کنید $Y \sim ABSL(\alpha, \beta)$. آنگاه تابع مولد گشتاور Y به صورت

$$\begin{aligned} M_Y(t) = & ۲C \left[\beta^۲ (M_V(t) + M_V(-t)) + \alpha\beta (M_\Delta(t) + M_\Delta(-t)) \right. \\ & + \beta (M_\Upsilon(t) - M_\Upsilon(-t)) + \alpha^۲ (M_\Upsilon(t) + M_\Upsilon(-t)) \\ & \left. + \alpha (M_\Upsilon(t) - M_\Upsilon(-t)) + (M_1(t) + M_1(-t)) \right], \end{aligned}$$



شکل ۲: نمودارهای کران نما چولگی (سمت راست) و کشیدگی (سمت چپ) توزیع $ABSL(\alpha, \beta)$.

است، که در آن تابع مولد گشتاور توزیع گاما با پارامترهای $\alpha = i$ و $\lambda = 1$ به صورت $M_i(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^i$ برای $t < 1$ است.

۴ برآورد ماکسیمم درستنمایی

تعریف ۲: فرض کنید $Z \sim ABSL(\alpha, \beta)$ و $Y = \mu + \sigma Z$ ، که در آن پارامتر مکان و $\sigma > 0$ پارامتر مقیاس است. در این صورت، تابع چگالی $ABSL$ با پارامترهای μ و σ به صورت

$$g(y; \mu, \sigma, \alpha, \beta) = \frac{\left(1 - \alpha\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - \beta\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^3\right)^2 + 1}{4\sigma(1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta)} \exp\left\{-\left|\frac{y-\mu}{\sigma}\right|\right\}, \quad (5)$$

خواهد بود. در این بخش با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی، پارامترهای تابع چگالی (۵)، یعنی $\Theta = (\mu, \sigma, \alpha, \beta)$ ، برآورد می‌شوند. بدین منظور، فرض کنید $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ دنباله‌ای از مشاهدات حاصل از توزیع $ABSL(\alpha, \beta)$ باشد. در این صورت تابع لگاریتم درستنمایی مشاهده‌شده

به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\theta|y) = & -n \ln \sigma - n \ln(1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta) \\ & + \sum_{i=1}^n \ln([1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2]^2 + 1) - \sum_{i=1}^n |\nu_i|, \end{aligned}$$

خواهد بود، که در آن $\nu_i = (y_i - \mu)/\sigma$ می توان با استفاده از مشتقات جزئی و ماکسیم سازی این تابع نسبت به پارامترها، برآوردگرهای ماکسیم درستنمایی آن ها را از طریق حل معادلات

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n \frac{2(\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{\beta\nu_i^2}{\sigma})(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)}{(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)^2 + 1} + \sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\sigma|\nu_i|} = 0, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= -\sum_{i=1}^n \frac{2\nu_i(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)}{(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)^2 + 1} - \frac{4n(2\alpha + 24\beta)}{4(1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta)} = 0, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} &= -\sum_{i=1}^n \frac{2\nu_i^2(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)}{(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)^2 + 1} - \frac{4n(24\alpha + 72\beta)}{4(1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta)} = 0, \\ \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^n \frac{(2\alpha\nu_i + \frac{2\beta\nu_i^2}{\sigma})(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)}{(1 - \alpha\nu_i - \beta\nu_i^2)^2 + 1} - \frac{n}{\sigma} - \sum_{i=1}^n |\nu_i| = 0, \end{aligned}$$

به دست آورد. یافتن برآوردها از طریق حل این معادلات ساده نیست و نیازمند روش های عددی است. اما با انجام محاسبات جبری ساده و جای گذاری $\partial\alpha$ و $\partial\beta$ در عبارت $\partial\sigma$ می توان نمایش بسته ای برای برآوردگر σ به صورت زیر یافت:

$$\sigma = \left(\frac{1 + \alpha^2 + 36\beta^2 + 24\alpha\beta}{n(2\alpha^2 + 1008\beta^2 + 60\alpha\beta) + \frac{1}{n}} \right) \sum_{i=1}^n |y_i - \mu|.$$

۵ مطالعات عددی

در این بخش با استفاده از یک مثال کارایی توزیع معرفی شده در برازش داده های واقعی سنجیده می شود. بدین منظور پس از به دست آوردن برآوردهای ماکسیم درستنمایی پارامترها، توزیع معرفی شده را با توزیع های آلفا-چوله نرمال، آلفا-بتا چوله-نرمال، آلفا-چوله لاپلاس بر اساس معیارهای انتخاب مدل AIC و BIC مقایسه خواهد شد. همچنین به منظور تایید مناسب توزیع های برازش داده شده، آزمون های

نیکویی برازش نظیر آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (KS)، آزمون کرامر فن-میسز (CV) و آزمون اندرسن-دارلینگ (AD)، مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

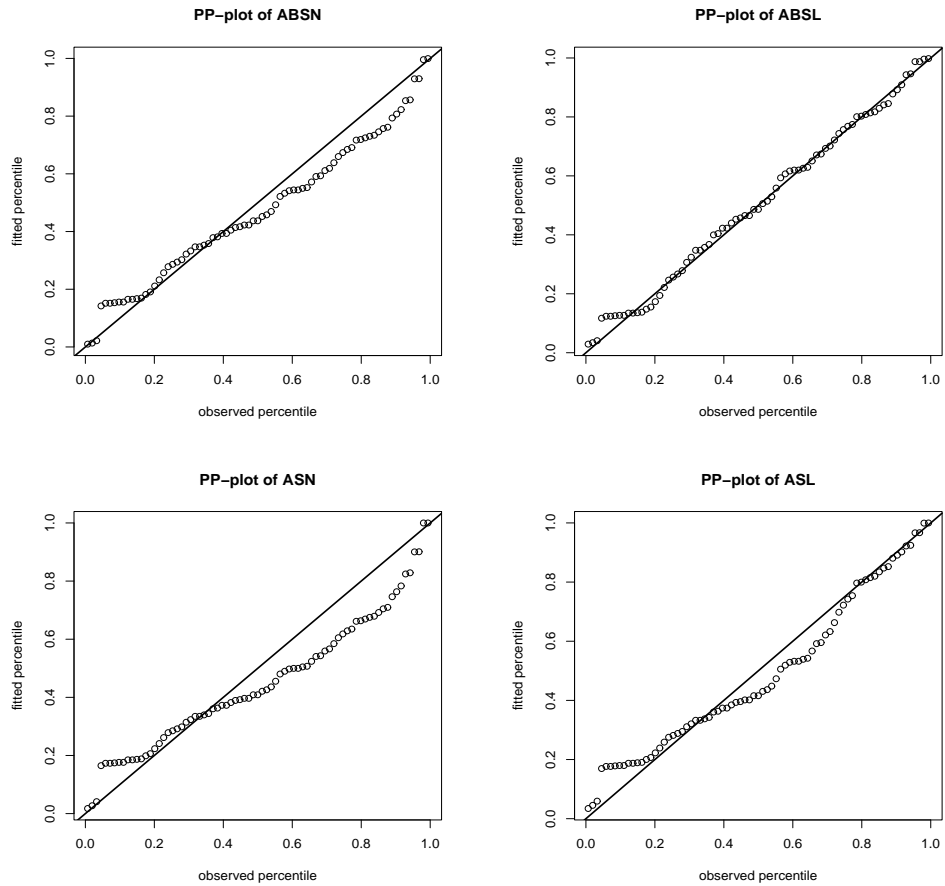
برای بررسی مناسب بودن مدل ارائه شده، داده‌های مربوط به شاخص کل بهای کالا و خدمات مصرفی در مناطق شهری ایران (شاخص تورم) را مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این مجموعه داده مربوط به سال‌های ۱۳۱۶ تا سال ۱۳۹۴ است که توسط بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران گرد آوری و فایل اصلی داده‌ها در درگاه رسمی آن بانک قابل دسترسی است. نتایج برازش مدل بر روی مجموعه داده‌های در جدول ۱ خلاصه شده است. این جدول شامل مقادیر برآورد شده پارامترها از طریق روش ML، انحراف معیار مربوط به هریک از برآوردها (مقادیر داخل پرانتز)، معیارهای برازش مدل و آزمون‌های مناسبیت مدل است. با توجه به مقادیر AIC و BIC در این جدول، ملاحظه می‌شود که توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس دارای کمترین مقدار در این معیارهاست که این مطلب دلیلی بر برازش مناسب این داده‌ها به وسیله این توزیع است. همچنین با توجه به مقادیر آماره‌های نیکویی برازش، ملاحظه می‌شود که این توزیع مقداری به مراتب کمتر از مدل‌های دیگر دارد. این مطلب نیز نشانگر بهتر بودن برازش داده‌ها توسط مدل آلفا-بتا چوله لاپلاس است که به سادگی از نمودارهای $P-P$ در شکل ۳ نیز قابل برداشت است.

جدول ۱: مقادیر برآورد شده برای داده‌های شاخص نرخ تورم در سال‌های ۱۳۹۴-۱۳۱۶.

مدل	μ	σ	α	β	$-\hat{\ell}$	AIC	BIC	KS	CV	AD
ASN	۳۰۴۰ (۲۸۸)	۱۶۷۹ (۱/۰۶)	۱۴۱۷ (۰/۰۶)	-	۳۲۲۸۳	۶۵۱۶۶	۶۵۸۶۹	۰/۱۷	۰/۳۷	۲/۵۰
ASL	۲۱۲۰ (۰/۰۰۸)	۷۶۲ (۰/۵۹۳)	۰/۷۸ (۰/۰۱۷)	-	۳۱۵۵۳	۶۳۷۰۶	۶۴۴۰۹	۰/۱۳	۰/۲۶	۱/۵۶
ABSN	۲۷۹۲ (۱/۹۳)	۱۸۴۷ (۰/۸۷)	۱/۹۵ (۰/۰۳)	-۰/۲۹ (۰/۰۱)	۳۱۱۷۹	۶۳۱۵۸	۶۴۰۸۶	۰/۱۲	۰/۸۲	۰/۱۱
ABSL	۲۸۸۰ (۰/۰۱)	۹/۱۳ (۰/۶۳)	-۰/۴۳۹ (۰/۰۱)	۰/۰۲ (۰/۰۰)	۳۰۸۰۲	۶۲۴۰۳	۶۳۳۴۱	۰/۰۸	۰/۰۵	۰/۴۶

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله خانواده جدیدی از توابع چگالی چوله به نام توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس معرفی شد. برخی ویژگی‌های اساسی توزیع معرفی شده نظیر تابع مولد گشتاور، ضرایب چولگی و کشیدگی و تابع توزیع تجمعی، مورد مطالعه قرار گرفت. در انتها نیز با تحلیل داده‌های مربوط به شاخص‌های اقتصادی ایران نشان داده شد که فرض استفاده از توزیع‌های متقارن و همچنین توزیع‌های چوله متقارن بر پایه توزیع نرمال



شکل ۳: نمودارهای $P-P$ توزیع‌های برازش شده به داده‌های نرخ تورم.

لزوما مناسب نبوده و توزیع جدید به دست آمده عملکرد بهتری دارد. با توجه به کاربرد وسیعی که توزیع لاپلاس و توزیع‌های چوله برپایه توزیع لاپلاس دارند (نظیر کاربرد در اقتصاد، بورس و غیره)، توزیع آلفا-بتا چوله-لاپلاس می‌تواند در پیش‌بینی‌های اقتصادی و تصمیم‌گیری‌های صحیح موثر باشد. بر این اساس دو مساله باز که در ادامه این تحقیق می‌توان به آن پرداخت رگرسیون و برآورد مقدار ریسک (VaR) است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران و ویراستار محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود موجب بهبود مقاله گردیدند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

مراجع

- Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
- Charytanowicz, M., Niewczas, J., Kulczycki, P., Kowalski, P., Lukasik, S., Zak, S. (2010), A Complete Gradient Clustering Algorithm for Features Analysis Of X-ray images. In: Pietka, E., Kawa, J. (eds) Information Technologies in Biomedicine, *Springer, Berlin*, 15-24.
- Elal-Olivero, D. (2010), Alpha-Skew-Normal Distribution, *Proyecciones Journal of Mathematics*, **29**, 224-240.
- Harandi, S. and Alamatsaz, M. H. (2013), Alpha-Skew-Laplace Distribution, *Statistical and Probability Letter*, **83**, 774-782.
- Hazarikaa, P. J. and Chakrabortyb, S. (2014), Alpha-Skew-Logistic Distribution, *IOSR Journal of Mathematics*, **10**, 36-46.
- Gupta, A. K., Chang, F. C. and Huang, W. j. (2002), Some Skew-Symmetric Modeling, *Random Operators Stochastic Equation*, **10**, 133-140.
- Lin, T. I. (2010), Robust Mixture Modeling Using Multivariate Skew t Distributions, *Statistics and Computing*, **20**, 343-356.
- Lin, T. I., Ho., H. J. and Lee C. R. (2014), Flexible Mixture Modelling Using the Multivariate Skew- t -Normal Distribution, *Statistics and Computing*, **24**, 531-546.
- Lin, T. I., Lee, J. C. and Yan, S. Y. (2007), Finite Mixture Modelling Using the Skew Normal Distribution, *Statistics Sinica*, **17**, 909-927.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003), Skewed Distributions Generated by the Normal Kernel, *Statistics and Probability Letters*, **65**, 269-277.
- Nekoukhov, V. and Alamatsaz, M. H. (2011), A Family of Skew-Symmetric-Laplace Distributions, *Statistical Papers*, **53**, 685-696.

Patil, G. P. and Rao, C. R. (1977), The Weighted Distributions: A Survey and Their Applications, *Applications of Statistics*, North Holland, Editor Krishnaiah, P. R., 385-405.

Shafiei, S., Doostparast, M. and Jamalizadeh, A. (2016), The Alpha-Beta Skew Normal Distribution: Properties and Applications, *Statistics*, **50**, 338-349.