

برآورد تابع چگالی جمعیت در روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی با توابع آشکارساز

ابوذر بازیاری، نرگس موسوی

گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۱/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۷/۰۴/۲۹

چکیده: هدف این مقاله یافتن برآوردگرهایی مناسب برای تابع چگالی جمعیت آماری با روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی در حضور توابع آشکارساز با توزیع‌های با دم‌های سبک و سنگین است، بعلاوه نشان داده می‌شود که چگونه نوع تابع آشکارساز می‌تواند در انتخاب بهترین برآوردگر تاثیرگذار باشد. سپس برآوردگری ناریب پیشنهاد می‌شود که دارای واریانس کمتری نسبت به برآوردگرهای موجود است. در مطالعه‌ای شبیه‌سازی نشان داده می‌شود اگر توابع آشکارساز دارای توزیع دم سبک باشند، برآوردگرهای جدید دارای کمترین میانگین توان دوم خطا خواهند بود. **واژه‌های کلیدی:** تابع آشکارساز، کارایی نسبی، میانگین توان دوم خطا، نمونه‌گیری ترابرشی خطی

۱ مقدمه

نمونه‌گیری ترابرشی خطی^۱ یکی از روش‌های نمونه‌گیری است که از سال ۱۹۳۰ تا به حال معمولاً برای برآورد تابع چگالی جمعیت آماری در علم زیست‌شناسی استفاده می‌شود. در این روش برای برآورد تابع چگالی جمعیت، آزمایش‌گر روی خطی مستقیم در حرکت است و موقعیت عمودی اشیای مشاهده شده را تا خط اندازه‌گیری می‌کند. در حقیقت این روش یک نوع روش نمونه‌گیری بدون جایگذاری است. یک نوار مستطیلی نازک بلند مخصوص با طول و پهنای معین را در نظر بگیرید. فرض کنید اشیا در این نوار، که نوار ترابرشی نامیده می‌شود، در حال حرکت‌اند و هرچیزی که در این نوار حرکت کند قابل دیدن و ثبت

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab_bazaryari@yahoo.com

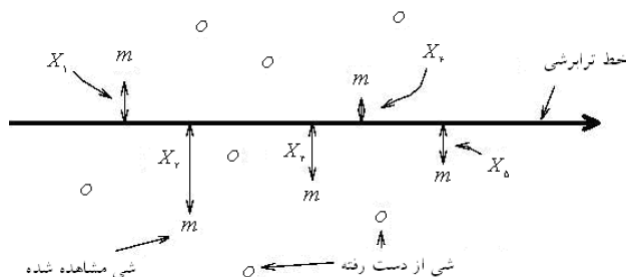
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F03, 62D05

¹Line transect sampling

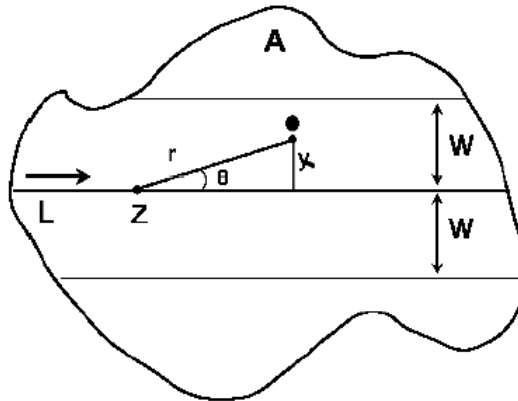
کردن باشد. آزمایش‌گر از ابتدای نوار روی مرکز نوار به طرف انتهای نوار برای دیدن اشیا (اشیا می‌توانند در سمت چپ یا راست مرکز نوار قرار گیرند) حرکت می‌کند. البته آزمایش‌گر ممکن است نتواند هر شی که در این نوار حرکت می‌کند را مشاهده کند. در حقیقت احتمال دیدن یک شی بستگی به مسافت آن شی از مرکز نوار دارد. یعنی هر چقدر که مسافت شی از مرکز کمتر باشد احتمال دیدن آن شی زیادتر است.

مثال ۶: فرض کنید آزمایش‌گر می‌خواهد با روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی تعداد حیوانات وحشی یک جنگل را برآورد کند. در این آزمایش، از بالگرد در مسیرهایی که کاملاً تصادفی انتخاب شده‌اند، نمونه‌گیری صورت می‌گیرد و داده‌ها توسط افراد با تجربه و یا دستگاه‌ها ثبت می‌شوند. به این صورت که افراد به جستجو در اطراف این مسیر می‌پردازند و به محض مشاهده یک حیوان وحشی فاصله آن را از مرکز نوار به طور دقیق اندازه‌گیری و ثبت می‌کنند.

مجموعه‌ای از t نوار که طول هر کدام معلوم و برابر با $\ell_i, i = 1, \dots, t$ و پهنای هر یک برابر $2w$ باشد را در نظر بگیرید، نوارها طوری قرار گرفته‌اند که روی هم نمی‌افتند. این طرز قرار گرفتن نوارها را نمونه‌گیری بدون جایگذاری گویند. اما اگر نوارها روی هم قرار بگیرند، نمونه‌گیری با جایگذاری نامیده می‌شوند. افراد متخصص روی نوارها حرکت می‌کنند و هر شی مشاهده شده مسافت عمودی X_i ، فاصله شی تا نوار، را طی می‌کند. در شکل ۱ مسیر حرکت اشیا رسم شده است، که در آن m نشان دهنده شی دیده شده و X_i مسافت عمودی i امین مشاهده است. به همین ترتیب می‌توان شکل ۲ را برای مسیر حرکت اشیا در نظر گرفت، که در آن ℓ طول خط ترابرشی، Z موقعیت آزمایش‌گر، w نصف پهنای نوار، r_i فاصله شی تا آزمایش‌گر و θ_i زاویه ایجاد شده توسط موقعیت آزمایش‌گر با شی مشاهده شده است.



شکل ۱: مسیر حرکت اشیا در روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی



شکل ۲: مسیر حرکت اشیای مشاهده شده

فرض کنید طول همه نوارها برابر با عدد معلوم l و پهنای هر یک $2w$ باشد. اگر $f(x)$ ، $0 \leq x \leq w$ ، تابع چگالی متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی و D تابع چگالی جمعیت در نوار باشد، ابرهارت (۱۹۷۸) نشان داد که برآورد D به صورت

$$\hat{D} = \frac{n\hat{f}(0)}{2t\ell}, \quad (1)$$

است، که در آن n تعداد اشیای مشاهده شده توسط آزمایش‌گر در t نوار است. در رابطه (۱) مقدار عددی l معلوم بوده و تنها کافی است مقدار $f(0)$ برآورد شود. مساله اصلی انتخاب برآورد مناسب برای تابع چگالی $f(x)$ است تا بتوان از رابطه (۱) مقدار $f(0)$ را برآورد کرد. روش‌های پارامتری و ناپارامتری متفاوتی برای برآورد $f(0)$ توسط نویسندگان مختلف پیشنهاد شده است. در روش پارامتری با فرض آن که تابع چگالی $f_{\theta}(x)$ به پارامتر θ بستگی دارد، برآورد θ منجر به برآورد $f(0)$ به صورت $\hat{f}(0) = f(0, \hat{\theta})$ خواهد شد. مدل‌های پارامتری مختلفی برای تابع چگالی $f_{\theta}(x)$ در نظر گرفته شده و در تمام آن‌ها برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر θ محاسبه شده است (بورنهام و همکاران، ۱۹۸۰ و باکلند، ۱۹۸۵). در روش‌های پارامتری نتایج به شدت به نوع مدل انتخاب شده بستگی دارند. کرین و همکاران (۱۹۷۹)، برای برآورد تابع چگالی $f(x)$ از سری فوریه استفاده کردند که ضرایب سری با استفاده از داده‌ها برآورد می‌شوند. در سال‌های اخیر، برخی محققان توجه خودشان را بیشتر به روش‌های ناپارامتری معطوف

کرده‌اند. یک روش ناپارامتری برای برآورد تابع $f(x)$ ، روش هسته‌ای^۲ است (باکلند و همکاران، ۱۹۹۳ و مک و گوانگ، ۱۹۹۸). سبر (۱۹۹۲) روش‌های مختلفی را برای برآورد تابع چگالی جمعیت‌های پراکنده ارایه داد. کوانگ (۱۹۹۳) نشان داد که برای اندازه نمونه بزرگ برآورد $f(x)$ دارای توزیع نرمال بوده و بازه اطمینان برای تابع چگالی جمعیت در سطح اطمینان α را به دست آورد. کارونامونی و کوین (۱۹۹۵) با روش بیز ناپارامتری به برآورد تابع $f(x)$ پرداختند. ژانگ و کارونامونی (۱۹۹۸) با روش هموارسازی چند جمله‌ای موضعی^۳ ارایه شده توسط فان (۱۹۹۲)، مقدار $\hat{f}(0)$ را به دست آوردند. بارابسی (۲۰۰۰) با روش برآورد چگالی درست‌نمایی موضعی^۴، برآورد نیم‌پارامتری^۵ $f(x)$ را محاسبه کرد. برای آشنایی با مفاهیم در مورد برآورد تابع چگالی جمعیت در نمونه‌گیری ترابرشی خطی به باکلند و همکاران (۲۰۰۱) و باکلند و همکاران (۲۰۰۴) رجوع شود. هدلی و باکلند (۲۰۰۴) روش‌های تحلیلی را برای برازش مدل‌های فضایی^۶ به داده‌های ترابرشی خطی ارایه و با مثال‌های عددی این روش‌ها را مورد بررسی قرار دادند. بورگونی و همکاران (۲۰۰۵) رفتار برآوردگر \hat{D} را برای اندازه‌های نمونه کوچک مورد بررسی قرار دادند. همچنین ایدوس (۲۰۰۵) یک برآورد جدید برای $f(0)$ با روش هسته‌ای به دست آورد و ویژگی‌های مجانبی آن را مورد بررسی قرار داد.

در بخش ۲ تابع آشکارساز^۷ در نمونه‌گیری ترابرشی خطی معرفی و به محاسبه تابع چگالی جمعیت با وجود تابع آشکارساز نیم‌نرمال پرداخته شده است. در بخش ۳ با وجود تابع آشکارساز دارای توزیع نیم‌نرمال، ابتدا ضمن نقد برآوردگر سبر (۲۰۰۲)، برآوردگری پیشنهاد شده که هم ناریب و هم دارای واریانس کم‌تری نسبت به برآوردگر سبر (۲۰۰۲) باشد. همچنین در بین کلاس تمام برآوردگرهای ناریب، برآوردگر با کم‌ترین میانگین توان دوم خطا به دست آمده است. با رسم نمودار به مقایسه کارایی نسبی برآوردگر سبر (۲۰۰۲)، با برآوردگرهای محاسبه شده در این مقاله برای مقادیر مختلف اندازه نمونه پرداخته شده است. در بخش ۴ با در نظر گرفتن توابع آشکارساز با دم‌های سبک و سنگین، با روش شبیه‌سازی ملاحظه خواهد شد که اگر توابع آشکارساز دارای توزیع دم سبک باشند، برآوردگرهای به دست آمده در بخش ۳ دارای کم‌ترین میانگین توان دوم خطا خواهند بود. همچنین نتایج شبیه‌سازی نشان خواهد داد که اگر توابع آشکارساز دارای توزیع دم سنگین باشند، برآوردگر سبر (۲۰۰۲)، دارای کم‌ترین میانگین توان دوم خطا است. در انتها بحث و

^۲Kernel method

^۳Local polynomial smoothing technique

^۴Local likelihood density estimation approach

^۵Semi parametric estimator

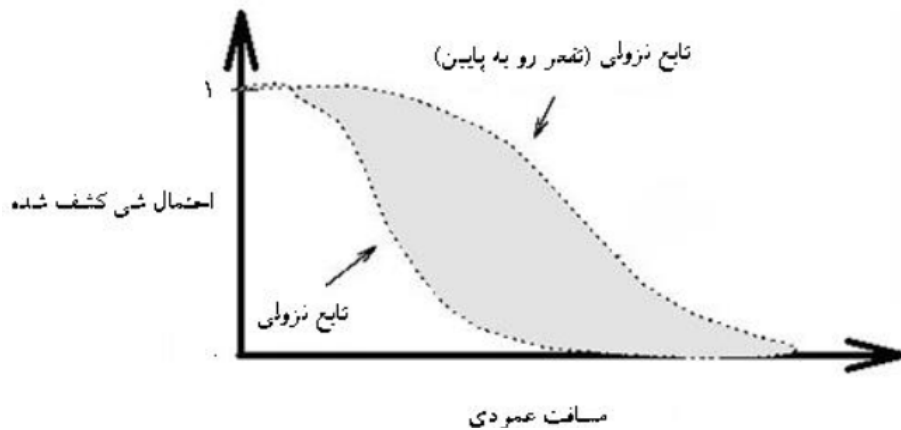
^۶Spatial models

^۷Detection function

نتیجه‌گیری ارائه شده است. لازم به ذکر است که تمام محاسبات شامل شبیه‌سازی، تعیین مقدار آریبی، واریانس‌ها و میانگین‌های توان دوم خطای برآوردگرها با استفاده از نرم‌افزار SPLUS انجام شده است، که آن‌ها از طریق نویسنده مسئول مقاله قابل دریافت است.

۲ تابع آشکارساز در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی

فرض کنید $g(x)$ ، $0 \leq x \leq w$ ، احتمال دیدن شی باشد که فاصله آن تا نوار X است. تابع $g(x)$ را تابع آشکارساز در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی گویند. (ابرهارت، ۱۹۷۸ و باکلند و همکاران، ۱۹۹۳). از آنجا که شکل تابع تشخیص بستگی به محیطی دارد که اشیاء از آن عبور می‌کنند، نمودار آن دو حالت تابع نزولی دارد که در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: نمودار تابع آشکارساز در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی

بنابراین می‌توان توابع چگالی نیم‌نرمال و چگالی نمایی یک متغیره را به دلیل نزولی بودن آن‌ها به عنوان توابع آشکارساز در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی استفاده کرد. بورنهام و آندرسون (۱۹۷۶) نشان دادند رابطه

$$f(x) = \frac{g(x)}{\int_0^w g(t) dt}, \quad 0 \leq x \leq w$$

بین تابع آشکارساز و تابع چگالی متغیره‌های X_1, \dots, X_n وجود دارد. کوانگ و لانکتات (۱۹۹۱)، در

۳۷۰ برآورد تابع چگالی جمعیت در روش نمونه‌گیری تراپرشلی خطی با توابع آشکارساز

یک بررسی هوایی با روش نمونه‌گیری تراپرشلی خطی از تابع آشکارساز نمایی یک متغیره برای برآورد تابع چگالی جمعیت استفاده کردند. چن (۱۹۹۶)، از این ایده که برآورد تابع آشکارساز هم به فواصل متغیرهای تصادفی تا خط تراپرشلی و هم به اندازه آن‌ها در عمل وابسته است، از روش هسته‌ای برای برازش داده‌های دو بعدی استفاده کرد. ملویل و ولش (۲۰۰۱)، از روش‌های عددی همراه با داده‌های واقعی برای برآورد تابع آشکارساز در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی استفاده کردند. فستر و همکاران (۲۰۰۵)، برآورد تابع آشکارساز را با وجود داده‌های بریده شده^۸ محاسبه و اریبی برآوردگرها مورد بررسی قرار گرفت. باکلند و همکاران (۲۰۰۷)، انحراف از برخی مفروضات در نمونه‌گیری تراپرشلی خطی را در نظر گرفتند و روش جدیدی را برای برآورد تابع چگالی جمعیت ارایه و برای برآورد تابع چگالی جمعیت گیاهان مورد بررسی قرار دادند. فرض کنید تابع آشکارساز به صورت

$$g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 \leq x < w$$

باشد، که این تابع آشکارساز نیم‌نرمال نامیده می‌شود و در این مقاله فرض می‌شود $w = \infty$ است. در این صورت متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n دارای تابع چگالی به صورت

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 \leq x < \infty \quad (2)$$

خواهند بود. به دلیل اینکه $f(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^{-1}$ ، در این صورت برآورد تابع چگالی جمعیت عبارت است از:

$$\hat{D} = \frac{n\hat{\sigma}^{-1}}{\sqrt{2\pi}tl}, \quad (3)$$

برای برآورد تابع چگالی جمعیت با روش نمونه‌گیری تراپرشلی خطی، کافی است پارامتر σ^{-1} برآورد شود. به راحتی می‌توان نشان داد که چگالی (۲) دارای توزیع دم سبک است و تابع مولد گشتاور آن عبارتست از

$$M_X(t) = 2 \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^{-1} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

⁸Truncated datd

با توجه به اینکه مقدار واریانس متناهی است، حداقل یک مقدار t ، $t > 0$ ، وجود دارد که تابع مولد گشتاور متناهی شود. ایدوس (۲۰۰۶ و ۲۰۰۹) مدل‌های مختلفی را برای تابع آشکارساز در نمونه‌گیری ترابرشی خطی به کار برد. روش هسته‌ای را به کارگیری تابع تشخیصی نیم‌نرمال برای برآورد تابع چگالی جمعیت مورد استفاده قرار داد. ایدوس و آلساختره (۲۰۱۱)، یک برآوردگر سازگار را برای تابع چگالی در نمونه‌گیری ترابرشی خطی محاسبه و رفتار مجانبی برآوردگر را بررسی کردند. آبابنه و ایدوس (۲۰۱۲)، یک مدل پارامتری را که شامل مدل نمایی آمیخته از دو مدل نمایی است برای تابع چگالی جمعیت در نمونه‌گیری ترابرشی خطی پیشنهاد دادند. مدل پیشنهادی یک مدل کاهشی یکنوا در مسیر خط ترابرشی است. نتایج را با روش شبیه‌سازی مورد مطالعه قرار دادند. ایدوس و ایبود (۲۰۱۵) با استفاده از یک تابع آشکارساز پارامتری برآورد تابع چگالی جمعیت را محاسبه و برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و گشتاوری جمعیت را تحت مدل در نظر گرفته شده به دست آوردند. آبابنه و ایدوس (۲۰۱۷)، مدل نمایی وزنی را برای داده‌های گروه‌بندی در نمونه‌گیری ترابرشی خطی در نظر گرفتند. با روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای مدل را برآورد کردند. در تمام مقالات ذکر شده در مورد روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی، توجهی به کارایی آشکارساز با توزیع‌های دم سبک و سنگین در مدل و تاثیر آن‌ها در انتخاب برآوردگرها نشده است. در مقاله حاضر، با توجه به نوع تابع آشکارساز استفاده شده در مدل به دنبال آن برآوردگری هستیم که ناریب بوده و تا حد امکان دارای کمترین واریانس باشد.

- در روش نمونه‌گیری ترابرشی خطی شرایطی حاکم است که در اینجا به آن‌ها اشاره می‌شود.
- ۱- اشیایی که روی خط ترابرشی حرکت می‌کنند هرگز گم نمی‌شوند، یعنی $1 = P(x=0 | \text{دیدن یک شی})$.
 - ۲- اشیا بیش از یک بار شمرده نمی‌شوند، به عبارت دیگر نمونه‌ها بدون جایگذاری انتخاب می‌شوند.
 - ۳- مسافت‌ها و اشیا به طور دقیق اندازه‌گیری می‌شوند.
 - ۴- دیدن اشیای روی نوار ترابرشی، پیشامدهای مستقل از هم هستند.
 - ۵- هر چه فاصله شی از نوار زیادتر شود، احتمال دیدن آن شی کم‌تر می‌شود.
- اگر برای هر متغیر تصادفی $X \in R$ با تابع چگالی $f(x)$ ، حداقل یک مقدار t ، $t > 0$ ، وجود داشته باشد که دارای تابع مولد گشتاور متناهی باشد، چنین توزیعی را توزیع با دم سبک گویند. همچنین توزیع‌هایی هستند که برای هر $t > 0$ تابع مولد گشتاور متناهی ندارند، این توزیع‌ها را توزیع‌های با دم سنگین می‌گویند. توزیع نمایی مثالی از توزیع‌های دم سبک و توزیع پارتو مثالی از توزیع‌های دم سنگین است (رلسکی (۲۰۰۰).

۳ برآورد تابع چگالی جمعیت

فرض کنید X_1, \dots, X_n متغیرهای تصادفی دارای تابع چگالی (۲) باشند، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامتر σ عبارت است از:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}. \quad (۴)$$

بنابراین برآورد ماکسیمم درست‌نمایی تابع $f_{ML}(\circ)$ عبارت است از:

$$\hat{f}_{ML}(\circ) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{\sigma}^{-1}. \quad (۵)$$

با قرار دادن $\hat{f}_{ML}(\circ)$ در رابطه (۱)، خواهیم داشت:

$$\hat{D}_{ML} = \frac{n}{\sqrt{2\pi t \ell}} \hat{\sigma}^{-1}. \quad (۶)$$

از طرفی در مدل نیم نرمال، برآوردگر $\hat{\sigma}^2$ برآوردگری نارایب برای پارامتر σ^2 است، اما $\hat{\sigma}^{-1}$ برای σ^{-1} نارایب نیست. بنا به نامساوی جنس، همواره $E(\hat{\sigma}^{-1}) \geq \sigma^{-1}$ یعنی انتظار این است که مقدار $\hat{\sigma}^{-1}$ از مقدار واقعی پارامتر σ^{-1} بیشتر باشد. بنابراین برای اندازه نمونه متناهی مقدار \hat{D}_{ML} همواره از مقدار واقعی فراوانی جمعیت بیشتر خواهد بود و این وضعیت برای اندازه نمونه کوچک بدتر خواهد شد.

قضیه ۱: برای مقدار ثابت اندازه نمونه n ، امید ریاضی و واریانس σ^{-1} عبارتند از:

$$E(\hat{\sigma}^{-1}) = H(n)\sigma^{-1}, \quad \text{Var}(\hat{\sigma}^{-1}) = \left[\frac{n}{n-2} - H^2(n) \right] \sigma^{-2}, \quad (۷)$$

$$H(n) = \frac{\sqrt{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \text{ که در آن}$$

برهان: با توجه به اینکه برای متغیر تصادفی $\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}$ تحت مدل نیم‌نرمال دارای توزیع کای اسکور با

n درجه آزادی است، بنابراین

$$E(\hat{\sigma}^{-1}) = E\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{n}}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} E\left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}}}\right),$$

با قرار دادن $Y = \sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}$ خواهیم داشت:

$$E(\hat{\sigma}^{-1}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} E\left(\frac{1}{\sqrt{Y}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{\frac{n}{2}-1} (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} dy = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sigma^{-1}$$

برای اثبات واریانس از رابطه $\text{Var}(\hat{\sigma}^{-1}) = E(\hat{\sigma}^{-2}) - E^2(\hat{\sigma}^{-1})$ استفاده می‌شود. با توجه به این که

$$E(\hat{\sigma}^{-2}) = \frac{n}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{\sigma^2}}\right) = \frac{n}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{Y}\right),$$

می‌دانیم که $Y \sim \Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ در نتیجه

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1) 2^{-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - 1)}{2(\frac{n}{2} - 1)\Gamma(\frac{n}{2} - 1)} = \frac{1}{n - 2},$$

و خواهیم داشت:

$$E(\hat{\sigma}^{-2}) = \frac{n}{\sigma^2} E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{n}{(n - 2)\sigma^2}, \quad (8)$$

بنابراین

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^{-1}) = \left[\frac{n}{n - 2} - H^2(n)\right] \sigma^{-2}. \quad (9)$$

لازم به ذکر است که مقدار $H(n)$ بزرگتر از یک است و اگر $n \rightarrow \infty$ ، آنگاه $H(n) \rightarrow 1$. همچنین

۳۷۴ برآورد تابع چگالی جمعیت در روش نمونه‌گیری تراپرسی خطی با توابع آشکارساز

امید ریاضی برآوردگر \hat{D}_{ML} عبارت است از:

$$E(\hat{D}_{ML}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}} E(\hat{\sigma}^{-1}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}} H(n)\sigma^{-1} = \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}} \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sigma^{-1} \neq D,$$

بنابراین برآوردگر سبر (۲۰۰۲) برای D ناریب نخواهد بود. البته با روش شبیه سازی نشان داده خواهد شد که برآوردگر (۶) برای توابع آشکارساز با توزیع دم سنگین، دارای میانگین توان دوم خطای کمتری است.

۴ برآوردگری ناریب با کمترین میانگین توان دوم خطا

برای تابع چگالی جمعیت برآوردگر

$$\hat{D}_A = \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}} \frac{\hat{\sigma}^{-1}}{H(n)} = \frac{\hat{D}_{ML}}{H(n)},$$

پیشنهاد می شود. امید ریاضی این برآوردگر عبارت است از:

$$E(\hat{D}_A) = \frac{1}{H(n)} E(\hat{D}_{ML}) = \frac{1}{H(n)} \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}} H(n)\sigma^{-1} = D,$$

بنابراین برآوردگر \hat{D}_A ناریب برای D است. همچنین

$$\text{Var}(\hat{D}_{ML}) = \left(\frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}}\right)^2 \text{Var}(\sigma^{-1}) = \left(\frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}}\right)^2 \left[\frac{n}{n-2} - H^2(n)\right] \sigma^{-2},$$

و

$$\text{Var}(\hat{D}_A) = \frac{1}{H^2(n)} \text{Var}(\hat{D}_{ML}).$$

چون مقدار $H(n)$ بزرگتر از یک است، پس \hat{D}_A واریانس کمتری نسبت به برآوردگر سبر (۲۰۰۲) دارد. بنابراین انتظار داریم که برآوردگر \hat{D}_A دارای میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به \hat{D}_{ML} باشد. بدلیل اینکه \hat{D}_A از تقسیم \hat{D}_{ML} به یک مقدار بزرگتر به دست آمده است، پس مقدار \hat{D}_A کوچکتر از مقدار برآوردگر \hat{D}_{ML} است. در نتیجه برآوردگر \hat{D}_A بهتر از \hat{D}_{ML} است.

قضیه ۲: در بین کلاس برآوردگرهای D ، به فرم $\hat{D} = c\hat{D}_{ML}$ ، بهترین مقدار c برابر $c^* = \frac{(n-2)H(n)}{n}$ است.

برهان: با توجه به اینکه $\hat{D} = \frac{cn}{\sqrt{2\pi t\ell}}\hat{\sigma}^{-1}$ ، با استفاده از رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\text{Bias}(\hat{D}) = E(\hat{D}) - D = \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}}(cH(n) - 1)\sigma^{-1}, \quad (10)$$

همچنین واریانس \hat{D} عبارت است از:

$$\text{Var}(\hat{D}) = \left(\frac{cn}{\sqrt{2\pi t\ell}}\right)^2 \left(\frac{n}{n-2} - H^2(n)\right)\sigma^{-2}, \quad (11)$$

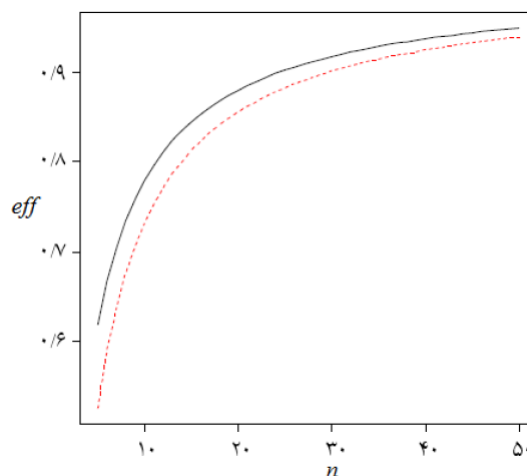
که در آن $H(n) = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) خواهیم داشت:

$$\text{MSE}(\hat{D}) = \text{Bias}^2(\hat{D}) + \text{Var}(\hat{D}) = \left(\frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}}\sigma\right)^2 \left(1 - 2cH(n) + \frac{c^2 n}{(n-2)}\right).$$

بدیهی است که مینیم کردن مقدار $\text{MSE}(\hat{D})$ معادل با مینیم کردن عبارت $1 - 2cH(n) + \frac{c^2 n}{(n-2)}$ است. با مشتق‌گیری از این عبارت نسبت به c و مساوی صفر قرار دادن آن، جواب $c^* = \frac{(n-2)H(n)}{n}$ به دست می‌آید. حال بهترین برآوردگر برای برآورد تابع چگالی جمعیت به صورت

$$\hat{D}_{Best} = \frac{(n-2)H(n)}{n} - \frac{n}{\sqrt{2\pi t\ell}}\hat{\sigma}^{-1} = \frac{(n-2)H(n)\hat{\sigma}^{-1}}{\sqrt{2\pi t\ell}},$$

است، نمودار دو کارایی نسبی $\frac{\text{MSE}(\hat{D}_{Best})}{\text{MSE}(\hat{D}_{ML})}$ و $\frac{\text{MSE}(\hat{D}_A)}{\text{MSE}(\hat{D}_{ML})}$ اندازه‌های مختلف نمونه، در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین میانگین توان دوم خطا مربوط به \hat{D}_{Best} ، سپس \hat{D}_A و در نهایت \hat{D}_{ML} است.



شکل ۴: کارایی نسبی \hat{D}_{ML} به \hat{D}_A (خط ممتد) و \hat{D}_{ML} به \hat{D}_{Best} (خط نقطه چین)

۵ مطالعه شبیه‌سازی

با توجه به اینکه دم سبک یا سنگین بودن ویژگی یک توزیع آماری است، در این بخش با روش شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که توابع آشکارساز با دم‌های سبک و سنگین می‌توانند اثرات متفاوتی در انتخاب بهترین برآوردگر برای تابع چگالی جمعیت داشته باشند. یک نمونه‌گیری با روش ترابری خطی با فرض $\ell = 100$ در نظر گرفته شده است. طبق معمول فرض کنید در این آزمایش n شی مشاهده شده و متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n مسافت‌های عمودی آنها تا خط ترابری باشد. بدون اینکه از کلیت مساله کم شود، فرض می‌شود $t = 1$ باشد. مقادیر متغیرهای تصادفی X_1, \dots, X_n با توجه به تابع چگالی به دست آمده از توابع آشکارساز زیر شبیه‌سازی شده است:

(الف) تابع آشکارساز نیم نرمال

$$g_N = \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right), \quad 0 \leq x < \infty,$$

(ب) تابع آشکارساز نمایی

$$g_E = \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^5\right), \quad 0 \leq x < \infty,$$

(ج) تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته

$$g_G = \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{2}{\tau}}\right), \quad 0 \leq x < \infty,$$

(د) تابع آشکارساز کسری

$$g_R = \left(1 + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\frac{2}{\tau}}\right)^{-2}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

لازم به توضیح است که دو توابع آشکارساز نیم نرمال (الف) و نمایی تعمیم یافته (ب)، دارای دم های سبک و توابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته (ج) و کسری (د) دارای دم های سنگین هستند. فرم برآوردگرهای تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته (ب)، تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته (ج) و تابع آشکارساز کسری (د) محاسبه و در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱: برآوردگرهای توابع آشکارساز نیم نرمال، نمایی، نمایی تعمیم یافته و کسری

\hat{D}_{Best}	\hat{D}_A	\hat{D}_{ML}	تابع آشکارساز
$\frac{(n-\tau)H(n)\hat{\sigma}^{-1}}{\sqrt{\tau\pi t\ell}}$	$\frac{n\hat{\sigma}^{-1}}{\sqrt{\tau\pi t\ell}H(n)}$	$\frac{n}{\sqrt{\tau\pi t\ell}}\hat{\sigma}^{-1}$	نیم نرمال
$\frac{n\sqrt{\frac{n}{\tau}}\Gamma(\frac{n+1}{\tau})\hat{D}_{ML}}{(\tau n-1)\Gamma(n-1)}$	$\frac{\Gamma(n-1)\hat{D}_{ML}}{\sqrt{\frac{n}{\tau}}\Gamma(\frac{n+1}{\tau})}$	$\frac{n}{\sqrt{\tau\pi t\ell}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{2}{\tau}}}$	نمایی تعمیم یافته
$\frac{(n^{\tau}-\tau)\sqrt{\frac{n}{n-1}}\Gamma(\frac{n-1}{\tau})\hat{D}_{ML}}{\tau(n+\tau)\Gamma(\tau n)}$	$\frac{\tau\Gamma(\tau n)\hat{D}_{ML}}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\Gamma(\frac{n-1}{\tau})}$	$\frac{n}{\sqrt{\tau\pi t\ell}}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^{\frac{\tau}{\tau}}}$	نمایی تعمیم یافته
$\frac{(\frac{n^{\tau}}{\tau}-1)\hat{D}_{ML}+\frac{\sqrt{n}}{\tau}-\tau}{n^{\tau}(n-1)}$	$\frac{\sqrt{n}(\hat{D}_{ML}-1)}{n(n+1)(\frac{n^{\tau}}{\tau}-1)}$	$\frac{\tau}{n\sqrt{\tau\pi t\ell}}\sum_{i=1}^n \ln X_i^{\frac{\tau}{\tau}}$	کسری

در هر مرحله از شبیه سازی اندازه نمونه $n = 50, 100, 150, 200$ از چگالی مورد نظر گرفته شده و شبیه سازی به تعداد ۲۰۰۰۰ بار تکرار شده است. در هر بار انجام شبیه سازی از تابع چگالی به دست آمده با توجه به توابع آشکارساز مختلف، برآورد میانگین شامل برآوردگر سبر \hat{D}_{ML} ، 2002 برآوردگر \hat{D}_A و برآوردگر \hat{D}_{Best} ، مقدار اریبی، جذر واریانس و میانگین توان دوم خطا محاسبه شده است. سپس برای هر کمیت میانگین، ۲۰۰۰۰ بار تکرار در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده از این شبیه سازی برای هر تابع آشکارساز به طور جداگانه در جداول ۲ تا ۵ ارائه شده‌اند.

جدول ۲: برآورد جمعیت با وجود تابع آشکارساز نیم‌نرمال در بند (الف)

اندازه نمونه	برآوردگر	برآورد میانگین	اریبی	انحراف استاندارد	میانگین توان دوم خطا
۵۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۳۱۴۸	۰٫۰۰۸۳	۰٫۰۰۵۷	۰٫۰۰۰۶۹
	\hat{D}_A	۰٫۲۹۸۵	-۰٫۰۰۰۴۸	۰٫۰۰۳۸	۰٫۰۰۰۰۳۷
	\hat{D}_{Best}	۰٫۲۷۹۱	-۰٫۰۰۰۸۲	۰٫۰۰۳۲	۰٫۰۰۰۰۳۴
۱۰۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۳۰۷۹	۰٫۰۰۷۱	۰٫۰۰۵۲	۰٫۰۰۰۰۶۴
	\hat{D}_A	۰٫۲۵۰۴	-۰٫۰۰۰۴۶	۰٫۰۰۳۹	۰٫۰۰۰۰۳۶
	\hat{D}_{Best}	۰٫۲۴۴۸	-۰٫۰۰۰۷۷	۰٫۰۰۳۰	۰٫۰۰۰۰۳۱
۱۵۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۴۵۹۰	۰٫۰۰۵۹	۰٫۰۰۶۲	۰٫۰۰۰۰۵۵
	\hat{D}_A	۰٫۳۳۸۲	-۰٫۰۰۰۳۷	۰٫۰۰۴۷	۰٫۰۰۰۰۲۸
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۲۰۵	-۰٫۰۰۰۷۲	۰٫۰۰۳۶	۰٫۰۰۰۰۲۵
۲۰۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۴۱۰۷	۰٫۰۰۵۴	۰٫۰۰۵۳	۰٫۰۰۰۰۵۲
	\hat{D}_A	۰٫۳۶۶۰	-۰٫۰۰۰۰۳	۰٫۰۰۵۳	۰٫۰۰۰۰۲۲
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۴۸۵	-۰٫۰۰۰۶۸	۰٫۰۰۳۳	۰٫۰۰۰۰۲۰

جدول ۳: برآورد جمعیت با وجود تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته در بند (ب)

اندازه نمونه	برآوردگر	برآورد میانگین	اریبی	انحراف استاندارد	میانگین توان دوم خطا
۵۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۴۲۳۶	۰٫۰۶۸۴۳	۰٫۰۰۶۴	۰٫۰۰۷۳۳۵
	\hat{D}_A	۰٫۴۱۳۹	-۰٫۰۶۱۰۹	۰٫۰۰۵۳	۰٫۰۰۶۳۹۲
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۷۸۵	-۰٫۰۵۴۰۲	۰٫۰۰۵۴	۰٫۰۰۴۸۰۴
۱۰۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۳۷۷۳	۰٫۰۵۷۵۰	۰٫۰۰۵۷	۰٫۰۰۷۲۰۴
	\hat{D}_A	۰٫۳۴۰۰	-۰٫۰۵۵۰۶	۰٫۰۰۴۹	۰٫۰۰۵۷۰۸
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۲۷۶	-۰٫۰۴۷۰۱	۰٫۰۰۴۱	۰٫۰۰۴۴۵۳
۱۵۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۴۶۰۳	۰٫۰۵۱۸۹	۰٫۰۰۵۵	۰٫۰۰۶۸۳۳
	\hat{D}_A	۰٫۳۹۸۴	۰٫۰۴۸۳۳	۰٫۰۰۴۸	۰٫۰۰۵۱۱۲
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۵۵۴	۰٫۰۳۲۳۹	۰٫۰۰۴۵	۰٫۰۰۴۳۶۰
۲۰۰	\hat{D}_{ML}	۰٫۴۲۳۸	۰٫۰۴۴۹۵	۰٫۰۰۴۸	۰٫۰۰۵۸۳۲
	\hat{D}_A	۰٫۳۹۰۱	۰٫۰۴۳۴۱	۰٫۰۰۵۵	۰٫۰۰۴۳۴۸
	\hat{D}_{Best}	۰٫۳۶۲۲	۰٫۰۳۱۶۷	۰٫۰۰۳۸	۰٫۰۰۳۹۹۱

همان‌طور که در جدول ۲، ملاحظه می‌شود، به دلیل استفاده از تابع چگالی نیم نرمال به عنوان تابع آشکارساز نیم‌نرمال، برآوردگر \hat{D}_{Best} دارای کمترین میانگین توان دوم خطا می‌اشد. همچنین مقدار آریبی برآوردگر \hat{D}_A در مقایسه با دو برآوردگر دیگر خیلی کمتر است و این نشان دهنده نااریب بودن این برآوردگر است. همچنین نتایج جدول ۳ نشان می‌دهند که بدلیل استفاده از تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته، چون برآوردگر \hat{D}_{Best} دارای کمترین میانگین توان دوم خطا است، انتخاب بهتری نسبت به دو برآوردگر دیگر است.

از جداول ۴ و ۵ استنباط می‌شود که به دلیل استفاده از توابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته در قسمت (ج) و کسری در قسمت (د)، چون برآوردگر سبر (۲۰۰۲)، دارای کمترین میانگین توان دوم خطا است، انتخاب بهتری نسبت به دو برآوردگر دیگر است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به تاثیر توابع آشکارساز مختلف با دم‌های سبک و سنگین در انتخاب برآوردگر با کمترین میانگین توان دوم خطا در روش نمونه‌گیری تراپرش خطی پرداخته شد. با فرض وجود تابع آشکارساز نیم‌نرمال در مدل، ضمن بیان ایراد برآوردگر سبر (۲۰۰۲)، برآوردگری پیشنهاد شد که علاوه بر نااریب دارای واریانس کمتری نسبت به برآوردگر سبر (۲۰۰۲) بود. در بین کلاس تمام برآوردگرهای نااریب برآوردگر با کمترین میانگین توان دوم خطا محاسبه شد. همچنین کارایی نسبی برآوردگر سبر (۲۰۰۲) با برآوردگرهای محاسبه شده در این مقاله برای مقادیر مختلف اندازه نمونه با هم مقایسه شدند. با روش شبیه‌سازی نشان داده شد که اگر توابع آشکارساز دارای توزیع دم سبک باشند، برآوردگر \hat{D}_{Best} دارای کمترین میانگین توان دوم خطا نسبت به دو برآوردگر دیگر است. همچنین نتایج شبیه‌سازی نشان داد که اگر توابع آشکارساز دارای توزیع دم سنگین باشند، برآوردگر سبر (۲۰۰۲) دارای کمترین میانگین توان دوم خطا نسبت به دو برآوردگر دیگر است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری، داوران، اعضای هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله به دلیل پیشنهادات ارزشمندشان نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

جدول ۴: برآورد جمعیت با وجود تابع آشکارساز نمایی تعمیم یافته در بند (ج)

اندازه نمونه	برآوردگر	برآورد میانگین	اریبی	انحراف استاندارد	میانگین توان دوم خطا
۵۰	\hat{D}_{ML}	۰,۳۴۸۰	-۰,۰۴۸۲۲	۰,۰۰۳۴	۰,۰۰۰۷۴۵۵
	\hat{D}_A	۰,۲۵۳۹	-۰,۰۵۳۰۱	۰,۰۰۳۲	۰,۰۰۰۸۸۳۱
	\hat{D}_{Best}	۰,۲۴۲۱	-۰,۰۵۷۲۵	۰,۰۰۲۷	۰,۰۰۳۰۶۵
۱۰۰	\hat{D}_{ML}	۰,۴۱۶۳	-۰,۰۴۳۳۵	۰,۰۰۲۹	۰,۰۰۰۷۲۰۳
	\hat{D}_A	۰,۳۸۴۴	-۰,۰۴۷۰۶	۰,۰۰۳۴	۰,۰۰۰۷۴۶۷
	\hat{D}_{Best}	۰,۳۳۰۷	-۰,۰۴۹۳۰	۰,۰۰۲۷	۰,۰۰۲۸۱۱
۱۵۰	\hat{D}_{ML}	۰,۳۸۶۱	-۰,۰۳۸۱۷	۰,۰۰۳۷	۰,۰۰۰۶۳۲۵
	\hat{D}_A	۰,۳۳۵۴	-۰,۰۴۱۱۰	۰,۰۰۴۱	۰,۰۰۰۶۷۰۸
	\hat{D}_{Best}	۰,۳۲۲۳	-۰,۰۴۲۹۸	۰,۰۰۲۷	۰,۰۰۲۵۷۰
۲۰۰	\hat{D}_{ML}	۰,۴۳۶۸	-۰,۰۳۱۲۳	۰,۰۰۳۰	۰,۰۰۰۵۴۱۳
	\hat{D}_A	۰,۴۰۱۳	-۰,۰۳۴۵۲	۰,۰۰۳۶	۰,۰۰۰۶۰۷۱
	\hat{D}_{Best}	۰,۳۸۴۱	-۰,۰۳۸۱۰	۰,۰۰۳۲	۰,۰۰۱۹۸۵

جدول ۵: برآورد جمعیت با وجود تابع آشکارساز کسری در بند (د)

اندازه نمونه	برآوردگر	برآورد میانگین	اریبی	انحراف استاندارد	میانگین توان دوم خطا
۵۰	\hat{D}_{ML}	-۰,۰۵۴۷۱	۰,۰۰۸۳	۰,۰۰۴۲	۰,۰۰۴۸۸۳
	\hat{D}_A	۰,۳۷۱۲	-۰,۰۵۹۲۳	۰,۰۰۴۴	۰,۰۰۵۳۷۵
	\hat{D}_{Best}	-۰,۳۴۴۶	۰,۰۴۷۹۴	۰,۰۰۳۸	۰,۰۰۵۸۰۴
۱۰۰	\hat{D}_{ML}	۰,۳۸۹۰	-۰,۰۴۸۸۲	۰,۰۰۵۱	۰,۰۰۴۲۳۰
	\hat{D}_A	۰,۴۰۱۳	-۰,۰۵۲۲۰	۰,۰۰۴۷	۰,۰۰۵۰۳۴
	\hat{D}_{Best}	۰,۳۳۶۲	-۰,۰۴۲۷۴	۰,۰۰۴۳	۰,۰۰۵۵۰۲
۱۵۰	\hat{D}_{ML}	۰,۴۸۸۳	-۰,۰۴۱۱۸	۰,۰۰۴۶	۰,۰۰۳۷۴۱
	\hat{D}_A	۰,۵۳۷۵	-۰,۰۴۶۰۰	۰,۰۰۴۶	۰,۰۰۴۷۶۶
	\hat{D}_{Best}	۰,۵۸۰۱	-۰,۰۴۱۱۲	۰,۰۰۳۹	۰,۰۰۴۹۴۲
۲۰۰	\hat{D}_{ML}	۰,۴۱۱۹	-۰,۰۳۶۸۱	۰,۰۰۳۴	۰,۰۰۳۳۵۰
	\hat{D}_A	۰,۴۲۲۵	-۰,۰۳۹۷۵	۰,۰۰۴۱	۰,۰۰۴۱۲۳
	\hat{D}_{Best}	۰,۳۷۹۷	-۰,۰۳۶۵۵	۰,۰۰۴۰	۰,۰۰۴۷۷۸

مراجع

- Ababneh, F. and Eidous, O. (2012), A Weighted Exponential Detection Function Model for Line Transect Data, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **11**, 144-151.
- Ababneh, F. and Eidous, O. (2017), A Weighted Exponential Model for Grouped Line Transect Data, *Mathematics and Statistics*, **5**, 1-4.
- Barabesi, L. (2000), Local Likelihood Density Estimation in Line Transect Sampling, *Environmetrics*, **11**, 413-422.
- Borgoni, R., Cameletti, M. and Quatto, P. (2005), Comparing Estimators of Animal Abundance: a Simulation Study. In: *Atti Del Convegno Della Società Italiana di Statistica "Statistica e Ambiente. Università degli Studi di Messina, Messina*, 181-184.
- Buckland, S. T. (1982), A Note on the Fourier Series Model for Analysing Line Transect Data, *Biometrics*, **38**, 469-477.
- Buckland, S. T. (1985), Perpendicular Distance Models for Line Transect Sampling, *Biometrics*, **41**, 177-195.
- Buckland, S. T., Anderson, D. R., Burnham, K. P. and Laake, J. L. (1993), *Distance Sampling*, London: Chapman and Hall.
- Buckland, S. T., Borchers, D. L., Johnston, A., Henrys, P. A., and Marques, T. A. (2007), Line transect methods for plant surveys, *Biometrics*, **63**, 989-998.
- Buckland, S. T., Anderson, D. R., Burnham, K. P., Laake, J. L., Borchers, D. L. and Thomas, L. (2001), *Introduction to Distance Sampling*, Oxford University Press, Oxford.
- Buckland, S. T., Anderson, D. R., Burnham, K. P., Laake, J. L., Borchers, D. L. and Thomas, L. (2004), *Advanced Distance Sampling*, Oxford University Press, Oxford.
- Burnham, K. P. and Anderson, D. R. (1976), Mathematical Models for Non-parametric Inferences from Line Transect Data, *Biometrics*, **32**, 325-336.
- Burnham, K. P., Anderson, D. R., and Laake, J. L. (1980), Estimation of Density from Line Transect Sampling of Biological Populations, *Wildlife Monograph 72, Supplement to Journal of Wildlife Management*, 44.
- Chen, S. X. (1996), Studying School Size Effects in Line Transect Sampling Using the Kernel Method, *Biometrics*, **52**, 69-84.

- Crain, B. R., Burnham, K. P, Anderson, D. R. and Laake, J. L. (1979), Non-parametric Estimation of Population Density for Line Transect Sampling Using Fourier Series, *Biometrical Journal*, **21**, 731-748.
- Eberhardt, L. L. (1978), A Preliminary Appraisal of Line Transects, *Journal of Wildlife Management*, **32**, 82-88.
- Eidous, O. M. (2005), On Improving Kernel Estimators Using Line Transect Sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 931-941.
- Eidous, O. M. (2006), A Semi-Parametric Model for Line Transect Sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**, 1211-1222.
- Eidous, O. M. (2009), Kernel Method Starting with Half-Normal Detection Function for Line Transect Density Estimation, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **38**, 2366-2378.
- Eidous, O. M. and Alshakhatreh, M. (2011), Asymptotic UnBiased Kernel Estimator for Line Transect Sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **40**, 4353-4363.
- Eidous, O. M. (2015), Nonparametric Estimation of $f(0)$ Applying Line Transect Data with and Without the Shoulder Condition, *Journal of Information and Optimization Sciences*, **36**, 301-315.
- Fan, J. (1992), Design-Adaptive Nonparametric Regression, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 998-1004.
- Fewster, R. M., Laake, J. L. and Buckland, S. T. (2005), Line Transect Sampling in Small and Large Regions, *Biometrics*, **61**, 856-861.
- Gates, C. E., Marshall, W. H. and Olson, D. P. (1968), Line Transect Method of Estimating Grouse Population Densities, *Biometrics*, **24**, 135-145.
- Hedley, S. L. and Buckland, S. T. (2004), Spatial Models for Line Transect Sampling, *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics*, **9**, 181-199.
- Karunamuni, R. J. and Quinn, T. J. (1995), Bayesian Estimation of Animal Abundance for Line Transect Sampling, *Biometrics*, **51**, 1325-1337.
- Mack, Y. P. and Quang, P. X. (1998), Kernel Methods in Line and Point Transect Samplings, *Biometrics*, **50**, 606-619..
- Melville, G. J., and Welsh, A. H. (2001), Line Transect Sampling in Small Regions, *Biometrics*, **57**, 1130-1137.
- Quang, P. X. (1993), Nonparametric Estimators for Variable Circular Plot Surveys, *Biometrics*, **49**, 837-852.

- Quang, P. X. and Lanctot, R. B. (1991), A Line Transect Model for Aerial Surveys, *Biometrics*, **47**, 1089-1102
- Rolski, T. (2000), Some Problems in the Theory of Risk, Tokyo Institute of Technology and University of Wroclaw.
- Seber, G. A. F. (1992), A Review of Estimating Animal Abundance II, *International Statistical Review*, **60**, 129-166.
- Seber, G. A. F. (2002), *The Estimation of Animal Abundance and Related Parameters*, 2nd edition, Blackburn Press, Caldwell, New Jersey.
- Zhang, S. and Karunamuni, R. J. (1998), On Kernel Density Estimation Near Endpoints, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **70**, 301-316.