مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۴۴۹ – ۴۶۸
DOI: 10.29252/jss.12.2.449

اندازه نادرستی پویایی چندکی بین دو متغیر گذشته عمر

افسانه شکرانی، محمد خراشادی‌زاده

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی اندازه نادرستی کریج به عنوان تعمیمی از آنتروپی شانون پرداخته شد سپس اندازه نادرستی گذشته عمر براساس مفهوم تابع چندک بازنویسی شده است. در ادامه مشخص‌سازی‌هایی برای توزیع‌های طول عمر با خاصیت نرخ شکست وارون متناسب براساس اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی ارائه شده است. همچنین رده توزیع‌های طول عمر دارای خاصیت اندازه نادرستی گذشته عمر صعودی (نزولی) و ویژگی‌هایی از آن مورد بررسی قرار گرفته است. بعلاوه با ارائه مثالی از داده‌های واقعی، کاربردی از اندازه نادرستی چندکی بیان شده است.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی شانون، تابع چندک، اندازه نادرستی کریج، اندازه نادرستی گذشته عمر، مدل نرخ شکست وارون متناسب.

۱ مقدمه

یکی از مفاهیم پایه در مبحث نظریه اطلاع، مفهوم آنتروپی است که اولین بار توسط شانون (۱۹۴۸) به منظور کمی ساختن اطلاعات از دست رفته در سیگنال‌های ارتباطی تلفن معرفی شد. این اندازه برای توزیع‌های پیوسته با تکیه‌گاه نامنفی به صورت

$$H_X = -\int_0^\infty f(x)\log f(x)dx,$$

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمد خراشادی‌زاده، m.khorashadizadeh@birjand.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62B10، 62E10

بیان می‌شود. بسیاری ازمحققین مفاهیم و شاخص‌های متعددی براساس آنتروپی شانون با کاربردهای مختلفی معرفی کردند که از آن جمله می‌توان به آنتروپی رنی (رنی، ۱۹۶۱)، آنتروپی مانده (ابراهیمی، ۱۹۹۶)، آنتروپی گذشته (دی کرسنزو و لانگوباردی، ۲۰۰۲)، آنتروپی تجمعی (رائو و همکاران، ۲۰۰۴) و معیار تشخیص کولبک- لیبلر (کولبک، ۱۹۵۹) اشاره نمود. در این بین کریج (۱۹۶۱) و نات (۱۹۶۸) شاخصی تحت عنوان اندازه نادرستی[1] به عنوان ابزاری برای اندازه‌گیری خطا در نتایج آزمایشگاهی معرفی کردند که به نوعی تعمیمی از آنتروپی شانون است.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته نامنفی به ترتیب با توابع تجمعی $F(x)$ و $G(y)$ و توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(y)$ باشند. اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال واقعی مشاهدات و $g(y)$ تابع چگالی احتمال برآورد شده توسط محقق باشد، آنگاه اندازه نادرستی به صورت

$$\begin{aligned} K_{X,Y} &= -\int_{0}^{\infty} f(x)\log g(x)dx \\ &= -\int_{0}^{\infty} f(x)\log f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}dx, \end{aligned} \qquad (1)$$

تعریف می‌شود، که در آن عبارت اول همان آنتروپی شانون و عبارت دوم اندازه تشخیص کولبک-لیبلر به صورت $KL_{f:g} = E(\log\frac{f(X)}{g(X)}) = \int_{0}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{g(x)}dx$ نام دارد. در واقع هنگامی که محقق نتایجی در خصوص برآورد احتمال رخ دادن یک پیشامد ارائه می‌دهد این برآورد با دو نوع خطا توأم است یکی مربوط به اطلاعات نادرست در مشاهدات (آنتروپی) و دیگری مربوط به دقت و نیکویی برآورد (شاخص کولبک-لیبلر) است که اندازه نادرستی مجموعی از این دو نوع خطاست. در حالت خاص $f(x) = g(x)$، یعنی وقتی توزیع برآورد شده دقیقاً مطابق با توزیع واقعی باشد، $K_{X,Y}$ به حداقل مقدارخود که همان آنتروپی شانون است می‌رسد. ویژگی‌ها و خواص بیشتر این شاخص را می‌توانید در رساله دکتری اسمیتا (۲۰۱۰) و مراجع ذکر شده در آن ملاحظه کنید.

در مباحث قابلیت اعتماد چون اغلب طول عمر سیستم‌ها و مولفه‌های آن در طول زمان بررسی می‌شوند، آنتروپی شانون و اندازه نادرستی کریج در شکل حاضر قابل استفاده و مناسب نیستند. بنابراین اکثر شاخص‌های قابلیت اعتماد براساس دو مفهوم اساسی اندازه‌های مانده عمر، مبتنی بر متغیر تصادفی $X^*_t = X - t|X \geq t$ و گذشته عمر، مبتنی بر متغیر تصادفی $X_t = t - X|X \leq t$ معرفی و بررسی می‌شوند.

[1]Inaccuracy measure

براساس متغیر تصادفی مانده عمر، X_t^*، تانجا وهمکاران (۲۰۰۹) اندازه نادرستی مانده عمر را به صورت

$$K^*_{X,Y}(t) = -\int_t^\infty \frac{f(x)}{\overline{F}(t)} \log \frac{g(x)}{\overline{G}(t)} dx$$
$$= \log \overline{G}(t) - \frac{1}{\overline{F}(t)} \int_t^\infty f(x) \log g(x) dx,$$

تعریف کردند. همچنین کومار و همکاران (۲۰۰۹) اندازه نادرستی گذشته عمر [2] را بر اساس متغیر X_t به صورت

$$K_{X,Y}(t) = -\int_0^t \frac{f(x)}{F(t)} \log \frac{g(x)}{G(t)} dx$$
$$= \log G(t) - \frac{1}{F(t)} \int_0^t f(x) \log g(x) dx, \quad (۲)$$

معرفی کردند، که در آن‌ها به ترتیب وقتی $t \to 0$ و $t \to \infty$، اندازه نادرستی به صورت (۱) را خواهیم داشت.

یکی‌دیگر از مباحث جدیدی که در قابلیت اعتماد مورد توجه محققین قرار گرفته است، استفاده از تابع چندک به جای تابع توزیع در تحلیل و مدل‌بندی داده‌هاست. تابع چندک برای متغیر تصادفی پیوسته یا گسسته X با تابع توزیع $F(x)$ به صورت

$$Q(u) = F^{-1}(u) = \inf\{t | F(t) \geq u\}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

تعریف می‌شود. اگرچه تابع توزیع و تابع چندک در صورت وجود، اطلاعات یکسانی در مورد توزیع طول عمر مورد نظر می‌دهند اما خواص متفاوتی که این دو تابع دارند باعث می‌شود در برخی مواقع استفاده از یکی بر دیگری ترجیح داده شود و نتایج دقیق‌تر و کاراتری بدست آید. از جمله ویژگی‌های تابع چندک که در تابع توزیع وجود ندارد می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: (گیلچریست، ۲۰۰۰).

الف) حاصل جمع دو تابع چندک، خود یک تابع چندک می‌شود.

ب) حاصل ضرب دو تابع چندک مثبت، خود یک تابع چندک می‌شود.

---
[2] Past inaccuracy measure

ج) هرتابع غیرنزولی از یک تابع چندک، یک تابع چندک است.
د) هر ترکیب محدب دو تابع چندک یک تابع چندک است.
در بسیاری از مواقع تابع چندک کمتر تحت تأثیر مشاهدات کرانگین[۳] قرار می‌گیرد و می‌توان تحلیل را با در دسترس داشتن اطلاعات کمتری هم انجام داد. بعلاوه توزیع‌های کاربردی و مهمی نیز وجود دارند که براساس تابع چندک معرفی می‌شوند و تابع توزیع آنها فرم بسته و تحلیلی ندارد. به عنوان مثال توزیع گویندراجلو[۴] (گویندراجلو، ۱۹۷۷) که تابع توزیع آن فرم بسته‌ای ندارد به کمک تابع چندک به صورت

$$Q(u) = \theta + \alpha\{(\beta+1)u^{\beta} - \beta u^{\beta+1}\}; \quad 0 \leq u \leq 1,\ \alpha, \beta > 0, \theta \in R, \qquad (3)$$

بیان می‌شود. از دیگر توزیع‌ها می‌توان به توزیع‌های لامبدا (ون استادن و لوتس، ۲۰۰۹)، توزیع توانی–پارتو (هانگین و لی، ۲۰۰۶) و خانواده وایبول تعمیم یافته (مدهولکار و همکاران، ۱۹۹۶) اشاره نمود.

وقتی متغیر تصادفی X مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F(Q(u)) = FQ(u) = u$. حال با تعریف تابع چگالی احتمال چندک به صورت $q(u) = Q'(u)$ داریم:

$$q(u) fQ(u) = 1.$$

به کمک مفهوم تابع چندک، می‌توان بسیاری از شاخص‌های قابلیت اعتماد و نظریه اطلاع را بازنویسی کرد که در ادامه به معرفی برخی از این شاخص‌ها پرداخته می‌شود (نیر و همکاران ، ۲۰۱۳). نیر و سنکاران (۲۰۰۹) تابع نرخ شکست وارون به فرم $a(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ را براساس تابع چندک به صورت

$$A_X(u) = a_X(Q(u)) = \frac{fQ(u)}{FQ(u)} = [uq(u)]^{-1}, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

تعریف کردند. که براساس آن، تابع نرخ شکست وارون چندکی $A_X(u)$ برابر است با نرخ لحظه‌ای شکست در بازه کوچکی از گذشته عمر، به شرطی که بدانیم شکست در زمانی درست قبل از نقطه $100u\%$ از توزیع واقع شده باشد. همچنان که به کمک تابع نرخ شکست وارون می‌توان توزیع مورد نظر را مشخص‌سازی

[3] Extreme observations
[4] Govindarajulu distribution

کرد، تابع $A_X(u)$ به کمک رابطه

$$Q(u)=\int_{0}^{u}\frac{dp}{pA_X(p)},$$

تابع چندک و در نتیجه تابع چگالی احتمال چندک را مشخص‌سازی می‌کند.

قضیه ۱: هیچ متغیر طول عمر نامنفی وجود ندارد که دارای نرخ شکست وارون چندکی اکیداً صعودی باشد. به‌عبارتی رده توزیع‌های نرخ شکست وارون چندکی اکیداً صعودی تهی است.

برهان: با استفاده از برهان خلف فرض کنید $A_X(u)$ به ازای تمام $u\in(0,1)$ صعودی باشد. در این صورت برای هر $u>0$ داریم:

$$\lim_{p\to 0}A_X(p)<A_X(u)\Longleftrightarrow \lim_{p\to 0}pq(p)>uq(u)\Longleftrightarrow q(u)<0\Longleftrightarrow f(Q(u))<0,$$

که یک تناقض است.

بعلاوه میانگین گذشته عمر به صورت $m_X(t)=\frac{\int_0^t F(x)dx}{F(t)}$ براساس تابع چندک به صورت

$$M_X(u)=m_X(Q(u))=\frac{1}{u}\int_{0}^{u}(Q(u)-Q(p))dp=u^{-1}\int_{0}^{u}pq(p)dp,$$

قابل بازنویسی است. که درواقع متوسط زمان گذشته از شکست در نقطه زمانی که $100u$درصد از عمر گذشته باشد، تفسیر می‌شود. می‌توان نشان داد (نیر و همکاران، ۲۰۱۳):

$$\begin{aligned}[A_X(u)]^{-1} &= M_X(u)+uM'_X(u),\\ Q(u) &= M_X(u)+\int_{0}^{u}\frac{M_X(p)}{p}dp,\\ M_X(u) &= u^{-1}\int_{0}^{u}[A_X(p)]^{-1}dp.\end{aligned}$$

نتیجه ۱: مشابه قضیه ۱ و به کمک قاعده هوپیتال می‌توان نشان داد که هیچ متغیر تصادفی طول عمر نامنفی وجود ندارد که دارای میانگین گذشته عمر چندکی اکیداً نزولی باشد. بعبارتی رده توزیع‌های میانگین گذشته عمر چندکی اکیداً نزولی تهی هستند.

آنتروپی شانون نیز براساس تابع چندک اولین بار توسط سنوج و سنکاران (۲۰۱۲) به صورت

$$H_X^q = -\int_{\circ}^{\backprime} fQ(u)\log fQ(u)dQ(u) = \int_{\circ}^{\backprime} \log q(u)du,$$

بیان شده است. همچنین سنوج و سنکاران (۲۰۱۲) و سنوج و همکاران (۲۰۱۳) به ترتیب براساس تابع چندک، تعمیم آنتروپی شانون برای متغیرهای گذشته عمر و مانده عمر را تعریف و خواص آنها را بررسی کردند. همچنین آنتروپی‌های تجمعی گذشته و مانده عمر براساس تابع چندک توسط سنکاران و سنوج (۲۰۱۷) بیان و ویژگی‌هایی از آنها به دست آمد. نویسندگان زیادی در خصوص بیان آنتروپی‌های مختلف و مشخص‌سازی رده توزیع‌های طول عمر براساس تابع چندک مطالعاتی انجام داده‌اند که از آن جمله می‌توان به نیر و سنکاران (۲۰۰۹)، سنکاران و نیر (۲۰۰۹)، سنکاران و همکاران (۲۰۱۰)، نیر و همکاران (۲۰۱۲)، میدهو و همکاران (۲۰۱۳)،ناندا و همکاران (۲۰۱۴) و سنکاران و همکاران (۲۰۱۶) اشاره نمود. بعلاوه خراشادی‌زاده و چهکندی (۲۰۱۶) اندازه نادرستی مانده عمر را براساس تابع چندک بیان و برخی از خواص آنها را ارائه دادند.

در این مقاله به معرفی و بررسی ویژگی‌هایی از اندازه نادرستی گذشته عمر و مدل نرخ شکست وارون متناسب براساس تابع چندک پرداخته می‌شود. همچنین دو رده توزیع طول عمر براساس این مفاهیم بیان و مشخص‌سازی‌هایی بر این اساس به دست آورده، خواص یکنوایی اندازه نادرستی گذشته عمر در مدل‌های موزون مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲ اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توابع تجمعی $F(x)$ و $G(y)$ و توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(y)$ باشند. اگر $Q(u)$ تابع چندک X باشد، آنگاه اندازه نادرستی چندکی را به صورت

$$\begin{aligned} K_{X,Y}^q &= -\int_{\circ}^{\backprime} fQ(p)\log gQ(p)dQ(p) \\ &= -\int_{\circ}^{\backprime} \log gQ(p)dp, \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. از طرفی با توجه به اینکه هرتابع ناکاهشی از تابع چندک، یک تابع چندک است، می‌توان نشان داد $G(Q(u))$ تابع چندک متغیرتصادفی مانند Z با تابع توزیع FG^{-1} است. یا به عبارتی $Q_Z(u) = G(Q(u)) = G(F^{-1}(u))$. بنابراین با مشتق گرفتن از طرفین رابطه اخیر داریم $q_Z(u) = q(u)g(Q(u))$ حال با لگاریتم گرفتن و انتگرال‌گیری داریم:

$$\int_0^1 \log q_Z(p)dp = \int_0^1 \log q(p)dp + \int_0^1 \log g(Q(p))dp,$$

بنابراین $K^q_{X,Y} = KL^q_{f:g} + H^q_X$ که در آن $KL^q_{f:g} = -\int_0^1 \log q_Z(p)dp$ شاخص تشخیص کولبک‌-لیبلر چندکی است و با داشتن تابع $Q(u)$ یا $q(u)$ براحتی قابل محاسبه هستند. همچنین می‌توان اندازه نادرستی گذشته عمر (پویا) براساس تابع چندک را به صورت

$$\begin{aligned} K^q_{X,Y}(u) &= \log GQ(u) - u^{-1}\int_0^u fQ(p)\log gQ(p)dQ(p) \\ &= \log GQ(u) - u^{-1}\int_0^u \log gQ(p)dp \\ &= \log Q_Z(u) - u^{-1}\int_0^u \log q_Z(p)dp + u^{-1}\int_0^u \log q(p)dp \\ &= KL^q_{f:g}(u) + H^q_X(u), \end{aligned} \tag{۴}$$

نوشت. که در آن $H^q_X(u) = \log u + u^{-1}\int_0^u \log q(p)dp$ آنتروپی گذشته عمر چندکی نام دارد که اولین بار توسط سنوج و همکاران (۲۰۱۳) معرفی شد و $KL^q_{f:g}(u) = \log\frac{Q_Z(u)}{u} - u^{-1}\int_0^u \log q_Z(p)dp$ شاخص کولبک‌-لیبلر گذشته عمر چندکی نام دارد که توسط سنکاران و همکاران (۲۰۱۶) بررسی شده است.

مثال ۱۰: اگر X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع نمایی به ترتیب با پارامترهای θ و λ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} Q_X(u) &= -\frac{1}{\theta}\log(1-u), \\ H^q_X &= 1 - \log\theta, \\ K^q_{X,Y} &= \frac{\lambda}{\theta} - \log\lambda. \\ K^q_{X,Y}(u) &= \log(1-(1-u)^{\frac{\lambda}{\theta}}) + \frac{1}{u}\log(1-u) + \frac{\lambda}{\theta} - \log\lambda. \end{aligned}$$

مثال ۱۱: فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی از توزیع نمایی با تکیه گاه $(-\infty, ۰)$ و تابع توزیع‌های $F(x) = e^{\theta x}$ و $G(y) = e^{\lambda y}$ باشند (بلاک و همکاران، ۱۹۹۸). در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} Q_X(u) &= \frac{۱}{\theta}\log(u), \\ H_X^q &= ۱ - \log\theta, \\ K_{X,Y}^q &= K_{X,Y}^q(u) = \frac{\lambda}{\theta} - \log\lambda. \end{aligned}$$

همانطورکه ملاحظه می‌شود اندازه نادرستی گذشته عمر $K_{X,Y}^q(u)$، به u یا $Q(u)$ بستگی ندارد و مقداری ثابت است.

قضیه ۲: اگر متغیر تصادفی Y دارای نرخ شکست وارون نزولی باشد (DRHR) آنگاه

$$K_{X,Y}^q(u) \leq \log\frac{G(Q(u))}{g(Q(u))} = \log q(u) + \log\frac{Q_Z(u)}{q_Z(u)}.$$

برهان: بارلو و پروشان (۱۹۸۱) نشان دادند که تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی با نرخ شکست وارون نزولی، خود نزولی است، لذا به کمک رابطه (۴) به راحتی قضیه اثبات می‌شود.

۳ مدل نرخ شکست وارون متناسب چندکی

مدل نرخ شکست (وارون) متناسب یکی دیگر از مفاهیم قابلیت اعتماد در بحث مدل‌بندی و ساختار وابستگی بین دو متغیر طول است.

تعریف ۱: (گوپتا و همکاران ، ۱۹۹۸) گوییم دو متغیر تصادفی X و Y با توابع توزیع به ترتیب $F(t)$ و $G(t)$ از مدل نرخ شکست وارون متناسب با نسبت تناسب β پیروی می کنند هرگاه:

$$a_Y(t) = \beta a_X(t); t > ۰, \quad \beta > ۰,$$

یا به طور معادل هرگاه

$$G(t) = [F(t)]^{\beta}; t > ۰, \quad \beta > ۰.$$

حال اگر $Q_X(u)$ تابع چندک متغیرتصادفی X در نقطه u باشد، به کمک مفهوم تابع چندک به راحتی می‌توان نشان داد که مفهوم مدل نرخ شکست وارون متناسب براساس تابع چندک با هریک از روابط زیر به ازای هر $u \in (۰, ۱)$ معادل است:

$$\begin{aligned} GQ_X(u) &= u^{\beta}, (G(u) = \{Q_X^{-۱}(u)\}^{\beta}) && (۵) \\ gQ_X(u) &= \frac{\beta u^{\beta-۱}}{q_X(u)}, (g(u) = \frac{\beta\{Q_X^{-۱}(u)\}^{\beta-۱}}{q_X(Q_X^{-۱}(u))}) && (۶) \\ Q_Y(u) &= Q_X(u^{\frac{۱}{\beta}}), \\ A_Y(u) &= \beta A_X(u^{\frac{۱}{\beta}}). \end{aligned}$$

بنابراین تحت فرض برقراری مدل نرخ شکست وارون متناسب، اندازه‌های $K^q_{X,Y}$ و $K^q_{X,Y}(u)$ به صورت

$$\begin{aligned} K^q_{X,Y} = K^{pq}_X &= -\int_۰^۱ \log(\frac{\beta p^{\beta-۱}}{q_X(p)})dp, \\ K^q_{X,Y}(u) = K^{pq}_X(u) &= \beta \log u - \frac{۱}{u}\int_۰^u \log(\frac{\beta p^{\beta-۱}}{q_X(p)})dp \\ &= \beta \log u - u^{-۱}\int_۰^u \log(A_X(p)\beta p^{\beta})dp \\ &= \beta - \log\beta - u^{-۱}\int_۰^u \log A_X(p)dp, && (۷) \end{aligned}$$

تبدیل می شوند. نشان می‌دهد در صورت در دسترس بودن نرخ شکست وارون چندکی، تابع اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی قابل محاسبه است.

۴ مشخص‌سازی

اگر چه تمام مشخص‌سازی‌های انجام شده براساس اندازه نادرستی گذشته عمر را می‌توان با یک تغییر متغیر به صورت $x = Q(u)$ برای مفهوم چندکی آن نیز بیان کرد، اما حالاتی نیز وجود دارد که می‌توان تابع چندک $Q(u)$ یا تابع چگالی چندکی $q(u)$ را به‌طور یکتا به کمک این اندازه‌ها مشخص‌سازی کرد، در حالی‌که در حالت غیر چندکی نمی‌توان رابطه صریحی برای تابع توزیع یا تابع چگالی آن بدست آورد.

قضیه ۳: اگر X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب پیروی کنند، آنگاه اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی، $K_X^{pq}(u)$، به‌طور یکتا تابع چگالی چندکی $q(u)$ را مشخص‌سازی می‌کند.

اثبات: با مشتق‌گیری از رابطه (۴) نسبت به u داریم:

$$K'^{q}_{X,Y}(u) \;=\; \frac{q(u)gQ(u)}{G(Q(u))} + \frac{1}{u^2}\int_0^u \log gQ(p)dp - \frac{1}{u}\log gQ(u),$$

یا

$$uK'^{q}_{X,Y}(u) = \frac{uq_X(u)gQ(u)}{GQ(u)} - K^{q}_{X,Y}(u) + \log GQ(u) - \log gQ(u).$$

چون X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب پیروی می‌کنند، با جای‌گذاری روابط (۵) و (۶)،

$$uK'^{pq}_X(u) = \beta - \log\beta - K^{pq}_X(u) + \log u + \log q_X(u). \tag{۸}$$

بنابراین،

$$q_X(u) = \exp\{uK'^{pq}_X(u) + K^{pq}_X(u) - \log u - \beta + \log\beta\}.$$

درنتیجه با استفاده از $K_X^{pq}(u)$ می‌توان $q(u)$ را به طور منحصر به فرد بدست آورد.

نتیجه ۲: در حالت خاص $\beta = 1$ در مدل نرخ شکست وارون متناسب، اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی به آنتروپی مانده چندکی که توسط سنوج و همکاران (۲۰۱۳) معرفی شده، تبدیل می‌شود.

نتیجه ۳: با مشتق گرفتن نسبت به u از طرفین رابطه (۷) می‌توان ارتباط بین نرخ شکست وارون چندکی و اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی را در مدل‌های نرخ شکست وارون متناسب به صورت

$$A_X(u) = \beta^{-1}\exp\{\beta - K^{pq}_X(u) + uK'^{pq}_X(u)\},$$

بدست آورد. از طرفی چون $A_X(u)$ تابع چگالی چندکی را مشخص‌سازی می‌کند، اثباتی دیگر از قضیه ۳ خواهیم داشت.

قضیه ۴: تحت فرض برقراری مدل نرخ شکست وارون متناسب، اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی به صورت

$$K_X^{pq}(u) = \log(\frac{a}{b}u + 1)^{-(\frac{b}{au}+1)} + \beta - \log b\beta + 1, \quad 0 < u < 1,$$

است اگر و تنها اگر

$$A_X(u) = au + b,$$

یا به‌طور معادل

$$Q(u) = \log(\frac{a}{b} + u^{-1})^{-1/b} - \frac{1}{b}.$$

برهان: با جای‌گذاری روابط در نتایج فرع ۳ و استفاده از رابطه (۷) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۵: اگر متغیرهای تصادفی X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب پیروی کنند، آن‌گاه X دارای توزیع توانی با تابع توزیع $F(x) = (\frac{x}{\alpha})^{\theta} I_{(0,\alpha)}\{x\}$ خواهد بود اگر و فقط اگر اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی تابعی خطی از $\log u$ به صورت

$$K_X^{pq}(u) = a\log u + b; \quad 0 < u < 1,$$

باشد، که در آن $a = \frac{1}{\theta}$ و $b = \beta + \log\frac{\alpha}{\beta\theta} - \frac{1}{\theta}$.

برهان: بنابر قضیه ۳ تابع $K_X^{pq}(u)$ به‌طور یکتا توزیع را مشخص‌سازی می‌کند چون در توزیع توانی تابع نرخ شکست وارون چندکی به صورت $A_X(u) = \theta(\alpha u^{\frac{1}{\theta}})^{-1}$ است، قضیه اثبات شود.

۵ توزیع‌های طول عمر براساس تابع چندک

متناسب با هر مفهوم قابلیت اعتماد که براساس تابع چندک تعریف می‌شود می‌توان یک رده توزیع طول عمر نیز در نظر گرفت و مفاهیم فوق را گسترش داد. در همین راستا براساس اندازه نادرستی گذشته عمر دو رده طول عمر را در نظر بگیرید.

تعریف ۲: متغیرهای تصادفی X و Y دارای خاصیت اندازه نادرستی گذشته عمر صعودی (نزولی) هستند اگر و فقط اگر تابع $K^q_{X,Y}(u)$ نسبت به $u \geq ۰$ صعودی (نزولی) باشد و با نماد IQI نمایش داده می‌شود. اگر این دو متغیر از مدل نرخ شکست وارون متناسب هم تبعیت کنند، این خاصیت با نماد IPQI (DPQI) نمایش داده می‌شود.

نتیجه ۴: به کمک رابطه (۸) نتیجه می‌شود اگر X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب به صورت (۶) تبعیت کنند و دارای خاصیت IPQI (DPQI) باشند، آنگاه کران بالا (پایین) برای $K^{pq}_X(u)$ به صورت

$$K^{pq}_X(u) \leq (\geq) \beta - \log\beta + \log[uq_X(u)], \tag{۹}$$

خواهد بود. اگر X دارای توزیع نمایی با تکیه‌گاه $(-\infty, ۰)$ و تابع توزیع $F(x) = e^{\theta x}$ باشد، آنگاه طبق مدل نرخ شکست وارون متناسب، Y دارای توزیع نمایی با تکیه‌گاه منفی و تابع توزیع $G(y) = e^{\theta\beta y}$ خواهد بود. بنابراین با توجه به مثال ۱۱ داریم:

$$K^{pq}_X(u) = \beta - \log\beta - \log\theta = \beta - \log\beta + \log[uq_X(u)].$$

پس تساوی در رابطه (۹) فقط برای توزیع نمایی با تکیه‌گاه منفی برقرار است.

قضیه ۶: اگر X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب پیروی کنند و X دارای خاصیت IPQI باشد، و همچنین اگر ϕ تابعی صعودی و مقعر باشد، آنگاه $\phi(X)$ نیز دارای خاصیت IPQI خواهد بود.

برهان: فرض کنید $Z = \phi(X)$ آنگاه $f_Z(z) = \frac{f(\phi^{-۱}(z))}{\phi'(\phi^{-۱}(z))}$، بنابراین،

$$A_Z(u) = \frac{۱}{uq_Z(u)} = \frac{۱}{uq_X(u)\phi' Q(u)},$$

با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} K^{pq}_Z(u) &= \beta - \log\beta - \frac{۱}{u}\int_۰^u \log\frac{۱}{pq_X(p)\phi' Q(p)}dp \\ &= K^{pq}_X(u) + \frac{۱}{u}\int_۰^u \log\phi' Q(p)dp. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

حال از مشتق (۱۰) نسبت به u داریم:

$$\begin{aligned} K'^{pq}_Z(u) &= K'^{pq}_X(u) - \frac{۱}{u^۲}\int_۰^u \log\phi' Q(p)dp + \frac{۱}{u}\log\phi' Q(u) \\ &= K'^{pq}_X(u) + \frac{۱}{u^۲}(u\log\phi' Q(u) - \int_۰^u \log\phi' Q(p)dp). \end{aligned}$$

از طرفی $Q(u)$ تابعی ناکاهشی است و اگر ϕ هم تابعی نامنفی، صعودی و مقعر باشد آنگاه برای $۰ < u < p < ۱$ داریم $\log\phi' Q(u) > \log\phi' Q(p)$. با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی نتیجه می‌شود، $u\log\phi' Q(u) > \int_۰^u \log\phi' Q(p)dp$ یعنی، عبارت دوم سمت راست رابطه فوق مثبت خواهد بود. حال اگر X دارای خاصیت IPQI باشد، $K'^{pq}_X(u)$ مثبت خواهد بود و طبق نتایج فوق $Z = \phi(X)$ نیز دارای خاصیت IPQI می‌باشد.

نتیجه ۵: مشابه قضیه ۶ می‌توان نشان داد که اگر X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب پیروی کنند و X دارای خاصیت DPQI باشد، و همچنین اگر ϕ تابعی صعودی و محدب باشد، آنگاه $\phi(X)$ نیز دارای خاصیت DPQI خواهد بود.

۶ اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی موزون

فیشر (۱۹۳۴) ایده اصلی توزیع‌های موزون را مطرح نمود. توزیع‌های موزون با در نظر گرفتن وزن‌های مختلف انعطاف پذیری مطلوبی در برازش به مشاهدات مختلف دارند. اگر $w(x)$ تابع وزن مثبت باشد و X^w نمایانگر متغیر تصادفی موزون متناظر با وزن $w(x)$باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال موزون X به صورت

$$f^w(x) = \frac{w(x)f(x)}{E(w(X))}, \quad x > ۰, E(w(X)) < \infty,$$

بدست می‌آید. ناوارو و همکاران (۲۰۰۶)، بارتوسزویچ (۲۰۰۹) و گوپتا و آرنولد (۲۰۱۶) .

براساس تابع چندک نیز می‌توان تابع چگالی احتمال موزون را به صورت

$$f^w(Q(u)) = \frac{w(Q(u))fQ(u)}{\mu^*},$$

بیان کرد، که در آن

$$\mu^* = \int_۰^۱ w(Q(p)) fQ(p) dQ(p) = \int_۰^۱ w(Q(p)) dp.$$

همچنین تابع چگالی احتمال چندک وزنی نیز برابر $q^w(u) = \frac{\mu^* q(u)}{w(Q(u))}$ است. سنوج و سنکاران (۲۰۱۲)، سنوج و همکاران (۲۰۱۳)، سنکاران و همکاران (۲۰۱۶) و کاندو (۲۰۱۷) اندازه‌های اطلاع مانند آنتروپی تجمعی مانده چندکی، آنتروپی تجمعی گذشته چندکی، شاخص کولبک–لیبر چندکی و اندازه نادرستی را در حالت موزون نیز مورد بررسی قرار داده‌اند. حال تحت فرض برقراری مدل نرخ شکست وارون متناسب چندکی، می‌توان اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی موزون را به صورت

$$\begin{aligned} K_X^{wpq}(u) &= \beta \log u - \frac{۱}{u} \int_۰^u \log(\frac{\beta p^{\beta-۱}}{q^w(p)}) dp \\ &= K_X^{pq}(u) + \log \mu^* - \frac{۱}{u} \int_۰^u \log w(Q(p)) dp, \end{aligned}$$

بازنویسی کرد.

قضیه ۷: تحت فرض برقراری مدل نرخ شکست وارون متناسب، اگر $w(x)$ تابع وزن نامنفی، صعودی و مقعر (محدب) و همچنین متغیر تصادفی X دارای خاصیت IPQI (DPQI) باشد، آنگاه متغیر موزون X^w هم دارای خاصیت IPQI (DPQI) خواهد بود.

برهان: این قضیه مشابه قضیه ۶ اثبات می شود.

در حالت خاص $w(x) = x$ که به آن متغیر موزون در طول اریب[5] نیز می گویند، اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی موزون به صورت

$$K_X^{wpq}(u) = K_X^{pq}(u) + \log \mu - \frac{۱}{u} \int_۰^u \log Q(p) dp,$$

خواهد بود، که در آن $\mu = E(X) = \int_۰^۱ Q(p) dp$، در این حالت قضیه ۷ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

[5] Length-biased

تحت فرض برقراری مدل نرخ شکست وارون متناسب، اگر X دارای خاصیت IPQI (DPQI) باشد، آنگاه X^w نیز دارای خاصیت IPQI (DPQI) خواهد بود.

مثال ۱۲: فرض کنید X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\alpha > ۰$ و Y دارای توزیع نماییِ نمایی شده[6] با پارامترهای $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ (گوپتا و همکاران، ۱۹۹۸ و گوپتا و کاندو، ۲۰۰۱) و توابع توزیع و چندک به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} F(t) &= ۱ - e^{-\alpha t}; t > ۰, \quad (Q_X(u) = -\frac{۱}{\alpha}\log(۱-u)); ۰ < u < ۱, \\ G(t) &= \{۱ - e^{-\alpha t}\}^{\beta}; t > ۰, \quad (Q_Y(u) = -\frac{۱}{\alpha}\log(۱-u^{\frac{۱}{\beta}})); ۰ < u < ۱, \end{aligned}$$

باشند. در این صورت X و Y از مدل نرخ شکست وارون متناسب (چندکی) پیروی می‌کنند و با فرض $w(x) = x$ و $\alpha = ۱$ داریم،

$$\begin{aligned} K_X^{pq}(u) &= \beta - \log\beta + \log(u(۱-u)^{\frac{۱}{u}-۱}), \\ K_X^{wpq}(u) &= \beta - \log\beta + \log(u(۱-u)^{\frac{۱}{u}-۱}) - \frac{۱}{u}\int_۰^u \log(\log(۱-p)^{-۱})dp \\ &= \beta - \log\beta + \log(\log(۱-u)^{u(u-۱)})^{\frac{۱}{u}-۱} + \frac{۱}{u}(\gamma + Ei(\log\frac{۱}{۱-u})), \end{aligned}$$

که در آن γ ثابت اویلر و $Ei(a) = \int_۱^{\infty}\frac{e^{-ta}}{t}dt$ انتگرال نمایی[7] می‌باشد. در این مثال هر دو تابع $K_X^{pq}(u)$ و $K_X^{wpq}(u)$ نسبت به u صعودی هستند که تأییدی بر نتایج قضیه ۷ است.

۷ کاربرد

در این بخش به کمک داده‌های واقعی نشان می‌دهیم که اندازه نادرستی چندکی یک شاخص مناسب برای یافتن بهترین توزیع برازش شده به داده‌ها می باشد. در واقع یکی از ویژگی‌های مهم اندازه نادرستی چندکی این است که می‌توان توزیع‌هایی که تنها به کمک تابع چندک بیان می‌شوند و تابع توزیع آنها فرم بسته‌ای ندارد را نیز به داده‌ها برازش داد و به کمک این شاخص دقت برازش آن را با سایر توزیع‌ها مقایسه کرد.

[6] Exponentiated exponential distribution
[7] Exponential integral

داده‌های در نظر گرفته شده شامل تولید نفت گاز (برحسب مترمکعب در روز) در پالایشگاه‌های کشور ایران از سال ۱۳۷۷ تا ۱۳۹۳ به صورت

$$۶۴۷۳۱, ۶۹۵۴۵, ۶۹۹۴۵, ۷۰۸۷۹, ۷۱۹۲۳, ۷۳۱۵۴, ۷۷۰۳۷, ۷۹۲۱۵, ۸۰۴۷۳,$$
$$۸۱۵۴۹, ۸۴۹۵۷, ۸۸۷۰۲, ۹۰۹۵۱, ۹۴۶۷۷, ۹۳۵۹۵, ۹۷۶۸۹, ۹۶۰۱۶$$

از پایگاه داده مرکز ملی آمار دریافت شده است. نتایج آزمون کولموگوروف–اسمیرنف در جدول ۱ نشان می‌دهد که داده‌ها به طور معنی داری از دو توزیع نرمال با میانگین ۸۱۴۷۲/۸۲ و انحراف معیار ۱۰۶۱۷/۹۸ و توزیع گویندراجلو با پارامترهای $\beta = ۲/۲۶, \alpha = ۳۱۰۵۲/۵۲, \theta = ۶۶۸۹۰/۰۹$ پیروی می‌کنند. آماره آزمون فوق برای توزیع گویندراجلو به کمک پکیج lmomco (آسگویت، ۲۰۱۶) در نرم افزار R و استفاده از دستورهای lmoms، pargov و cdfgov محاسبه شده است.

جدول ۱: آزمون کلوموگروف–اسمیرنف برای برازش توزیع‌های نرمال و گویندراجلو

توزیع	آماره آزمون	مقدار بحرانی
نرمال	۰/۱۳۶۲۶	۰/۳۱۸
گویندراجلو	۰/۱۳۷۹۲	۰/۳۱۸

حال اگر تنها این دو توزیع برای داده‌ها متصور باشد، نشان داده می‌شود چگونه شاخص اندازه نادرستی چندکی می‌تواند برای انتخاب یکی از این دو توزیع مفید واقع شود. در جدول ۲ مقادیر اندازه نادرستی چندکی وقتی توزیع واقعی داده‌ها نرمال یا گویندراجلو باشد و توزیع برآورد شده توسط محقق نیز نرمال یا گویندراجلو باشد، محاسبه شده است. مقادیر کوچکتر اندازه نادرستی چندکی بیانگر خطای کمتر و نزدیک‌تر بودن توزیع واقعی مشاهدات و توزیع برآورد شده است، بنابراین باتوجه به مقادیر جدول ۲ اگر توزیع واقعی مشاهدات نرمال باشد و محقق توزیع نرمال را انتخاب کند اندازه نادرستی همان آنتروپی توزیع نرمال خواهد بود که برابر ۱۰/۶۸۹ است و اگر توزیع گویندراجلو را انتخاب کند اندازه نادرستی ۱۰/۰۸۰ خواهد بود. به طور مشابه اگر توزیع واقعی مشاهدات گویندراجلو باشد و انتخاب محقق نیز توزیع گویندراجلو باشد آنگاه اندازه نادرستی یا همان آنتروپی توزیع گویندراجلو برابر ۹/۰۴۸ است و اگر انتخاب محقق توزیع نرمال باشد اندازه نادرستی برابر ۱۰/۷۱۸ خواهد بود. بنابراین اگر محقق توزیع برآوردشده را گویندراجلو در نظر بگیرد خطای کمتری را به نسبت به انتخاب توزیع نرمال متحمل خواهد شد. بعلاوه معیار اطلاعات

آکائیک تصحیح شده[8] برای توزیع نرمال ۳۶۸٫۲۸ و برای توزیع گویندراجلو ۳۴۳٫۷۲ بدست آمده که تأییدی بر نتیجه بدست آمده از اندازه نادرستی چندکی است.

جدول ۲: مقادیر اندازه نادرستی چندکی $(K^q_{X,Y})$ برای توزیع‌های نرمال و گویندراجلو

توزیع برآورد شده	توزیع واقعی مشاهدات: گویندراجلو	توزیع واقعی مشاهدات: نرمال
نرمال	۱۰٫۷۱۸	۱۰٫۶۸۹
گویندراجلو	۹٫۰۴۸	۱۰٫۰۸۰

بحث و نتیجه‌گیری

بیان مفاهیم قابلیت اعتماد و نظریه اطلاع بر اساس تابع چندک مزایا و تفسی‌های کاربردی مهمی دارد و این مسئله اخیراً مورد توجه بسیاری از پژوهشگران در این حوزه شده است. در این مقاله مفاهیمی مانند اندازه نادرستی کریج، اندازه نادرستی گذشته عمر و مدل نرخ شکست وارون متناسب براساس تابع چندک بیان شده و نشان داده شد که تحت مدل نرخ شکست وارون متناسب، اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی به طور یکتا تابع چندک را مشخص‌سازی می‌کند. در همین راستا ارتباط اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی و نرخ شکست وارون چندکی خطی بیان شد. همچنین نشان داده شد وقتی اندازه نادرستی گذشته عمر تابعی خطی برحسب لگاریتم u باشد توزیع توانی مشخص‌سازی می‌شود. در ادامه نیز دو رده طول عمر اندازه نادرستی گذشته عمر چندکی صعودی و نزولی تعریف و ارتباط آن در توزیع‌های موزون بیان شده و ویژگی‌هایی از آنها برای توزیع‌های طول عمر بیان گردید. در نهایت مثالی از داده‌های واقعی برای کاربردی از اندازه نادرستی چندکی ارائه شد.

تقدیر و تشکر

مولفین لازم می‌دانند از داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند.

[8]Akaike information criterion with correction

مراجع

Asquith, W. H. (2016), lmomco-L-moments, Censored L-moments, Trimmed L-moments, L-comoments, and Many Distributions, *R Package Version 2.2.5*, Texas Tech University, Lubbock, Texas.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing,* To Begin with, Silver Spring.

Bartoszewicz, J. (2009), On a Representation of Weighted Distributions, *Statistics and Probability Letters*, 79 (**15**), 1690-1694.

Block, H. W., Savits, T. H. and Singh, H. (1998), The Reversed Hazard Rate Function, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12**, 69-90.

Ebrahimi, N. (1996), How to Measure Uncertainty in the Residual Lifetime Distribution, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series* A, 48-56.

Di Crescenzo, A. and Longobardi, M. (2002), Entropy-based Measure of Uncertainty in Past Lifetime Distributions, *Journal of Applied Probability*, 39 (**2**), 434-440.

Fisher, R. A. (1934), The Effects of Methods of Ascertainment upon the Estimation of Frequencies, *Annals of Human Genetics*, 6 (**1**), 13-25.

Gilchrist, W., (2000), *Statistical Modelling with Quantile Functions,* Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Govindarajulu, A., (1977), *A Class of Distributions Useful in Lifetesting and Reliability with Applications to Nonparametric Testing,* In: Tsokos, C. P., Shimi, I. N. (Eds.), Theory and Applications of Reliability, Vol. 1. Academic Press, New York, pp. 109-130.

Gupta, R. C., and Arnold, B. C. (2016), Preservation of Failure Rate Function Shape in Weighted Distributions, *AStA Advances in Statistical Analysis*, 100 (**1**), 1-20.

Gupta, R. C., Gupta, P. L. and Gupta, R. D. (1998), Modeling Failure Time Data by Lehman Alternatives, *Communications in Statistics-Theory and methods*, 27(**4**), 887-904.

Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001). Exponentiated Exponential Family: an Alternative to Gamma and Weibull distributions, *Biometrical Journal*, 43(**1**), 117-130.

Hankin, R. K. S. and Lee, A. (2006), A New Family of Non-negative Distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, 48 (**1**), 67-78.

Kerridge, D. F. (1961), Inaccuracy and Inference, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 184-194.

Khorashadizadeh, M. and Chahkandi, M. (2016), Quantile Based Inaccuracy Measure, *In Proceedings of the 13th Iranian Statistics Conference, Shahid Bahonar Kerman University, Kerman-Iran,* 324-329.

Kullback, S. (1959), *Information Theory and Statistics*, Weily, New York.

Kumar, V., Taneja, H. C. and Srivastava, R. (2009), A Dynamic Measure of Inaccuracy Between Two Past Lifetime Distributions, *Metrika* , **74**, 1-10.

Kundu, C. (2017), On Weighted Measure of Inaccuracy for Doubly Truncated Random Variables, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 46(**7**), 3135-3147.

Midhu, N. N., Sankaran, P. G. and Nair, N. U. (2013), A Class of Distributions With the Linear Mean Residual Quantile Function and its Generalizations, *Statistical Methodology,* **15**, 1-24.

Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K., and Kollia, G. D. (1996), A Generalization of the Weibull Distribution With Application to the Analysis of Survival Data, *Journal of the American Statistical Association,* 91(**436**), 1575-1583.

Nair, N. U. and Sankaran, P. G. (2009), Quantile Based Reliability Analysis, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **38**, 222-232.

Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Vineshkumar, B. (2012), Modelling Lifetimes by Quantile Functions Using Parzen's score Function,*Statistics*, **46**, 799–811.

Nair, N. U., Sankaran, P. G. and N. Balakrishnan, (2013),*Quantile-Based Reliability Analysis.* Springer, New York, Heidelberg, Dordrecht, London.

Nanda, A. K., Sankaran, P. G. and Sunoj, S. M. (2014), Residual Rényi's Entropy: A Quantile Approach, *Statistics and Probability Letters,* **85**, 114–121.

Nath, P. (1968). Inaccuracy and Coding Theory, *Metrika*, 13(**1**), 123-135.

Navarro, J., Ruiz, J. M. and Del Aguila, Y. (2006), Multivariate Weighted Distributions: a Review and Some Extensions, *Statistics*, **40**, 51-64.

Rao, M., Chen, Y., Vemuri, B. C., and Wang, F. (2004), Cumulative Residual Entropy: a New Measure of Information, *IEEE Transactions on Information Theory,* 50(**6**), 1220-1228.

Rényi, A. (1961), On Measures of Entropy and Information,*In Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 547-561.

Sankaran, P. G. and Nair, N. U. (2009), Nonparametric Estimation of the Hazard Quantile Function, *Journal of Nonparametric Statistics*, **21**, 757-767.

Sankaran, P. G., Nair, N. U. and Sreedevi, E. P. (2010), A Quantile Based Test for Comparing Cumulative Incidence Functions of Competing Risks Models, *Statistics and Probability Letters,* **80**, 886-891.

Sankaran, P. G. and Sunoj, S. M. (2017), Quantile-based Cumulative Entropies, *Communications in Statistics-Theory and Methods,* 46(**2**), 805-814.

Sankaran, P. G., Sunoj, S. M., and Nair, N. U. (2016), Kullback–Leibler Divergence: A Quantile Approach, *Statistics and Probability Letters,* **111**, 72-79.

Sunoj, S. M. and Sankaran, P. G., (2012). Quantile Based Entropy Function, *Statistics and Probability Letters*, **82**, 1049-1053.

Sunoj, S. M. and Sankaran, P. G., and Nanda, A. K. (2013), Quantile Based Entropy Function in Past Lifetime, *Statistics and Probability Letters*, 83(**1**), 366-372.

Shannon, C. E., (1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell system technical journal,* 27(**3**), 379-423.

Smitha, S. (2010), *A Study on the Kerridge's Inaccuracy Measure and Related Concepts*, Doctoral Dissertation, Cochin University of Science and Technology.

van Staden, P. J., and Loots, M. T., (2009), *L-moment Estimation for the Generalized Lambda Distribution*, In: Third Annual ASEARC Conference, New Castle, Australia.

Taneja H. C., Kumar V. and Srivastava R. (2009), A Dynamic Measure of Inaccuracy Between Two Residual Lifetime Distributions, *In International Mathematical Forum*, **4** , 1213–1220.