مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
جلد ۱۲، شماره ۲، ص ۴۲۹ – ۴۴۷
DOI: 10.29252/jss.12.2.429

نقدی بر استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل‌های مخاطره شرکت بیمه

زهرا رنگینیان، مائده به فروز و ابوذر بازیاری

گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۸/۰۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: در این مقاله، نشان داده می‌شود که استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو برای محاسبه احتمالات ورشکستگی می‌تواند به ضرر مدیران شرکت بیمه باشد. با محاسبه خطای نسبی این خسارت، نشان داده می‌شود که برآورد میانگین خسارت‌ها برآوردی مناسب در مدل‌های مخاطره بیمه نخواهد بود. خواهیم دید که وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، ممکن است به ضرر بیمه‌گذاران شرکت باشد. هم‌چنین در این سبد بیمه، با محاسبه امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت، نشان داده می‌شود که استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو، مناسب در برآورد خسارت‌ها نیست. با روش شبیه‌سازی، برآورد امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت برای برخی از توزیع‌های آماری محاسبه می‌شود. نتایج با مثال‌های واقعی بررسی می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: احتمال ورشکستگی، توزیع پارتو، شبیه‌سازی، مدل‌های مخاطره.

۱ مقدمه

هر جایی که مسأله ورشکستگی مطرح می‌شود، منافع طلبکاران یکی از مهمترین دغدغه‌هاست. برخورد با این طلبکاران برای ادای حقشان موضوعات متفاوتی را مطرح می‌کند که برخی از آنها حقوقی و برخی دیگر اقتصادی، اجتماعی و حتی سیاسی هستند. شخص یا شرکتی ممکن است در معاملات خود به لحاظ تحقق زیان یا بروز حوادث مختلف در ادای دیون و ایفای تعهدات مالی ناتوان گردد. در زمان‌های گذشته در هر جامعه بر حسب ضوابط خاص حاکم بر آن جامعه نحوه برخورد با این گونه اشخاص متفاوت و در مقایسه

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab_bazyari@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91B30، 60E15، 60K99

با قواعد حقوقی عصر حاضر غیرمتناسب بوده است، حتی در پاره‌ای موارد بستانکار حق داشت مدیون را به عنوان برده اسیر نماید و بابت طلب خود بفروشد، به قتل برساند یا قسمتی از اعضای بدن او را جدا کند. با تحول جامعه بشری ضوابط حاکم بر روابط بستانکار و بدهکار نیز متحول و در نتیجه حمایت از بدهکار پذیرفته شد. البته روابط و معادلات جالب ریاضی و آمار و قوانین احتمال واسطه‌ای برای پابرجایی این ضوابط شدند.

یکی از کاربردهای اساسی مفاهیم احتمالات در تعیین احتمال ورشکستگی[1] شرکت‌های بیمه[2] است. در حقیقت احتمال ورشکستگی، یک معیار ایمنی و همواره در مدیریت ریسک شرکت‌های بیمه است. در مدل‌های مخاطره شرکت بیمه برای محاسبه احتمالات ورشکستگی در زمان‌های متناهی یا نامتناهی استفاده از خسارت‌های دارای یک توزیع آماری دارای اهمیت بسزایی است. فرض کنید یک شرکت بیمه در شاخه‌ای از بیمه شروع به سرمایه‌گذاری کند. این سرمایه‌گذاری همیشه توأم با خطر است، زیرا این احتمال وجود دارد که مقدار پولی را که شرکت بابت خسارت‌های بیمه‌گذاران خود پرداخت می‌کند از مجموع سرمایه اولیه[3] و میزان حق بیمه[4] دریافتی فزونی یابد که در این‌صورت شرکت ورشکست می‌شود.

بسیاری از مفاهیم ریاضی و آماری نظریه مخاطره[5] توسط لاندبرگ (۱۹۲۶) مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بیشتر توسط کرامر (۱۹۳۰) و کرامر (۱۹۵۵) و پانجر (۱۹۸۶) به‌دست آمده است. آسموسن (۱۹۸۹) برخی از مفاهیم و قضایای نظریه مخاطره را با استفاده از زنجیره‌های مارکوف مورد مطالعه قرار داد. دیویلدر (۱۹۹۶) از روش‌های پیشرفته ریاضیات برای بسط و گسترش نظره مخاطره استفاده کرد. آسموسن و بینسوانگر (۱۹۹۷)، احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی[6] برای وقتی‌که اندازه خسارت‌ها دارای توزیع دم سنگین[7] باشند، با روش شبیه‌سازی محاسبه کردند. رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) روش‌ها و نتایج جالبی را در نظریه مخاطره به‌دست آوردند که این روش‌ها در ارتباط با مسائل مربوط به بیمه و دارایی بودند. بسیاری از نتایج و قضایای مهم در ارتباط با مدل‌های مخاطره بیمه در رلسکی (۲۰۰۰) آمده است.

نتایج مختلفی در ارتباط با تعیین تقریبی احتمال ورشکستگی به‌دست آمده است. وقتی‌که خسارت‌ها دارای توزیع دم سبک[8] هستند، نیرهنین (۱۹۹۹ و ۱۹۹۸) با استفاده از قضیه انحرافات بزرگ[9]، نتایج

[1]Ruin Probability
[2]Insurance Companies
[3]Premium
[4]Initial Capital
[5]Risk Theory
[6]Collective Risk Model
[7]Heavy Tail
[8]Light Tail
[9]Large DeviationsTheory

حدی را برای این احتمالات به‌دست آورد. آسموسن (۲۰۰۰) بسیاری از مفاهیم مدل‌های مخاطره را مورد بررسی قرار داد و برای هر کدام از این مدل‌ها با روش‌های مختلف احتمال ورشکستگی را محاسبه کرد.

نوشتاری نسبتاً کامل و دقیق از پیدایش فرآیندهای مخاطره شرکت بیمه و بررسی احتمالات ورشکستگی در مدل‌های مختلف، توسط بازیاری و پرهام (۱۳۸۷) داده شده است. بازیاری (۱۳۹۱) با روش شبیه‌سازی برآورد احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته را محاسبه و نشان داد که با افزایش سطح وابستگی بین خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران، زمان ورشکستگی فرآیند مخاطره کمتر و احتمال ورشکستگی آن افزایش می‌یابد. رامسی (۲۰۰۳) با استفاده از تبدیلات لاپلاس و انتگرال‌های نمایی احتمال ورشکستگی را برای خسارت‌های دارای توزیع پارتو محاسبه کرد. وی و یانگ (۲۰۰۴) در فرآیند مخاطره‌ای که در آن زمان‌های رخ‌داد خسارت‌ها دارای توزیع ارلنگ و اندازه خسارت‌ها دارای توزیع پارتو باشند، با استفاده از روش رامسی (۲۰۰۳) احتمال ورشکستگی را محاسبه کردند. دیکسون (۲۰۰۵) تحقیقات گسترده‌ای در زمینه احتمالات ورشکستگی انجام و با مثال‌های کاربردی به تجزیه و تحلیل مسایل مربوط به امور بیمه پرداخت.

کاس و همکاران (۲۰۰۸) بسیاری از نتایج عددی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مدل‌های مخاطره برای توزیع‌های نمایی و غیر نمایی را تعیین و آنها را با استفاده از نرم‌افزار R محاسبه کردند. لفور و لویسل (۲۰۰۸) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را برای مدل‌های مختلف مخاطره بیمه محاسبه کردند. بسیاری از مدل‌های مخاطره شرکت بیمه و تعیین احتمالات ورشکستگی آنها در کلاگمن و همکاران (۲۰۰۸) آمده است. استیتسیاشویلی (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی برای توزیع‌های با دم سنگین محاسبه و با یک مثال عددی نتایج به‌دست آمده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. لفور و لویسل (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره جمعی با فرض ثابت نبودن مقدار حق بیمه دریافتی از بیمه‌گذاران محاسبه کردند.

آلبرچر و کوتشاک (۲۰۰۹) به محاسبه تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مدل مخاطره جمعی با خسارت‌های دارای توزیع پارتو[10] پرداختند و نتایج با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار گرفتند. آهن و همکاران (۲۰۱۲) کلاسی از توزیع‌های مدل لاگ فاز را به‌عنوان توزیع‌های دم سنگین معرفی و نتایج را با مثال‌های عددی مورد بررسی قرار دادند. جاسیولویچ و کوردچی (۲۰۱۵) احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی با اندازه خسارت‌های دارای توزیع پارتو محاسبه، مقادیر عددی آن را برای اندازه‌های مختلف نمونه و سرمایه اولیه تعیین و نشان دادند که در حضور خسارت‌های دارای توزیع پارتو،ضریب تعدیل

[10] Pareto Distribution

وجود ندارد. بازیاری (۱۳۹۶) با یک روش کاملاً جدید احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی را محاسبه و یک فرمول صریح برای تعیین تقریب لاندبرگ در یافتن تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب تابع توزیع متغیرهای تصادفی تعداد خسارت‌های بیمه‌گذاران به‌دست آورد و نتایج با مثال‌های کاربردی مورد بررسی قرار گرفتند.

در بخش ۲ مدل‌های مختلف مخاطره شرکت بیمه معرفی و به بیان ویژگی‌های هر کدام از آنها پرداخته شده است. در بخش ۳ نشان داده می‌شود که در مدل‌های مخاطره با وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو، برای یک نمونه تصادفی از خسارت‌ها، برآورد میانگین آنها مناسب در برآورد خسارت‌ها برای مدیران شرکت بیمه جهت تعیین خط مشی آینده شرکت نخواهد بود. هم‌چنین در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت[11]، با محاسبه امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت، دیده می‌شود که استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو چندان مناسب در این نوع سبد بیمه نیست. در بخش ۴ امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت تعریف شده در بخش ۳ در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، برای برخی از توزیع‌های آماری محاسبه و نشان داده می‌شود که برای خسارت‌های دارای توزیع پارتو، این مقدار به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد. هم‌چنین برآورد امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت محاسبه و نمودار آن همراه با نمودار بافت‌نگار با شبیه‌سازی کردن از برخی توزیع‌های آماری رسم شده است. در بخش پنجم، نتایج با مثال‌های واقعی بررسی می‌شوند. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ششم داده شده است. لازم به ذکر است که تمام محاسبات و رسم نمودارها با استفاده از نرم‌افزار R انجام شده که از طریق نویسنده مسئول مقاله قابل دریافت می‌باشد.

۲ مدل‌های مخاطره شرکت بیمه

فرض کنید (Ω, F, P) یک فضای احتمال بوده و شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $\{N(t)\ :\ t \geq 0\}$ یک فرآیند نقطه‌ای با فرض $N(0) = 0$ است.

(ب) $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و مستقل با تابع توزیع مشترک F، $(F(0) = 0)$، میانگین β، واریانس σ^2 و مستقل از فرآیند نقطه‌ای $\{N(t)\ :\ t \geq 0\}$ است.

[11] Excess of Loss Reinsurance

۱.۲ مدل مخاطره جمعی

فرض کنید یک شرکت بیمه با سرمایه اولیه ثابت u شروع به فعالیت کند، آنگاه فرآیند مخاطره جمعی شرکت به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k, \qquad (۱)$$

تعریف می‌شود، که در آن ct مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t، X_k، $k = ۱, \ldots, N(t)$، متغیر تصادفی اندازه خسارت رخ داده شده از طرف k امین بیمه‌گذار در بازه $[۰, t]$ و $\sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ مجموع خسارت‌های رخ داده شده تا زمان t است. در واقع فرض می‌شود که شرکت در هر دوره زمانی مبلغ ثابت c را از بیمه‌گذاران دریافت کند که آن را نرخ ناخالص حق بیمه‌ی مخاطره می‌گویند. علاوه بر این در مدل مخاطره جمعی، $\{N(t) \,:\, t \geq ۰\}$ فرآیند تعداد خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان t است و معمولا فرض می‌شود که $\{N(t) \,:\, t \geq ۰\}$ فرآیند پواسون با پارامتر λ است، یعنی $E\big(N(t)\big) = \lambda t$ و مستقل از متغیرهای تصادفی اندازه خسارت باشد.

لم ۱: **(بازیاری، ۱۳۹۶)** اگر $U(t)$ نشان‌دهنده سود شرکت بیمه در بازه $[۰, t]$ باشد، آنگاه $U(t) = ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ و متوسط این سود عبارت است از $E[U(t)] = (c - \lambda\beta)t$.

شرکت به غیر از هزینه‌های مستقیم بیمه‌ای خود که همان خسارت‌های بیمه‌گذاران هستند، هزینه‌های جانبی دیگری از جمله پرداخت حقوق کارکنان و هزینه‌های بازاریابی را نیز دارد. برای تأمین این هزیه مرسوم است که مبلغی تحت عنوان سربار ایمنی[۱۲] اضافی از بیمه‌گذاران دریافت شود. این مقدار را با نماد S نشان داده و به‌صورت

$$S = \frac{(c - \lambda\beta)t}{\lambda\beta t} = \frac{c}{\lambda\beta} - ۱, \qquad (۲)$$

تعریف می‌شود و بدیهی است که همواره $S > ۰$ است. در واقع با توجه به رابطه (۲) نرخ ناخالص حق بیمه مخاطره برابر

$$c = (۱ + S)\lambda\beta = S\lambda\beta + \lambda\beta,$$

[12] Safety Loading

است. اشکال اساسی نرخ ناخالص حق بیمه مخاطره این است که برای توزیع‌های دم سنگین، مانند توزیع پارتو، معقول و منطقی نیست. برای برطرف کردن این ایراد، فرمول‌های متفاوتی در ارتباط با حق بیمه بر حسب متغیر تصادفی اندازه خسارت ارایه شده است (هیپ و پلام، ۲۰۰۱).

۲.۲ مدل مخاطره انفرادی

اگر در یک دوره زمانی، شرکت بیمه تعداد n عضو بیمه‌گزار ثابت داشته باشد که هر کدام از این بیمه‌گزارها دارای خسارت X_k، $k = ۱, \ldots, n$، باشند. آن‌گاه فرآیند مخاطره (۱) را می‌توان به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=۱}^{n} X_k, \tag{۳}$$

نوشت. در این سبد بیمه، مجموع خسارت‌های رخ داده شده برابر تمام مبالغ پرداختی از طرف شرکت بابت خسارت‌های رخ داده شده است. معادله (۳) را فرآیند مخاطره بیمه انفرادی گویند (داین و گوارتس ۱۹۹۷ و بازیاری، ۱۳۹۱).

۳.۲ مدل بیمه اتکایی

بیمه اتکایی یا بیمه مجدد به معنای انتقال ریسک یا خطر از یک بیمه‌گر به بیمه‌گر دیگر است. افراد و موسسات و مال خود را در برابر خسارت‌های احتمالی نزد شرکت‌های مختلف بیمه، به‌طور مستقیم بیمه می‌کنند. اما این شرکت‌ها که افراد و اموال بسیاری را در سطح گسترده‌ای بیمه می‌کنند به نوبه خود ممکن است در مقابل خطرات سنگین و یا انبوه تعهداتی قرار گیرند که جبران خسارت‌های احتمالی آنها خارج از توان مالی این شرکت‌ها باشد. برای برخی از شرکت‌های بیمه مبلغ حق بیمه دریافتی از بیمه‌گذاران آن‌قدر زیاد نیست که بتواند جبران خسارت آنها باشد. این مورد وقتی اتفاق می‌افتد که میزان خسارت‌های رخ داده شده از بیمه‌گذاران خیلی زیاد باشد، برای مثال خسارات ناشی از طوفان، سیل یا زلزله. بدین لحاظ شرکت‌های بیمه مستقیم نیز معمولاً بخشی از تعهدات بیمه‌ای مازاد بر ظرفیت مالی و فنی خود را مجدداً نزد شرکت یا شرکت‌های بیمه دیگر بیمه می‌نمایند. این بیمه مجدد را که ابزاری برای توزیع ریسک در سطح گسترده‌تر بیمه‌ای است را بیمه اتکایی می‌نامند. بنابراین یک قرارداد بیمه اتکایی بین دو بیمه‌گر که یکی از آنها به عنوان بیمه‌گر اتکایی و دیگری به‌عنوان بیمه‌گر اولیه یا صادر کننده بیمه و یا بیمه‌گر واگذارنده نامیده می‌شود منعقد می‌گردد.

با بیمه اتکایی خطر بین چندین شرکت بیمه تقسیم شده و در صورت بروز خسارتی بزرگ وضعیت مالی یک شرکت بیمه با مخاطره روبرو نمی‌شود. فرض کنید متغیرهای تصادفی S^I و S^R به ترتیب نشان‌دهنده بخشی از خسارت بوده که توسط بیمه‌گر مستقیم و بیمه‌گر بیمه اتکایی اداره شوند. همچنین فرض کنید f تابعی افزایشی[۱۳] با $f(\circ) = \circ$ و $f(x) \leq x$، برای تمام $x \geq \circ$ باشد. در این صورت در مدل‌بندی بیمه اتکایی $S^I = \sum_{i=\backslash}^{N} f(X_i)$ و $S^R = S - S^I$ است (رلسکی و همکاران، ۱۹۹۹).

مهم‌ترین انواع قرارداد عبارتند از:

(الف) قرارداد اتکایی نسبی: قرارداد اتکایی نسبی که در آن مبلغ بیمه شده، حق بیمه و خسارت به نسبت درصدی که از قبل مشخص شده است، بین بیمه‌گر اتکایی و بیمه‌گر واگذارنده تقسیم می‌شود. قراردادهای نسبی بیشتر به شکل قراردادهای مشارکت و مازاد سرمایه می‌باشند. در این نوع پوشش تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x) = \alpha x, (\circ < \alpha < \backslash)$ در نظر گرفته می‌شود.

(ب) قرارداد اتکایی غیرنسبی: در این قراردادها مبلغ حق بیمه، بر اساس اندازه خسارت رخ داده شده از بیمه‌گذار دریافت می‌شود. معروف‌ترین نوع قراردادهای غیر نسبی، قراردادهای مازاد خسارت است. در پوشش اتکایی مازاد خسارت برای حوادث فاجعه‌آمیز، واگذارنده را در مقابل خسارات بزرگی که از یک حادثه ناشی می‌شود، حمایت می‌کند (خسارت‌های فاجعه‌آمیز یا بلاهای طبیعی، مانند سیل، زلزله، توفان، تگرگ و آتش‌سوزی‌های گسترده). در این نوع پوشش برای مقدار ثابت $M > \circ$، تابع $f(x)$ به‌صورت $f(x) = \min\{x, M\}$ در نظر گرفته می‌شود.

۳ مشکلات بیمه‌گر و بیمه‌گذار با خسارت‌های دارای توزیع پارتو

در این بخش، نشان داده می‌شود که در مدل‌های مخاطره با وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو، برای یک نمونه تصادفی از خسارت‌ها، برآورد میانگین آنها مناسب در برآورد خسارت‌ها نخواهند بود. همچنین با تعریف یک کمیت جدید بر حسب خسارت‌های رخ داده شده در مدل بیمه اتکایی، نشان داده می‌شود که استفاده از خسارت‌های با توزیع پارتو، مناسب در برآورد خسارت‌ها نیست.

---

[13] Increasing Function

۱.۳ برآورد خسارت‌ها در مدل های مخاطره بیمه

فرض کنید یک نمونه تصادفی n از بیمه‌گذاران با اندازه خسارت X_k، $k = ۱, \ldots, n$ گرفته شده باشد. آن‌گاه مقدار برآورد میانگین و واریانس خسارت‌ها عبارتند از:

$$\widehat{\mu} = \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} X_k, \qquad \widehat{\sigma}^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{k=۱}^{n}(X_k - \widehat{\mu})^۲.$$

خسارت‌ها دارای هر توزیعی باشند، این برآوردگرها نااریب هستند. فرض کنید متغیر تصادفی خسارت X_k، $k = ۱, \ldots, n$، دارای توزیع پارتو $Pa(\alpha, ۱)$، $\alpha > ۱$ و برای مقدار ثابت M، نامساوی

$$X_n^{\max} = \max_{k \leq n} X_k \leq M,$$

برقرار باشد. ابتدا هدف این است که مقدار امید ریاضی شرطی $\widehat{\mu}$ به شرط $X_n^{\max} \leq M$ و نیز خطای نسبی[14] این امید شرطی در مقایسه با مقدار میانگین واقعی توزیع پارتو یعنی $(\alpha - ۱)^{-۱}$، محاسبه شود. به دلیل هم‌توزیع بودن متغیرهای تصادفی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
E\left[\widehat{\mu}\middle| X_n^{\max} \leq M\right] &= E\left[\widehat{\mu}\middle| X_۱ \leq M, \ldots, X_n \leq M\right] \\
&= E\left[X_۱\middle| X_۱ \leq M, \ldots, X_n \leq M\right] \\
&= E\left[X_۱\middle| X_۱ \leq M\right] \\
&= \frac{\int_۰^M x \frac{\alpha}{(۱+x)^{\alpha+۱}} dx}{\int_۰^M \frac{\alpha}{(۱+x)^{\alpha+۱}} dx} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha - ۱} \frac{۱ - (۱+M)^{-(\alpha-۱)}}{۱ - (۱+M)^{-\alpha}} - ۱. \qquad (۴)
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\frac{E\left[\widehat{\mu}\middle| X_n^{\max} \leq M\right] - (\alpha-۱)^{-۱}}{(\alpha-۱)^{-۱}} &= \frac{\alpha\left(۱ - (۱+M)^{-(\alpha-۱)}\right)}{۱ - (۱+M)^{-\alpha}} - (\alpha-۱)^{-۱} \\
&= -\alpha \frac{(۱+M)^{-(\alpha-۱)} - (۱+M)^{-\alpha}}{۱ - (۱+M)^{-\alpha}}.
\end{aligned}$$

[14] Relative Error

فرض کنید برای عدد ثابت $p \in (۰,۱)$، مقدار M طوری انتخاب شود که $P(X_n^{\max} \leq M) = p$ برقرار باشد. به‌عبارت دیگر به دلیل هم‌توزیع بودن متغیرهای تصادفی

$$\begin{aligned} P(X_n^{\max} \leq M) &= P(X_۱ \leq M, \ldots, X_n \leq M) = \big(P(X_۱ \leq M)\big)^n \\ &= \big(۱-(۱+M)^{-\alpha}\big)^n = p, \end{aligned}$$

یا به‌طور معادل تساوی $(۱+M)^{-۱} = \big(۱-p^{\frac{۱}{n}}\big)^{\frac{۱}{\alpha}}$ برقرار است.

مثال ۹: برای محاسبه خطای نسبی به ازای $p = ۰/۹۹$، $n = ۱۰۰۰$ و مقادیر مختلف پارامتر توزیع پارتو رابطه (۵) را می‌توان به‌صورت

$$\frac{E\left[\widehat{\mu}\right| X_n^{max} \leq M] - (\alpha-۱)^{-۱}}{(\alpha-۱)^{-۱}} = -\alpha \frac{\big(۱-p^{\frac{۱}{n}}\big)^{\frac{\alpha-۱}{\alpha}} - \big(۱-p^{\frac{۱}{n}}\big)}{p^{\frac{۱}{n}}},$$

نوشت. مقادیر خطای نسبی در جدول ۱ و شکل ۱ نشان داده شده است.

اگر برای مثال مقدار واقعی پارامتر توزیع پارتو عدد ۱/۲۵ باشد، آن‌گاه حق بیمه در ۱۲/۵ درصد موارد از بیمه‌گذاران توسط شرکت بیمه دریافت می‌گردد که کاملاً واضح است با احتمال زیادی شرکت در آینده نزدیک با مشکل مواجه میشود و حتی از مرز ورشکستگی هم پیش رود. بنابراین برآورد میانگین خسارت‌ها برآوردی مناسب در مدل‌های مخاطره بیمه با وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو نخواهد بود.

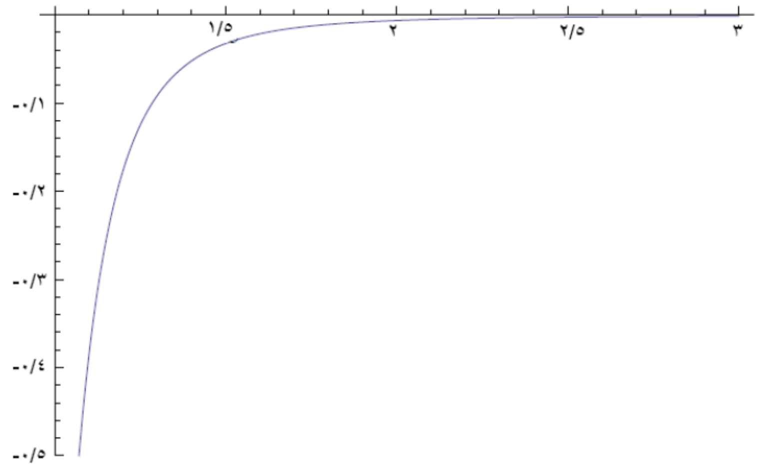
جدول ۱: مقادیر خطای نسبی برای $p = ۰/۹۹$ $n = ۱۰۰۰$ و مقادیر مختلف α

α	۱/۰۵	۱/۱	۱/۱۵	۱/۲	۱/۲۵	۱/۳	۱/۴	۱/۵
خطای نسبی	−۶۰/۷٪	−۳۸/۶٪	−۲۵/۶٪	−۱۷/۶٪	−۱۲/۵٪	−۹/۱٪	−۵/۲٪	−۳/۲٪

۲.۳ مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت

فرض کنید خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع پارتو $Pa(\alpha,۱)$، $\alpha > ۱$، باشند. برای متغیر تصادفی خسارت X_k، $k = ۱,\ldots,n$، داریم:

$$E\left[X_k - M\right| X_k > M] = \frac{\int_M^\infty x \frac{\alpha}{(۱+x)^{\alpha+۱}} dx}{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(۱+x)^{\alpha+۱}} dx} - M$$



شکل ۱: خطای نسبی برای $p = ۰٫۹۹$ و $n = ۱۰۰۰$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(۱+x)^\alpha} dx}{\int_M^\infty \frac{\alpha}{(۱+x)^{\alpha+۱}} dx} - (M+۱) \\ &= \frac{\alpha(M+۱)}{\alpha-۱} - (M+۱) = \frac{M+۱}{\alpha-۱}. \end{aligned} \qquad (۵)$$

بنابراین

$$E\left[X_k \middle| X_k > M\right] = \frac{M + (۲+\alpha) + ۱}{\alpha - ۱}. \qquad (۶)$$

رابطه (۶) یک تابع افزایشی از M است. اما در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، رابطه (۵) می‌تواند برای شرکت بیمه مشکل‌ساز باشد، چرا که در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت همواره $M > ۰$ بوده و با اختیار مقادیر بزرگ M، برآورد میانگین خسارت‌ها نیز بزرگ می‌شود. این موجب خواهد شد که طبق قرارداد، بیمه‌گر اتکایی مبلغ زیادتری را از بیمه‌گذاران خود دریافت کند. بنابراین وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت مناسب نیست. پس واقعاً لازم است که مدیر یا مدیران شرکت بیمه برای بررسی فرآیند شرکت نکات گفته شده را مدنظر قرار دهند تا بتوانند تصمیمات بهتری در جهت تعیین خط مشی شرکت اتخاذ نمایند.

۴ امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت

مقدار امید شرطی $E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right]$ داده شده در رابطه (۵) را در نظر بگیرید. چون

$$E\left[X_k \middle| X_k > M\right] = \frac{\int_M^\infty \int_M^x dz dF(x)}{1 - F(M)} = \frac{\int_M^\infty (1 - F(z))dz}{1 - F(M)}, \qquad (۷)$$

برای توزیع‌های نمایی، گاما، وایبل، لاگ نرمال و توزیع پارتو، مقدار رابطه (۷) برای $M \to \infty$ محاسبه شده است.

(الف) توزیع نمایی با پارامتر α:

$$E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right] = \frac{1}{\alpha} \to \frac{1}{\alpha}.$$

(ب) توزیع گاما $\Gamma(\gamma, \alpha)$:

$$E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right] = \frac{\int_M^\infty \int_z^\infty x^{\gamma-1} e^{-\alpha x} dx dz}{\int_M^\infty x^{\gamma-1} e^{-\alpha x} dx} \to \frac{1}{\alpha}.$$

(ج) توزیع وایبل $Wei(\alpha, c)$:

$$E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right] = \frac{\int_M^\infty e^{-cx^\alpha} dz}{e^{-cM^\alpha}} \to \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ c^{-1} & \alpha = 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

(د) توزیع لگ-نرمال $LN(\mu, \sigma^2)$:

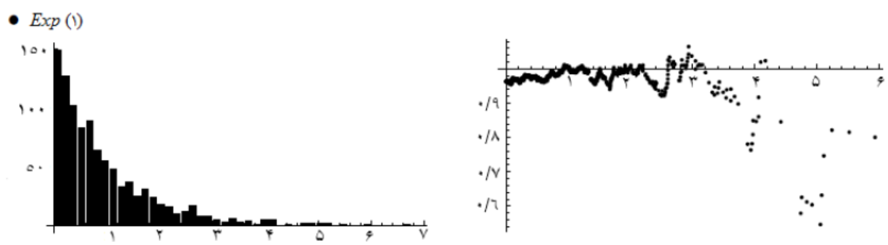
$$E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right] = \frac{\int_M^\infty \Phi\left(\frac{\mu - logz}{\sigma}\right) dz}{\Phi\left(\frac{\mu - logM}{\sigma}\right)} \to \infty.$$

(ه) توزیع پارتو $Pa(\alpha, \beta)$:

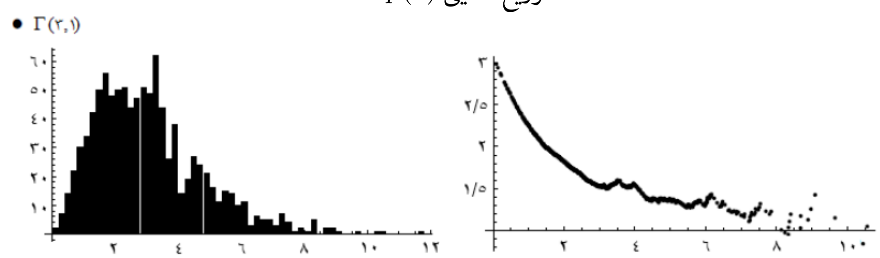
$$E\left[X_k - M \middle| X_k > M\right] = \frac{M + \beta}{\alpha - 1} \to \infty.$$

نتیجه ۱: مقدار امید شرطی برای $M \to \infty$ در توزیع‌های دم‌سنگین وایبل $Wei(\alpha, c)$، $\alpha < 1$، لگ-نرمال و پارتو به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند.

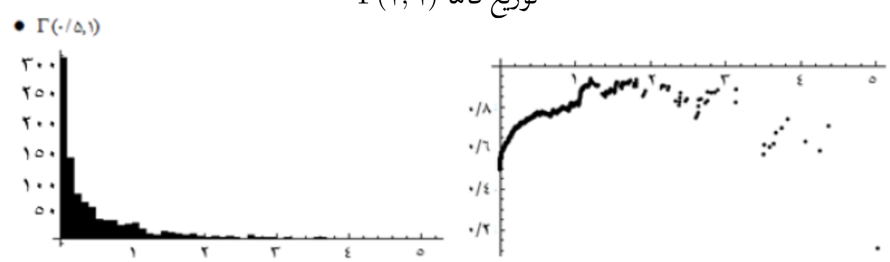
در شکل ۲، امید شرطی $E\left[X_k - M \mid X_k > M\right]$، برای توزیع‌های بالا با پارامترهای مختلف رسم شده است. در این نمودار، خط (۱) برای توزیع $Exp(1)$، خط (۲) برای توزیع $\Gamma(3, 1)$، خط (۳) برای توزیع $\Gamma(0/5, 1)$، خط (۴) برای توزیع $Wei(2, 1)$، خط (۵) برای توزیع $Wei(0/7, 1)$، خط (۶) برای توزیع $LN(-0/2, 1)$ و خط (۷) برای توزیع $Pa(1/5, 1)$ رسم شده است. از روی نمودار واضح است که نتیجه بالا نیز برقرار است.



توزیع نمایی $Exp(1)$

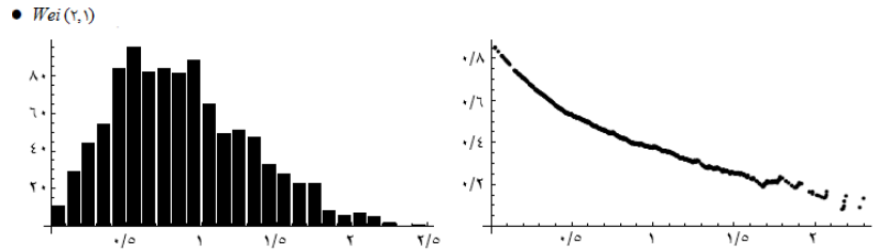


توزیع گاما $\Gamma(2, 1)$

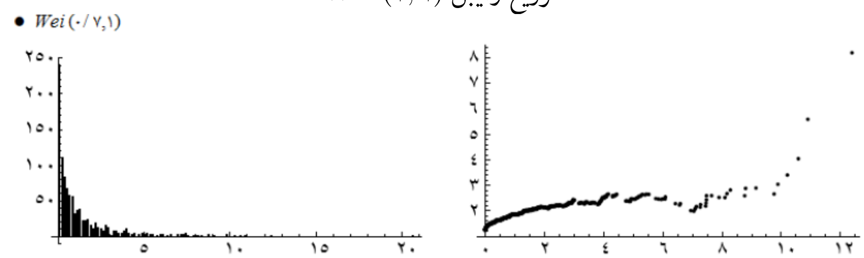


توزیع گاما $\Gamma(0/5, 1)$

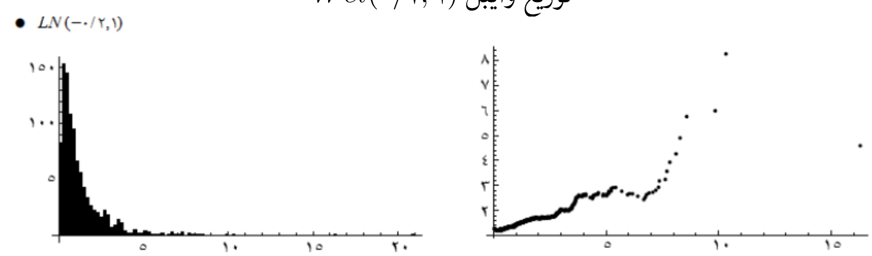
شکل ۲: بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت برای توزیع‌های نمایی و گاماها



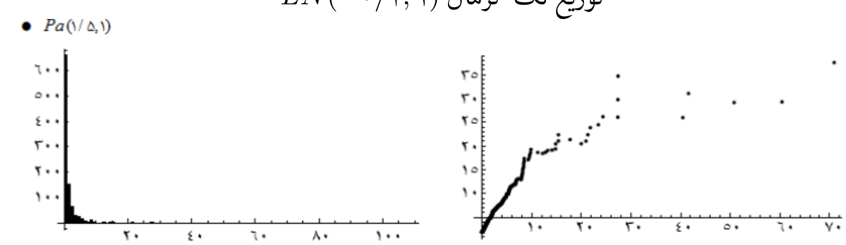
توزیع وایبل $Wei(۲, ۱)$



توزیع وایبل $Wei(۰/۷, ۱)$



توزیع لگ-نرمال $LN(-۰/۲, ۱)$



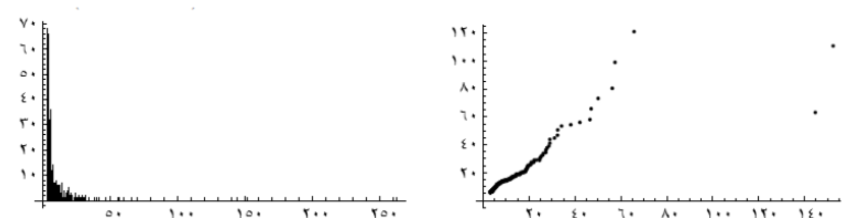
توزیع پارتو $Pa(۱/۵, ۱)$

شکل ۳: بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت برای توزیع‌های وایبل، لگ-نرمال و پارتوها

همان‌طور که ملاحظه می‌شود توزیع نمایی، هر دو توزیع گاما و توزیع وایبل $Wei(۲,۱)$ دارای توزیع دم سبک اما توزیع وایبل $Wei(۰/۷,۱)$، توزیع لگ–نرمال و توزیع پارتو توزیع‌های دم‌سنگین هستند. در واقع ملاحظه می‌شود که نمودارهای برآورد امید شرطی خسارت‌ها برای توزیع‌های دم‌سنگین تابعی افزایشی از M است.

۵ مثال‌های عددی

مثال ۲ (داده‌های آتش‌سوزی کشور دانمارک، امبریچت و همکاران، ۱۹۹۷). یک نمونه تصادفی ۵۰۰ تایی از خسارت‌های با اندازه بزرگ که مربوط به داده‌های آتش‌سوزی کشور دانمارک از اول ژانویه ۱۹۸۸ تا ۳۱ دسامبر ۱۹۹۰ بوده، جمع‌آوری شده است. آزمون برازندگی انجام شده روی داده‌ها در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$، نشان‌دهنده این است که داده‌ها از توزیع پارتو آمده‌اند. همچنین نمودارهای بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت‌ها در شکل ۴ رسم شده‌اند.

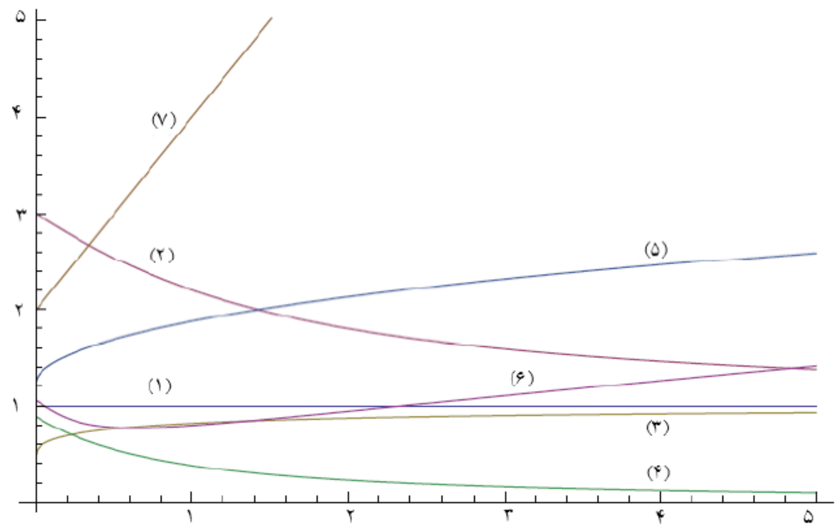


شکل ۴: بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت‌ها برای داده‌های آتش‌سوزی کشور دانمارک

۱.۵ شبیه‌سازی برآورد امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت

فرض کنید X_k، $k = ۱,\ldots,n$، یک نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی باشند. آنگاه برآورد امید شرطی $E\left[X_k - M \mid X_k > M\right]$ عبارت است از:

$$\widehat{E}\left[X_k - M \mid X_k > M\right] = \frac{۱}{\sum_{k=۱}^{n} I_{\{X_k > M\}}} \sum_{k=۱}^{n} I_{\{X_k > M\}}(X_k - M). \qquad (۸)$$

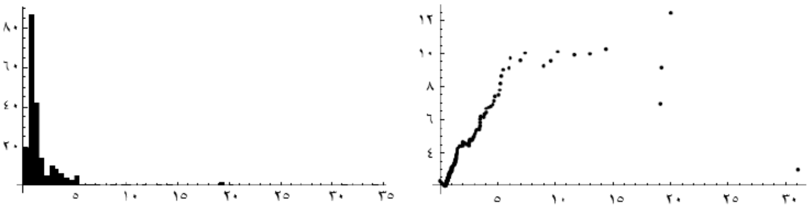


شکل ۵: امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت برای توزیع‌های مختلف

قبلاً نشان داده شد که استفاده از خسارت‌های با توزیع پارتو می‌تواند برای شرکت بیمه مشکل‌ساز باشد، اما در این بخش نمودار رابطه (۸) برای توزیع‌های مختلف رسم شده است. در واقع برای هر توزیع به تعداد ۱۰۰۰ اندازه نمونه شبیه‌سازی شده و شکل‌های ۲ و ۳ نشان‌دهنده بافت‌نگار و نمودار رابطه (۸) برای توزیع‌های در نظر گرفته شده در بخش ۴ است.

ناداراجا و باکار (۲۰۱۴) با معرفی یک توزیع مرکب و جدید بر اساس توزیع لگ-نرمال، از داده‌های مثال ۲ برای به‌کارگیری کاربرد آن استفاده کردند. همچنین آسین و همکاران (۲۰۰۹) از این داده‌ها برای استنباط بیزی و محاسبه احتمال ورشکستگی زمان متناهی استفاده کردند.

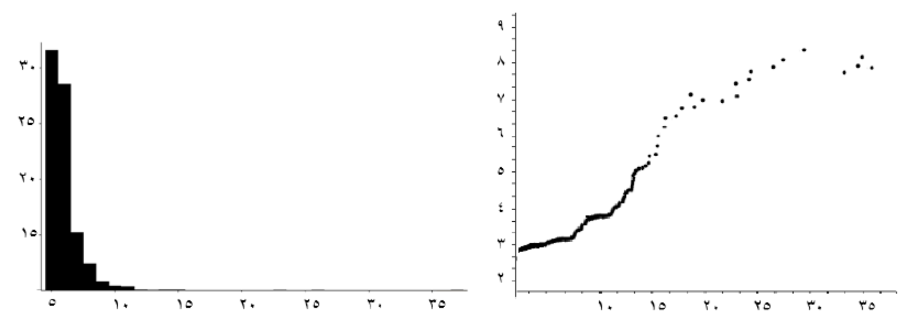
مثال ۳ (داده‌های آتش‌سوزی کشور سوئد، آسموسن، ۲۰۰۰). یک نمونه تصادفی ۲۰۰ تایی از خسارت‌ها که مربوط به داده‌های آتش‌سوزی کشور سوئد در سال ۱۹۸۲ می‌باشد، جمع‌آوری شده است. آزمون برازندگی انجام شده روی داده‌ها در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$، نشان‌دهنده این است که داده‌ها از توزیع پارتو آمده‌اند. نمودارهای بافت‌نگار و برآورد امید شرطی این خسارت‌ها در شکل ۶ رسم شده‌اند. با توجه به شکل ۶، ملاحظه می‌شود که برآورد امید شرطی خسارت‌ها ابتدا تا حدودی کاهشی بود و سپس به‌طور خطی در حال افزایش است.



شکل ۶: بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت‌ها برای داده‌های آتش‌سوزی کشور سوئد

مثال۴ (داده‌های آتش‌سوزی شرکت بیمه کارآفرین استان بوشهر). یک نمونه تصادفی ۲۵۰ تایی از خسارت‌ها که مربوط به داده‌های آتش‌سوزی واحدهای صنعتی و کارگاهی شامل ساختمان، تأسیسات، ماشین‌آلات، مواد اولیه، کالای ساخته شده و موجودی‌های انواع کارخانه‌ها و کارگاه‌های فعال در زمینه‌های مختلف صنعتی شهرستان بوشهر طی ۹ سال متوالی از ابتدای سال ۱۳۸۶ تا پایان سال ۱۳۹۴ می‌باشد، از شرکت بیمه کارآفرین بوشهر دریافت شده‌اند.

این بیمه‌نامه با سرمایه اولیه ثابت بوده و بیمه‌گذار مبلغ ثابتی را برای مدت یک سال پرداخت می‌کند. آزمون نیکویی برازش روی داده‌ها انجام شده، داده‌ها به ۸ رده تقسیم شده و مقدار آماره آزمون عدد ۸٫۱۲ به‌دست آمده است. چون مقدار آماره آزمون از مقدار $\chi^{2}_{(0.95)}(7) = 14.07$ کمتر است، بنابراین فرضیه صفر رد نمی‌شود. به‌عبارت دیگر در سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$ داده‌ها دارای توزیع پارتو هستند. نمودارهای بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت‌ها در شکل ۷ رسم شده‌اند.



شکل ۷: بافت‌نگار و برآورد امید شرطی خسارت‌ها برای داده‌های آتش‌سوزی استان بوشهر

۶ بحث و نتیجه‌گیری

نشان داده شد که برآورد میانگین خسارت‌های رخ داده شده با توزیع پارتو، برآوردی مناسب در مدل‌های مخاطره نخواهد بود و مدیریت نادرست مدیران شرکت می‌تواند شرکت را در پرداخت خسارت‌های بیمه‌گذاران با مشکل مواجه کرده و حتی شرکت را تا مرز ورشکستگی پیش برد. همچنین طبق رابطه (۶)، در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، با وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو، بیمه‌گر ممکن است مبلغ زیادتری را از بیمه‌گذاران خود دریافت کند. در این سبد بیمه با محاسبه امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت، دیده شد که استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو مناسب در برآورد خسارت‌ها نخواهد بود. با روش شبیه‌سازی برآورد امید شرطی متغیر تصادفی اندازه خسارت برای برخی از توزیع‌های آماری محاسبه و نتایج با مثال‌های کاربردی بررسی شدند. با توجه به آزمون برازندگی انجام شده در سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$، چون خسارت‌های رخ داده شده برای آتش‌سوزی واحدهای صنعتی و کارگاهی در شرکت بیمه کارآفرین استان بوشهر، دارای توزیع پارتو بودند، بنابراین بیمه‌گر و بیمه‌گذاران این شرکت بایستی در انجام مدیریت درست و پرداخت بدهی‌های خود نهایت درستبینی را به‌کار گیرند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری، ویراستار محترم و داوران محترم به خاطر صرف وقت در مطالعه مقاله و ارایه نظرات و پیشنهادات ارزشمندشان که موجب بهبود کیفیت مقاله شد، نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

بازیاری، ا و پرهام، غ. ع. (۱۳۸۷)، پیدایش فرآیندهای مخاطره و بررسی مدل‌های مربوط به آن برای محاسبه احتمالات ورشکستگی، مجموعه مقالات منتخب نهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه اصفهان، ۴۶-۶۱.

بازیاری، ا، (۱۳۹۱). احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته، مجله علوم آماری، ۶، ۲۱-۲۷.

بازیاری، ا، (۱۳۹۶). تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، ۱۱، ۳۶-۱۷.

Ahn, S., Kim, J. H.T. and Ramaswamic, V. (2012), A New Class of Models for Heavy Tailed Distributions in Finance and Insurance Risk, *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 43-52.

Albrecher, H. and Kortschak, D. (2009), On Ruin Probability and Aggregate Claim Representations for Pareto Claim Size Distribution, *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 362-373.

Asmussen, S. and Binswanger, K. (1997), Simulation of Ruin Probability for Subexponential Claims, *Astin Bulletin*, **27**, 297-318.

Asmussen, S. (1989), Risk Theory in a Markovian Enviironment, *Scandinavian Actuaria Journal*, **89**, 69-100.

Asmussen, S. (2000), *Ruin Probability, World Scientific*, Singapore.

Ausin, M. C., Wiper, M. P. and Lillo, R. E. (2009), Bayesian Estimation of Finite Time Ruin Probabilities, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **25**, 787-805.

Cramer, H. (1930), *On the Mathematical Theory of Risk*, Skandia Jubilee Volume, Stockholm.

Cramer, H. (1955), *Collective Risk Theory*, Skandia Jubilee Volume, Stockolm.

De Vylder, F. E. (1996), *Advance Risk Theory*, Edition de I'Univetsity de ruxelles.

Dhaene, J. and Goovarts, M. J. (1997), On the Dependency of Risks in the Individual Life Model, *Insurance: Mathematics and Economics*, **19**, 243-253.

Dickson, D. C. M. (2005), *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge.

Embrechts, P., Kluppelberg, C. and Mikosch, T. (1997), *Modelling Extremal Events*, Springer-Verlag.

Hipp, C. and Plum, M. (2001), Optimal Investment for Insurers, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 215-228.

Jasiulewicz, H. and Kordecki, W. (2015), Ruin Probability of a Discrete-Time Risk Process with Proportional Reinsurance and Investment for Exponential and Pareto Distributions, *Operations Research and Decisions*, **3**, 17-38.

Kaas, R., Goovaerts, M. J., Dhaene, J. and Denuit, M. (2008), Modern Actuarial Risk Theory, Using R, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2008), *Loss Models: From Data to Decisons*, Third Edition, Wiley.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2008), On Finite-Time Ruin Probabilities for Classical Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 41-60.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2009), Finite Horizon Ruin Probabilities for Independent or Dependent or Dependent Claim Amounts, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **11**, 425-441.

Lundberg, F. (1926), *Forsakringsteknisk Riskutjamning*, F. Englunds Boktryckeri A. B., Stockholm.

Nadarajah, S. and Bakar, S. A. A., (2014), New Composite Models for the Danish Fire Insurance Data, *Scandnavian Actuarial Journal*, **2014**, 180-187.

Nyrhinen, H. (1998), Rough Descriptions of Ruin for a General Class of Surpluse Processes, *Advances in Applied Probability*, **30**, 1008-1026.

Nyrhinen, H. (1999), Large Deviations for the Time of Ruin, *Journal of Applied Probability*, **36**, 733-764.

Panjer, H. H. (1986), Direct Calculation of Ruin Probabilities, *Journal of Risk and Insurance*, **53**, 521-29.

Ramsay, C. M. (2003), A Solution to the Ruin Problem for Pareto Distributions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 109-116.

Rolski. T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.