برآورد آنتروپی با روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف و کاربرد آن در آزمون نرمال بودن

عاطفه پورکاظمی، هادی علیزاده نوقابی، سارا جمهوری

دانشگاه بیرجند، گروه آمار

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی دو روش بوت‌استرپ و جک‌نایف پرداخته و آنتروپی به کمک این روش‌ها برآورد شده‌اند. سپس برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف به کمک شبیه‌سازی از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی در سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف با برآوردگرهای معروف دیگر به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه شده‌اند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگرهای جک‌نایف و بوت‌استرپ عملکرد نسبتا خوبی نسبت به سایر برآوردگرهای آنتروپی دارند. سپس تعدادی آزمون نرمال بودن براساس برآوردگرهای پیشنهادی معرفی و توان آن‌ها با توان سایر آزمون‌ها مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی، بوت‌استرپ، جک‌نایف، آزمون نرمال بودن، توان آزمون.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هادی علیزاده نوقابی، alizadehhadi@birjand.ac.ir

°کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): $۶۲G۰۵, ۶۲B۱۰$.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x)$ با تابع چگالی مطلقا پیوسته $f(x)$ باشد. شانون (۱۹۴۸) آنتروپی این متغیر تصادفی را به صورت

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log(f(x))dx, \tag{۱}$$

تعریف کرد. با توجه به کاربردهای فراوان مفهوم آنتروپی در مباحث آماری، مساله برآورد آنتروپی بر مبنای نمونه تصادفی $X_۱, \dots, X_n$ توسط محققین زیادی از جمله واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردگرها، برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) به واسطه سادگی در محاسبات بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید $X_{(۱)}, \dots, X_{(n)}$ آماره های مرتب نظیر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از توزیع F باشند، در این صورت برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) به صورت

$$HV_{mn} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log(\frac{n}{۲m}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})), \tag{۲}$$

است، که در آن m یک عدد کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{۲}$ است. ضمنا، به ازای $i < ۱$، $X_{(i)} = X_{(۱)}$ و به ازای $i > n$، $X_{(i)} = X_{(n)}$. ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) برآوردگر

$$HVE_{mn} = \frac{۱}{n-m}\sum_{i=۱}^{n-m}(\log(X_{(i+m)} - X_{(i)})) + \sum_{k=m}^{n}\frac{۱}{k} \tag{۳}$$

را برای آنتروپی معرفی نمود. وی نشان داد برآوردگر (۳) سازگار است و تحت برخی شرایط

$$n^{۱/۲}(HVE_{mn} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\log(f(x))dx) \xrightarrow{D} N(\circ, \mathrm{var}(\log(f(X_۱)))). \tag{۴}$$

ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برآوردگر خود را بر مبنای اصلاح ضرایب برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) در نقاط انتهایی (c_i-ها وقتی که $i \le m$ و $i \ge n-m+۱$)، به صورت

$$HE_{mn} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log(\frac{n}{c_i}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})) \tag{۵}$$

معرفی کردند، که در آن

$$c_i = \begin{cases} m+i-1 & 1 \le i \le m \\ 2m & m+1 \le i \le n-m \\ m+n-1 & n-m+1 \le i \le n \end{cases} \quad (6)$$

و برای $i < 1$، $X_{(i)} = X_{(1)}$ و به ازای $i > n$، $X_{(i)} = X_{(n)}$. مطالعات شبیه‌سازی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) نشان می‌دهد که برآوردگر پیشنهادی آن‌ها اریبی و توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. کوریا (۱۹۹۵) برآوردگر دیگری برای آنتروپی پیشنهاد داد که میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. این برآوردگر به صورت

$$HC_{mn} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(b_i) \quad (7)$$

است، که در آن $b_i = \frac{\sum\limits_{j=i-m}^{i+m}(X_{(j)}-\bar{X}_{(i)})(\frac{j-i}{n})}{\sum\limits_{j=i-m}^{i+m}(X_{(j)}-\bar{X}_{(i)})^2}$ و $\bar{X}_{(i)} = \sum\limits_{j=i-m}^{i+m}\frac{X_{(j)}}{2m+1}$. ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برآوردگر آنتروپی

$$HW_{mn} = HV_{mn} - \log(n) + \log(2m) + c, \quad (8)$$

را پیشنهاد کرددند، که در آن

$$c = -(1-\frac{2m}{n})\Psi(2m) + \Psi(n+1) - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{m}\Psi(i+m-1), \quad (9)$$

و $\Psi(x)$ تابع دی گاما است که به صورت $\Psi(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$ تعریف و در حالت کلی به صورت $\Psi(k) = \sum_{i=1}^{k-1}(\frac{1}{i}) - \gamma$ محاسبه می‌شود که در آن $\gamma = 0/5772156649 0\ldots$. نویسندگان قبلی بعد از معرفی برآوردگرشان آن را با برخی از برآوردگرها مقایسه و عملکرد برآوردگر پیشنهادی‌شان را بررسی کردند. در این مقاله برآوردگرهایی به کمک روش‌های بازنمونه‌گیری معرفی و سپس به مقایسه آن‌ها پرداخته می‌شود. یک مطالعه کلی بین برآوردگرها و مقایسه‌ای جامع از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برای حجم نمونه‌های مختلف انجام و همچنین رفتار و عملکرد تمامی برآوردگرها برای داده‌های واقعی بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی در مسائل آماری کاربرد فراوان دارند. برای مثال در مبحث آزمون‌های نیکویی برازش از برآوردگرهای آنتروپی استفاده می‌کنند و آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی می‌سازند. حبیبی‌راد و ارقامی (۱۳۸۶)

براساس برآوردگر آنتروپی واسیچک آزمونی برای تقارن یک توزیع معرفی و سپس توان آزمون خود را با سایر آزمون‌های تقارن مقایسه و نتیجه گرفتند که آزمون براساس آنتروپی از توان خوبی نسبت به سایر آزمون‌های موجود برخوردار است. علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷) آزمون‌های نرمال بودن و نمایی بودن براساس آنتروپی را در نظر گرفتند، و به کمک شبیه‌سازی نشان دادند که برای برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان خوبی برخوردارند. علیزاده و همکاران (۱۳۸۷) به بررسی برآوردگرهای مختلف آنتروپی پرداختند و سپس این برآوردگرها را برای آزمون نمایی بودن بکار بردند. آن‌ها از مقایسه توان این آزمون‌ها با توان سایر آزمون‌ها نتیجه گرفتند که آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان بالایی برخوردارند. زمان‌زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و زمان‌زاده (۱۳۹۲) ابتدا برآوردگرهای اصلاح شده‌ای برای آنتروپی معرفی کردند و سپس براساس این برآوردگرها آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال و نمایی ساختند و نتیجه گرفتند که آزمون‌های جدید در مقابل برخی فرضیه‌های جانشین، از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های قبلی برخوردار هستند. عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) و عباس‌نژاد و محمدی (۱۳۸۹) براساس برآوردی از اطلاع رنی به ترتیب آزمون‌هایی برای توزیع نمایی و تقارن یک توزیع ساختند و سپس به مقایسه توان آزمون‌های ساخته شده با سایر آزمون‌های قبلی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که آزمون‌های مبتنی بر اطلاع رنی از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی برخوردار هستند. بعلاوه محققانی همچون یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸)، علیزاده و ارقامی (۲۰۱۱)، حبیبی‌راد و همکاران (۲۰۱۱)، زمان‌زاده و ارقامی (۲۰۱۱)، بالاکریشنان و حبیبی‌راد (۲۰۰۷)، چو و کیم (۲۰۰۶)، استبان و همکاران (۲۰۰۱)، لیم و پارک (۲۰۰۷)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲)، پارک (۲۰۰۵)، ردرایگز (۲۰۰۹)، برات‌پور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲) آزمون‌هایی بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معرفی کردند. لذا برآوردگرهای آنتروپی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند که در اینجا به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

۲ روش‌های بازنمونه‌گیری

بوت‌استرپ و جک‌نایف دو روش بازنمونه‌گیری هستند که به طور مختصر به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود. تکنیک‌های به کار گرفته شده در این تعاریف به تحقیقات بردلی و گیل (۱۹۸۳) برمی‌گردد. بوت‌استرپ به روش‌های مونت‌کارلو اطلاق می‌شود که نمونه تصادفی اولیه را به عنوان چارچوب جامعه در نظر می‌گیرد و سپس نمونه‌های مونت کارلو را از خود نمونه اولیه با جایگذاری انتخاب می‌کند. در این روش هیچ فرض پارامتری در مورد جامعه‌ای که نمونه مورد نظر از آن تولید شده وجود ندارد. برای این‌کار یک توزیع یکنواخت

گسسته روی نمونه تصادفی در دسترس در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به هر واحد در نمونه تصادفی، احتمال $1/n$ تخصیص داده می‌شود. حال از نمونه اولیه $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ یک نمونه تصادفی با جایگذاری $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ انتخاب می‌شود. در نمونه با جایگذاری انتخاب شده، ممکن است بعضی از x_iها بیش از یک بار مشاهده شوند و بعضی نیز اصلا مشاهده نشوند. حال فرض کنید B بار این کار تکرار شود و نمونه‌های $x^{*1}, x^{*2}, \cdots, x^{*n}$ ساخته شوند. نمونه x^{*i} را یک نمونه بوت‌استرپ از x نامند. در بسیاری از مسائل آماری هدف یافتن برآوردی از پارامتر مجهول θ با استفاده از یک آماره و نمونه تصادفی x به صورت $\hat{\theta} = T(x)$ است. در مواردی که برآورد پیچیده و مشکل است، روش بوت‌استرپ می‌تواند برای برآورد پارامتر θ و حتی برآورد انحراف استاندارد و اریبی برآوردگر به کار گرفته شود. فرض کنید

$$\hat{\theta}^{*i} = T(x^{*i}), \qquad i = 1, ..., B.$$

در این صورت، $\hat{\theta}^{*i}$ها را تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ می‌نامند. با استفاده از این تکرارهای بوت‌استرپ می‌توان یک توزیع تجربی از آماره $\hat{\theta} = T$ را بدست آورد. برای برآورد خطای استاندارد در روش بوت‌استرپ ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندرد $\hat{\theta}$، با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}(\hat{\theta}^{*i} - \bar{\hat{\theta}}^{*})^2},$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\bar{\hat{\theta}}^{*} = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\theta}^{*i}.$$

بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که در برآورد خطای استاندارد مقادیر B بهتر است بین ۵۰ تا ۲۰۰ باشد. برای محاسبه میزان اریبی یک برآوردگر، بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ برآورد میزان اریبی را می توان به صورت

$$\widehat{bias}(\theta) = \bar{\hat{\theta}}^{*} - \hat{\theta} \qquad (10)$$

محاسبه نمود، که در آن $\bar{\hat{\theta}}^{*}$ متوسط تکرارهای بوت‌استرپ و $\hat{\theta}$ مقدار بدست آمده برآوردگر از روی نمونه تصادفی اولیه است. بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ در برآورد میزان اریبی

می‌بایست بیشتر از تعداد نمونه‌ها در برآورد خطای استاندارد باشد. همچنین می‌توان میزان اریبی بدست آمده را از مقدار برآوردگر کم کرد (اریبی را تصحیح کرد) و به برآوردگر جدیدی با اریبی کمتر به شکل

$$\hat{\theta}_{boot} = \hat{\theta} - \widehat{bias}(\theta) = ۲\hat{\theta} - \bar{\hat{\theta}}^{*},$$

رسید. البته ممکن است برآوردگر جدید $\hat{\theta}_{boot}$ نسبت به برآوردگر اولیه $\hat{\theta}$ دارای واریانس بیشتری باشد. لذا پیشنهاد می‌شود که انحراف استاندارد و اریبی هر دو با روش بوت‌استرپ برآورد شوند و اگر مقدار میزان اریبی نسبت به خطای استاندارد زیادتر بود، سپس اقدام به تصحیح اریبی کرد. در بسیاری از زمینه‌های آماری هدف ساختن یک مدل مناسب برای بیان ارتباط بین چند متغیر است. ولی متاسفانه در بسیاری از اوقات محققان بی‌تجربه مدلی بر اساس داده‌های یک مجموعه می‌سازند و مجددا از داده‌های همان مجموعه استفاده می‌کنند تا اعتبار مدلشان را برآورد کنند. مشکل این کار این است که مدلی که بر پایه یک مجموعه از داده‌ها ساخته می‌شود معمولا نسبت به آن مجموعه کمترین خطای ممکن را دارد.

هدف روش جک‌نایف همانند روش بوت استرپ، برآورد میزان اریبی و خطای استاندارد یک برآوردگر است. در این روش نیز هیچ فرض پارامتری در مورد توزیع جامعه وجود ندارد. فرض کنید هدف برآورد پارامتر θ و $\hat{\theta} = T(x_۱, \ldots, x_n)$ برآوردگری برای این پارامتر باشد. در روش جک‌نایف یکی از داده‌های x_i از نمونه اصلی خارج و نمونه جک‌نایف به صورت $x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_{i+۱}, \ldots, x_n$ حاصل می‌شود. مقدار برآوردگر T با استفاده از i–امین نمونه جک‌نایف به صورت $\hat{\theta}_{-i} = T(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_{i+۱}, \cdots, x_n)$ محاسبه و i–امین تکرار جک‌نایف نامیده می‌شود. با تکرار این کار تا اینکه تمامی داده‌های نمونه یکبار از نمونه خارج شوند، دنباله‌ای از n تکرار جک‌نایف بدست خواهد آمد. برآورد اریبی آماره T با روش جک نایف به ضورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = (n - ۱)(\bar{\hat{\theta}}_{\circ} - \hat{\theta}), \qquad (۱۱)$$

محاسبه می‌شود، که در آن

$$\bar{\hat{\theta}}_{\circ} = \tfrac{۱}{n} \sum_{i=\circ}^{n} \hat{\theta}_{-i}.$$

همچنین خطای استاندارد برآورد شده با روش جک‌نایف به صورت

$$\widehat{SE}_{Jack}(\hat{\theta}) = \tfrac{n-۱}{n} \sum_{i=\circ}^{n} (\hat{\theta}_{-i} - \bar{\hat{\theta}}_{\circ})^{۲}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\widehat{SE}_{Jack}(T)$ یک برآوردگر نااریب برای خطای استاندارد آماره T است. برآوردگر تصحیح شده جک‌نایف نیز به صورت

$$\hat{\theta}_{Jack} = \hat{\theta} - \widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-۱)\bar{\hat{\theta}}_{\circ}$$

تعریف می‌شود، که$\hat{\theta}_{Jack}$ اریبی کمتری نسبت به $\hat{\theta}$ دارد. هدف این مقاله به‌کارگیری روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف بر برآوردگرهای آنتروپی و مقایسه‌ای بین برآوردگرهای آنتروپی بدست آمده با استفاده از این روش‌ها از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا است. در بخش ۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف محاسبه شده‌اند. در بخش ۴ برآوردگرهای آنتروپی به کمک شبیه‌سازی از نظر اریبی و جذر میانگین مربعات خطا با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در بخش ۵ از برآوردگرهای پیشنهادی استفاده و آزمون‌هایی برای نرمال بودن توزیع جامعه معرفی شده‌اند. در پایان از کارهای انجام شده نتیجه‌گیری خواهد شد.

۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک بوت‌استرپ و جک‌نایف

با اعمال روش بوت‌استرپ بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{H(f)}_{boot} = \widehat{H(f)} - \widehat{bias}(H(f)) = ۲\widehat{H(f)} - \overline{\widehat{H(f)}}^{*},$$

تعریف می‌شود. برای برآورد خطای استاندارد ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\widehat{H(f)}$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندارد $\widehat{H(f)}$ با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\widehat{H(f)}) = \sqrt{\frac{۱}{B-۱}\sum_{i=۱}^{B}\left(\widehat{H(f)}^{*i} - \overline{\widehat{H(f)}}^{*}\right)^{۲}},$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\overline{\widehat{H(f)}}^{*} = \frac{۱}{B}\sum_{i=۱}^{B}\widehat{H(f)}^{*i}.$$

بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ، برآورد میزان اریبی را می‌توان به صورت

$$\widehat{bias}(H(f)) = \overline{\widehat{H(f)}}^{*} - \widehat{H(f)}. \qquad (۱۲)$$

محاسبه کرد. با اعمال روش جک‌نایف بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش جک‌نایف به صورت

$$\widehat{H(f)}_{Jack} = \widehat{H(f)} - \widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = n\widehat{H(f)} - (n-1)\overline{\widehat{H(f)}}_{\circ}, \qquad (۱۳)$$

تعریف می‌شود. که در آن

$$\overline{\widehat{H(f)}}_{\circ} = \frac{1}{n}\sum_{i=\circ}^{n}\widehat{H(f)}_{-i}.$$

برآورد اریبی و خطای استاندارد این برآوردگر به ترتیب به صورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = (n-1)(\overline{\widehat{H(f)}}_{\circ} - \widehat{H(f)}) \qquad (۱۴)$$

$$\widehat{SE}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = \frac{n-1}{n}\sum_{i=\circ}^{n}(\widehat{H(f)}_{-i} - \overline{\widehat{H(f)}}_{\circ})^{2} \qquad (۱۵)$$

تعریف می‌شود. حال با جایگزین کردن پنج برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) بجای $\widehat{H(f)}$ برآوردگرهای آنتروپی بر حسب بوت‌استرپ و جک‌نایف بدست می‌آیند.

واسیچک (۱۹۷۶)، بر اساس خاصیت ماکسیمم آنتروپی توزیع نرمال، آزمونی را معرفی نمود. سپس آن را با دیگر آزمون‌ها مقایسه و مشاهده کرد که این آزمون برای برخی فرضیه‌های جانشین دارای توان بالاتری نسبت به دیگر آزمون‌ها است. دادویچ و وندرمولن (۱۹۸۱)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲) و چو و کیم (۲۰۰۶) برای برخی توزیع‌ها آزمون‌هایی را بر اساس خاصیت ماکسیمم آنتروپی معرفی نمودند و نشان دادند که آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی دارای توان نسبتا خوبی هستند. یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸) ابتدا یک برآوردگر پیشنهادی برای تابع توزیع پیشنهاد و سپس به کمک آن آزمون‌های نیکویی برازش بر اساس آنتروپی را انجام دادند. علیزاده نوقابی (۲۰۱۰)، بر اساس برآوردگر پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت ساخت. زمان‌زاده و ارقامی (۲۰۱۱) بر اساس برآوردگری پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال و نمایی ساختند. برات‌پور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲)، یک آماره آزمون بر اساس آنتروپی تجمعی ارائه کردند.

۴ مقایسه برآوردگرهای آنتروپی

در این بخش دقت برآوردگرهای آنتروپی معرفی شده برای توزیع‌های پیوسته نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱ ,۰) از لحاظ اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌شود. برای این منظور از این توزیع‌ها نمونه‌ای به حجم n تولید کرده و آنتروپی را با استفاده از برآوردگرهای نام برده در بخش قبل محاسبه و مقادیر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها به صورت

$$Bias(\widehat{H(f)}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\widehat{H(f)_{(i)}} - H(f)$$

$$RMSE(\widehat{H(f)}) = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\widehat{H(f)_{(i)}} - H(f))^{2}}$$

محاسبه می‌شود، که در آن‌ها N تعداد دفعات شبیه‌سازی می‌باشد. $\widehat{H(f)_i}$ مقدار برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) در نمونه شبیه‌سازی شده iام و $H(f)$ مقدار آنتروپی جامعه است. مثلا برای توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱ ,۰) مقدار آنتروپی به ترتیب برابر ۱٫۴۱۹، ۱ و ۰ است.

برای محاسبه برآوردگرهای آنتروپی، ابتدا بایستی مقدار m مشخص شود. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که مقدار بهینه m، که به ازای آن مقدار جذرمیانگین توان دوم خطا (یا اریبی)، می‌نیمم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع واقعی جامعه تحت بررسی وابسته است، و چون در عمل، توزیع جامعه نامعلوم است، لذا نمی‌توان مقدار بهینه‌ای را برای m با فرض معلوم بودن حجم نمونه پیشنهاد داد و هنوز مساله انتخاب بهینه m به عنوان یک مساله باز، باقی‌مانده است. ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) پیشنهاد استفاده از رابطه $m = [\sqrt{n} + ۰٫۵]$ برای انتخاب m هنگامی که n معلوم است، را ارائه کردند، که در آن [.] علامت جزء صحیح است. از مقدار پیشنهادی ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برای مقایسه تمام برآوردگرهای آنتروپی استفاده شده است. لازم به ذکر است که اریبی برآوردگرهای بوت‌استرپ در رابطه (۱۱) و اریبی برآوردگرهای جک‌نایف در رابطه (۱۲) به طور کامل شرح داده شده است. در بخش بعد مقادیر بدست آمده در جدول‌های مربوطه آورده و همچنین نمودارهای مربوط به طور کامل رسم شده است. تعداد دفعات شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ بار و تعداد تکرارهای بوت‌استرپ ۱۰۰ بار است. نتایج در جدول‌های ۱ تا ۳ آورده شده است.

با توجه به جدول ۱ ملاحظه می‌شود که برآوردگر HW_{nm} در توزیع نرمال استاندارد از لحاظ میانگین

توان دوم خطا عملکرد خوبی دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که برآوردگرهای HV_J، HE_J و HW_J میانگین توان دوم خطای کمتری دارند. با اعمال روش بوت‌استرپ و محاسبه میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای بوت‌استرپ مشاهده می‌شود که برآوردگر (HE_b) در توزیع نرمال استاندارد عملکرد خوبی دارد.

جدول ۱: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع نرمال استاندارد.

برآوردگر	n	m	جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی) HV	HVE	HC	HW	HE
آنتروپی معمولی	۱۰	۳	۰٫۶۲۲۰(۰٫۵۶۱۶)	۰٫۳۶۵۲(−۰٫۲۳۴۱)	۰٫۴۶۸۱(−۰٫۳۸۳۲)	۰٫۳۰۱۹(−۰٫۱۴۰۵)	۰٫۴۰۵۹(−۰٫۳۰۵۴)
	۲۰	۴	۰٫۳۷۴۸(−۰٫۳۲۹۴)	۰٫۲۷۶۹(−۰٫۲۰۵۴)	۰٫۲۶۵۵(−۰٫۱۹۴۲)	۰٫۱۹۱۵(−۰٫۰۶۸۷)	۰٫۲۴۷۳(−۰٫۱۷۱۰)
	۳۰	۵	۰٫۲۸۱۴(−۰٫۲۴۳)	۰٫۲۴۱۸(−۰٫۱۹۳۰)	۰٫۱۹۲۵(−۰٫۱۲۸۱)	۰٫۱۴۷۷(−۰٫۰۴۱۱)	۰٫۱۸۳۹(−۰٫۱۱۷۱)
	۵۰	۷	۰٫۱۹۸۱(−۰٫۱۶۶۱)	۰٫۲۱۰۶(−۰٫۱۸۰۸)	۰٫۱۳۲۴(−۰٫۰۷۳۹)	۰٫۱۰۹۱(−۰٫۰۱۵۲)	۰٫۱۲۶۶(−۰٫۰۶۶۱)
آنتروپی جک‌نایف	۱۰	۳	۰٫۳۷۲۶(−۰٫۰۸۴۹)	۰٫۳۷۵۸(−۰٫۱۷۹۲)	۰٫۳۸۴۹(۰٫۰۱۲۷)	۰٫۳۸۲۶(۰٫۰۰۱۶)	۰٫۳۷۲۶(−۰٫۰۸۴۹)
	۲۰	۴	۰٫۲۱۹(−۰٫۰۴۵۰)	۰٫۲۴۴۹(−۰٫۱۲۳۷)	۰٫۲۳۰۴(۰٫۰۳۳۲)	۰٫۲۱۵۲(۰٫۰۱۹۰)	۰٫۲۱۹(−۰٫۰۴۵۰)
	۳۰	۵	۰٫۱۷۰۹(−۰٫۰۳۲۰)	۰٫۱۹۴۸(−۰٫۱۰۷۴)	۰٫۱۷۹۷(۰٫۰۳۳۷)	۰٫۱۶۸۹(۰٫۰۱۸۹)	۰٫۱۷۰۹(−۰٫۰۳۲۰)
	۵۰	۷	۰٫۱۲۴۶(−۰٫۰۱۶۶)	۰٫۱۵۰۲(−۰٫۰۹۳۲)	۰٫۱۳۳۳(−۰٫۰۳۲۶)	۰٫۱۲۵۰(−۰٫۰۱۹۵)	۰٫۱۲۴۶(−۰٫۰۱۶۶)
آنتروپی بوت‌استرپ	۱۰	۳	۰٫۴۲۳۷(−۰٫۳۱۶۳)	۰٫۲۹۷۳(۰٫۰۱۸۴)	۰٫۳۷۵۹(−۰٫۲۳۷۳)	۰٫۳۰۰۴(۰٫۱۰۵۱)	۰٫۲۸۷۵(−۰٫۰۵۶۶)
	۲۰	۴	۰٫۲۵۵۵(−۰٫۱۷۵۲)	۰٫۱۹۱۴(−۰٫۰۱۳۴)	۰٫۲۲۶۳(−۰٫۱۱۹۸)	۰٫۲۰۴۴(۰٫۰۸۵۲)	۰٫۱۸۷۱(−۰٫۰۱۶۶)
	۳۰	۵	۰٫۱۹۶۶(−۰٫۱۲۸۷)	۰٫۱۵۵۵(−۰٫۰۴۷۲)	۰٫۱۷۲(−۰٫۰۷۹۱)	۰٫۱۶۵۷(۰٫۰۷۳۳)	۰٫۱۴۸۶(۰٫۰۰۲۷)
	۵۰	۷	۰٫۱۴۳۲(−۰٫۰۸۶۸)	۰٫۱۴۰۰(−۰٫۰۸۷۷)	۰٫۱۲۴۷(−۰٫۰۴۲۷)	۰٫۱۳۰۷(۰٫۰۶۴۱)	۰٫۱۱۴۷(۰٫۰۱۳۲)

در توزیع نمایی با توجه به جدول ۲ ملاحظه می‌شود که در بین برآوردگرهای معمولی، برآوردگر آنتروپی HW میانگین توان دوم خطای کمتری دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که تقریبا برآوردگرها عملکرد یکسانی دارند. همچنین می‌توان دید که در بین برآوردگرهای بوت‌استرپ HE_b و HC_b عملکرد خوبی دارند.

با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت (جدول ۳) مشاهده می‌شود برآوردگر HW در بین برآوردگرهای معمولی عملکرد نسبتا خوبی دارد. با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ به ترتیب برآوردگرهای HW_J و HE_b از لحاظ میانگین توان دوم خطا عملکرد خوبی دارند.

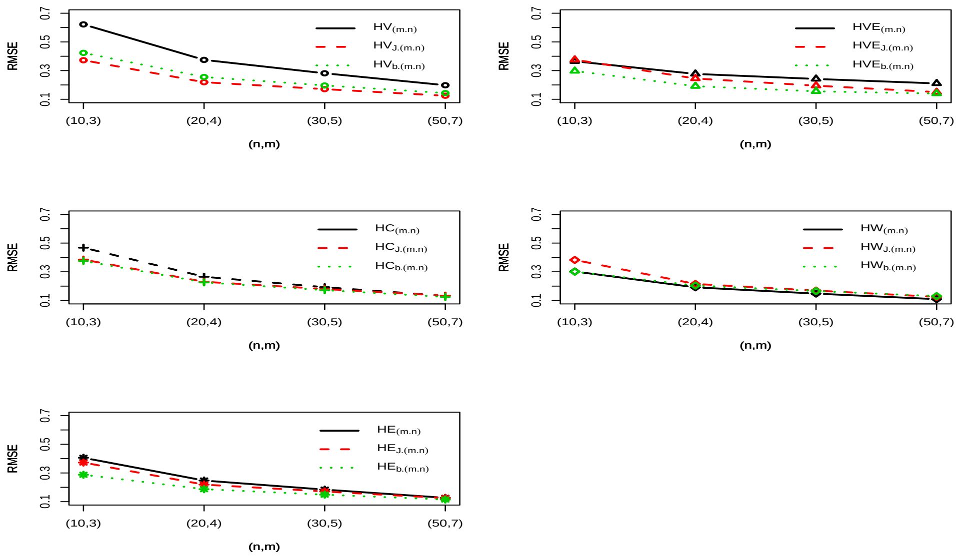
با توجه به شکل ۱، در توزیع نرمال استاندارد و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و کوریا (۱۹۹۵) در حالت

جدول ۲: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع نمایی با میانگین یک.

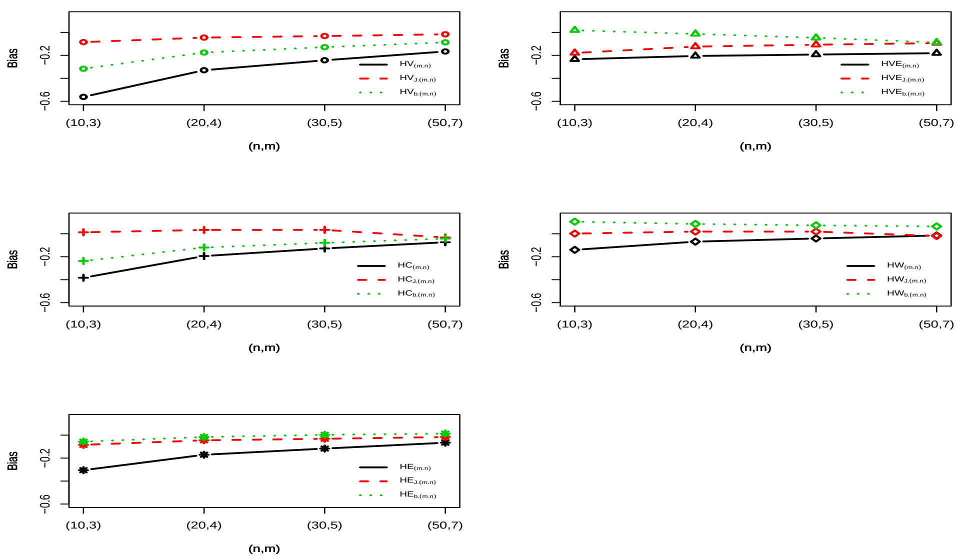
برآوردگر	n	m	جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی) HV	HVE	HC	HW	HE
آنتروپی معمولی	۱۰	۳	۰/۵۶۶۹(−۰/۴۳۸۱)	۰/۳۹۱۳(−۰/۱۱۴۸)	۰/۴۳۷۶(−۰/۲۴۳۳)	۰/۳۶۰۲(−۰/۰۱۶۵)	۰/۴۰۳۲(−۰/۱۸۱۹)
	۲۰	۴	۰/۳۲۲۷(−۰/۲۵۷۱)	۰/۲۷۰۱(−۰/۱۰۹۳)	۰/۲۶۹۶(−۰/۱۱۳۴)	۰/۲۴۱۶(۰/۰۰۳۷)	۰/۲۶۰۹(−۰/۰۹۸۶)
	۳۰	۵	۰/۲۷۱۳(−۰/۱۹۱۳)	۰/۲۲۵۰(−۰/۱۰۹۴)	۰/۲۰۷(−۰/۰۷۰۴)	۰/۱۹۲۶(۰/۰۱۰۶)	۰/۲۰۳۰(−۰/۰۶۵۴)
	۵۰	۷	۰/۱۹۷۷(−۰/۱۳۰۶)	۰/۱۸۲۲(−۰/۱۰۲۵)	۰/۱۵۴۲(−۰/۰۳۴۹)	۰/۱۴۹۸(۰/۰۲۰۳)	۰/۱۵۱۶(−۰/۰۳۰۶)
آنتروپی جک‌نایف	۱۰	۳	۰/۴۴۳۰(−۰/۰۹۴۵)	۰/۴۳۷۵(−۰/۱۱۹۸)	۰/۴۵۰۱(−۰/۰۰۳۴)	۰/۴۳۲۹(−۰/۰۰۷۹)	۰/۴۴۳۰(−۰/۰۹۴۵)
	۲۰	۴	۰/۲۷۶۵(−۰/۰۶۳۲)	۰/۲۸۱۲(−۰/۰۸۰۵)	۰/۲۷۹۱(۰/۰۰۷۲)	۰/۲۶۹۱(۰/۰۰۰۸)	۰/۲۷۶۵(−۰/۰۶۳۲)
	۳۰	۵	۰/۲۱۷۹(−۰/۰۵۱۱)	۰/۲۲۳۷(−۰/۰۷۳۲)	۰/۲۱۹۵(۰/۰۰۹۳)	۰/۲۱۱۸(−۰/۰۰۰۲)	۰/۲۱۷۹(−۰/۰۵۱۱)
	۵۰	۷	۰/۱۶۲۴(−۰/۰۳۷۴)	۰/۱۷۰۵(−۰/۰۶۲۱)	۰/۱۶۲۵(۰/۰۰۸۲)	۰/۱۵۸۱(۰. − ۰۰۱۳)	۰/۱۶۲۴(−۰/۰۳۷۴)
آنتروپی بوت‌استرپ	۱۰	۳	۰/۴۲۰۶(−۰/۱۹۴۱)	۰/۴۱۸۸(۰/۱۴۰۳)	۰/۳۹۶۴(−۰/۰۹۵۱)	۰/۴۳۷۱(۰/۲۲۷۱)	۰/۳۷۹۲(۰/۰۶۵۷)
	۲۰	۴	۰/۲۷۱۱(−۰/۱۰۷۳)	۰/۲۶۷۵(۰/۰۸۶۹)	۰/۲۵۹۳(−۰/۰۴۴۲)	۰/۲۹۲(۰/۱۵۳۲)	۰/۲۵۴(۰/۰۵۱۶)
	۳۰	۵	۰/۲۱۴۴(−۰/۰۸۱۵)	۰/۲۰۳۴(۰/۰۴۰۰)	۰/۲۰۴۷(−۰/۰۲۶۶)	۰/۲۳۱۹(۰/۱۲۰۷)	۰/۲۰۳۷(۰/۰۴۵)
	۵۰	۷	۰/۱۶۳۳(−۰/۰۵۷۴)	۰/۱۵۲۷(−۰/۰۰۶۸)	۰/۱۵۶۲(−۰/۰۱۰۲)	۰/۱۷۹۳(۰/۰۹۴۱)	۰/۱۵۸۶(۰/۰۴۲۹)

جدول ۳: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت

برآوردگر	n	m	جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی) HV	HVE	HC	HW	HE
آنتروپی معمولی	۱۰	۳	۰/۴۵۳۲(−۰/۴۲۱۳)	۰/۲۱۷(۰/۰۰۳۹)	۰/۲۹۴۷(−۰/۲۴۲۴)	۰/۱۶۷۲(−۰/۰۰۰۲)	۰/۲۳۴۹(−۰/۱۶۵۱)
	۲۰	۴	۰/۲۷۳۹(−۰/۲۶۰۳)	۰/۱۲۰۷(۰/۰۰۰۳)	۰/۱۵۵۴(−۰/۱۲۹۱)	۰/۰۸۵۲(۰/۰۰۰۵)	۰/۱۳۲۸(−۰/۱۰۱۸)
	۳۰	۵	۰/۲۱۰۷(−۰/۲۰۲۰)	۰/۰۸۷۴(−۰/۰۰۰۲)	۰/۱۱۱۲(−۰/۰۹۲۶)	۰/۰۵۹۸(−۰/۰۰۰۱)	۰/۰۹۶۸(۰/۰۷۶۱)
	۵۰	۷	۰/۱۵۵۲(−۰/۱۵۰۸)	۰/۰۵۸۱(۰/۰۰۰۰)	۰/۰۷۵۲(−۰/۰۶۵۱)	۰/۰۳۶۸(۰/۰۰۰۱)	۰/۰۶۲۷(−۰/۰۵۰۸)
آنتروپی جک‌نایف	۱۰	۳	۰/۲۸۷۷(−۰/۰۹۰۸)	۰/۲۹۱۴(−۰/۰۰۳۶)	۰/۲۸۷۸(−۰/۰۰۷۵)	۰/۲۷۳۱(−۰/۰۰۴۲)	۰/۲۸۷۷(−۰/۰۹۰۸)
	۲۰	۴	۰/۱۴۹۵(−۰/۰۶۴۸)	۰/۱۶۶۸(−۰/۰۰۰۶)	۰/۱۴۴۱(۰/۰۰۵۰)	۰/۱۳۵۱(−۰/۰۰۰۸)	۰/۱۴۹۵(−۰/۰۶۴۰)
	۳۰	۵	۰/۱۰۸۱(−۰/۰۵۰۷)	۰/۱۱۹۷(−۰/۰۰۰۲)	۰/۱۰۲۸(۰/۰۰۸۵)	۰/۰۹۵۵(۰/۰۰۰۲)	۰/۱۰۸۱(−۰/۰۵۰۷)
	۵۰	۷	۰/۰۶۹۴(−۰/۰۳۵۵)	۰/۰۷۷۴(۰/۰۰۰۶)	۰/۰۶۳۹(۰/۰۰۸۷)	۰/۰۵۹۷(۰/۰۰۰۷)	۰/۰۶۹۴(−۰/۰۳۵۵)
آنتروپی بوت‌استرپ	۱۰	۳	۰/۲۶۸۵(−۰/۲۰۵۴)	۰/۳۵۴۳(۰/۲۵۶۴)	۰/۲۲۲۵(−۰/۱۲۸۷)	۰/۲۷۶۵(۰/۲۱۵۵)	۰/۱۸۱۲(۰/۰۵۴۴)
	۲۰	۴	۰/۱۵۶۱(−۰/۱۲۹۲)	۰/۲۴۱۵(۰/۲۰۲۶)	۰/۱۲۲۵(−۰/۰۸۰۸)	۰/۱۵۷۸(۰/۱۳۱۵)	۰/۰۹۲۳(۰/۰۲۹۶)
	۳۰	۵	۰/۱۲۴۷(−۰/۱۰۸۷)	۰/۱۸۱۸(۰/۱۵۶۱)	۰/۰۹۳۴(−۰/۰۶۷۵)	۰/۱۱۳۱(۰/۰۹۳۱)	۰/۰۶۳۴(۰/۰۱۷۴)
	۵۰	۷	۰/۰۹۹۳(−۰/۰۹۲)	۰/۱۱۷۳(۰/۱۰۰۱)	۰/۰۶۸۵(−۰/۰۵۶)	۰/۰۶۹۸(۰/۰۵۸۹)	۰/۰۳۸۳(۰/۰۰۸۱)



(آ) جذر میانگین توان دوم خطا



(ب) اریبی

شکل ۱: برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع نرمال استاندارد.

معمولی و همچنین اعمال روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف برای حجم نمونه‌های بزرگ عملکرد یکسانی دارند و برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) و ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) بترتیب با اعمال روش جک‌نایف و روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

با توجه به شکل ۲، در توزیع نمایی با میانگین یک و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) در سه حالت معمولی، بوت‌استرپی و جک‌نایف برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند. برآوردگر آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) با اعمال روش بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد بهتری دارد.

با توجه به شکل ۳ در توزیع یکنواخت (۰,۱) از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) در سه حالت معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند.

با توجه به شکل‌های ۱، ۲ و ۳ در توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۰,۱) و از لحاظ اریبی، برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف و برآوردگرهای آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

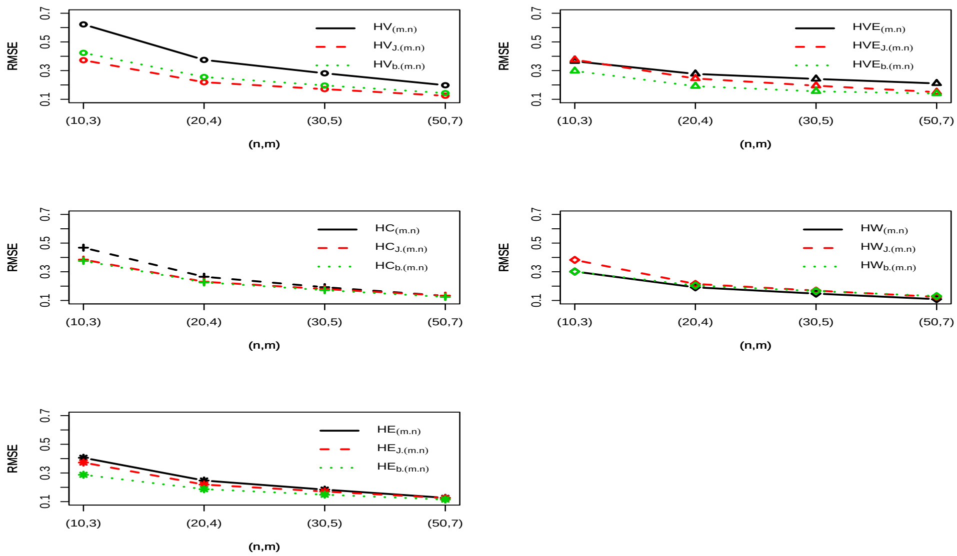
به‌طور کلی مشاهده می‌شود که در هر سه توزیع نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۰,۱)، برآوردگر HV در روش‌های بوت‌استرپ (HV_b) و جک‌نایف (HV_J) عملکرد بسیار خوبی دارد و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها کاهش می‌یابد و میزان اریبی برآوردگرها به سمت صفر میل می‌کند.

۵ آزمون نرمال بودن توزیع جامعه براساس ماکسیمم آنتروپی

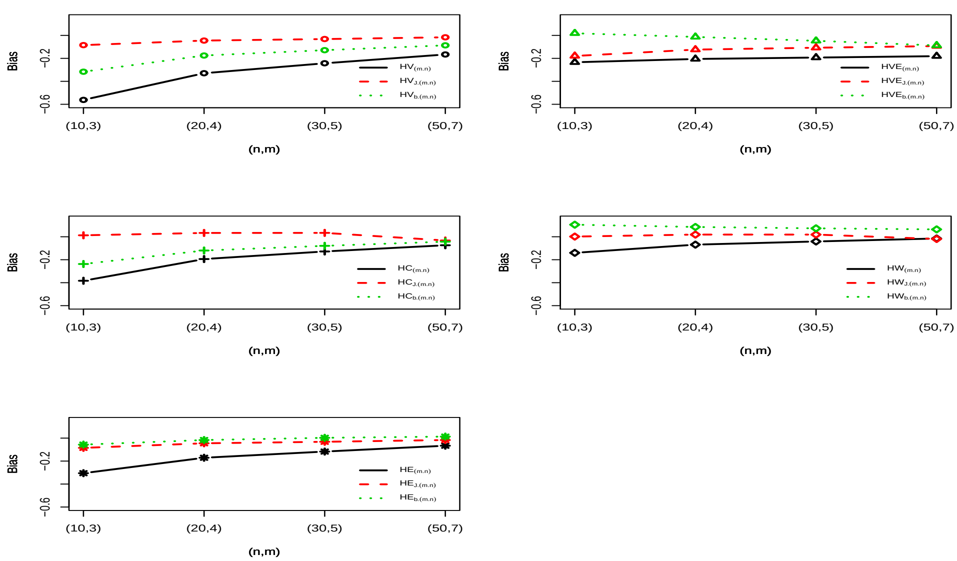
واسیچک (۱۹۷۶) آماره آزمونش برای توزیع نرمال را به‌صورت

$$TV_{nm} = \frac{\exp(HV_{nm})}{S},$$

معرفی کرد، که در آن HV_{nm} برآوردگر آنتروپی واسیچک و S انحراف معیار نمونه است. حال اگر بجای

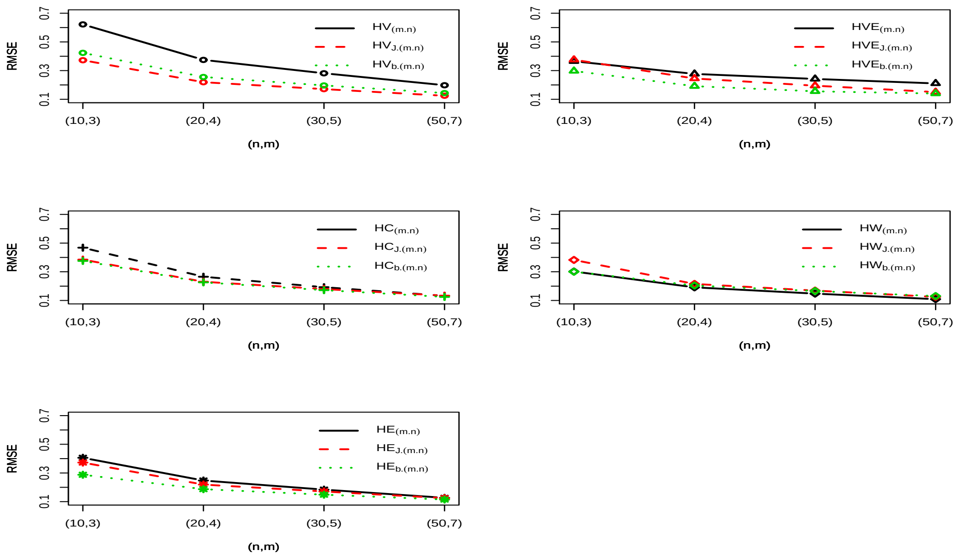


(آ) جذر میانگین توان دوم خطا

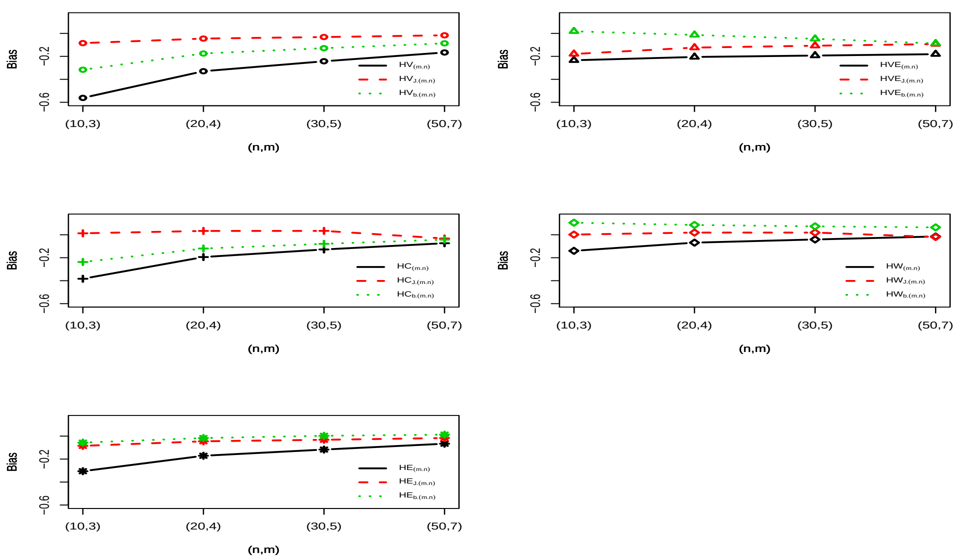


(ب) اریبی

شکل ۲: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت‌استرپی آنتروپی و جک‌نایف آنتروپی در شبیه‌سازی از توزیع نمایی با میانگین یک.



(آ) جذر میانگین توان دوم خطا



(ب) اریبی

شکل ۳: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع یکنواخت

برآوردگر آنتروپی واسیچک از برآوردگرهای دیگر استفاده شود آماره‌های آزمون مختلفی بدست می‌آیند. در زیر آماره‌های مختلف براساس برآوردگرهای مختلف معرفی شده‌اند.

۱. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ون‌ای‌اس (۱۹۹۲):

$$TVE_{nm} = \frac{\exp(HVE_{nm})}{S}.$$

۲. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴):

$$TE_{nm} = \frac{\exp(HE_{nm})}{S}.$$

۳. آماره آزمون بر اساس برآوردگر کوریا (۱۹۹۵):

$$TC_{nm} = \frac{\exp(HC_{nm})}{S}.$$

۴. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹):

$$TW_{nm} = \frac{\exp(HW_{nm})}{S}.$$

۵. آماره آزمون بر اساس برآوردگرهای معرفی شده به روش بوت‌استرپ و جک‌نایف نیز به همین صورت تعریف می‌شوند. برای نمونه آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش بوت‌استرپ به صورت

$$TV_B = \frac{\exp(HV_B)}{S},$$

و آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش جک‌نایف نیز به صورت

$$TV_J = \frac{\exp(HV_J)}{S},$$

است.

۱.۵ مقادیر بحرانی

با توجه به پیچیده بودن آماره‌های آزمون مبتنی بر آنتروپی، محققین نتوانسته‌اند تاکنون، توزیع دقیق آماره آزمون خود را تحت فرضیه صفر (نرمال بودن توزیع جامعه) به‌دست آورند و لذا برای محاسبه مقادیر بحرانی آماره

آزمون، به شبیه‌سازی روی آورده‌اند. در این‌جا، مقادیر بحرانی آماره آزمون‌های معرفی شده به کمک شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف n و m در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ محاسبه می‌شوند. از آنجا که مقادیر کوچک آماره آزمون فرضیه نرمال بودن را رد می‌کند چندک مرتبه αام (C_α) آماره آزمون را بدست آورده‌ایم. چندک مرتبه αام آماره آزمون T عددی است که در رابطه $P_{H_۰}(T < C_\alpha) = \alpha$ صدق می‌کند.

برای محاسبه مقادیر بحرانی تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم n از توزیع نرمال استاندارد تولید و چندک آماره آزمون محاسبه شده است. نحوه محاسبه نقاط بحرانی آماره‌های آزمون بر اساس روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف مشابه روش ذکر شده در بالا است. این مقادیر در جدول‌های ۴ و ۵ آورده شده‌اند. توجه شود که آماره آزمون نسبت به تبدیلات مکانی–مقیاسی پایاست و لذا مقادیر بحرانی، به مقدار پارامترهای μ و $\sigma^۲$ بستگی نخواهند داشت.

جدول ۴: نقاط بحرانی آزمون‌های نرمال بودن بر اساس آماره‌های آزمون بوت‌استرپ در سطح $\alpha = ۰/۰۵$.

آماره آزمون	n ۱۰	۲۰	۴۰	۵۰
TV_B	۲/۵۷۳۲	۳/۰۶۲۸	۳/۴۲۰۰	۳/۵۱۰۰
TVE_B	۳/۲۷۵۳	۳/۴۹۸۰	۳/۵۱۸۲	۳/۵۱۵۶
TC_B	۲/۷۴۹۹	۳/۱۹۴۳	۳/۵۵۵۶	۳/۶۴۳۰
TW_B	۳/۹۳۲۴	۳/۹۷۲۵	۴/۰۶۰۹	۴/۰۸۵۹
TE_B	۳/۳۳۰۰	۳/۵۹۲۸	۳/۸۱۸۳	۳/۸۸۲۸

۲.۵ توان آزمون‌ها

در این بخش توان آزمون‌های پیشنهادی محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای این منظور با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با $B = ۱۰۰۰۰$ تکرار، توان آزمون‌های نرمال بودن تحت ۲۱ توزیع جانشین مختلف به‌دست آورده شده‌اند. برای این کار، ابتدا تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم‌های $n = ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۵۰$ تحت هر یک از توزیع‌های جانشین تولید و سپس توان هر یک از آزمون‌ها از طریق، نسبت تعداد دفعاتی که آماره آزمون از مقدار بحرانی آن کمتر است به کل تعداد تکرارها، برآورد شده است.

جدول ۵: نقاط بحرانی آزمون‌های نرمال بودن بر اساس آماره‌های آزمون جک‌نایف در سطح $\alpha = ۰٫۰۵$.

آماره آزمون	n			
	۱۰	۲۰	۴۰	۵۰
TV_J	۲٫۴۹۵۸	۳٫۱۹۸۵	۳٫۵۸۲۰	۳٫۶۷۲۸
TVE_J	۲٫۴۱۷۱	۲٫۹۲۶۱	۳٫۲۹۸۴	۳٫۳۹۱۹
TC_J	۲٫۶۶۴۷	۳٫۳۹۳۰	۳٫۷۴۱۱	۳٫۸۲۰۴
TW_J	۲٫۷۲۱۴	۳٫۴۰۹۹	۳٫۷۳۶۷	۳٫۸۰۸۱
TE_J	۲٫۴۹۵۸	۳٫۱۹۸۵	۳٫۵۸۲۰	۳٫۶۷۲۸

توزیع‌های جانشین تحت بررسی را می‌توان بر اساس شکل و تکیه‌گاه آن‌ها به چهار گروه مختلف تقسیم کرد. گروه اول، توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$، گروه دوم، توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$، گروه سوم، توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(۰, +\infty)$ و گروه چهارم، توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(۰, ۱)$. استبان و همکاران (۲۰۰۱) این نوع تقسیم‌بندی را برای مقایسه توان برخی از آزمون‌های نرمال بودن، برای اولین بار به‌کار بردند. این توزیع‌ها عبارت‌اند از:

توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع tاستیودنت با یک درجه آزادی (کوشی)، توزیع tاستیودنت با سه درجه آزادی، توزیع نمایی دوگانه (لاپلاس)، توزیع لوژستیک.

توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع گامبل، توزیع نرمال چوله (SN) با پارامترهای شکل $\alpha = ۲,۳$، توزیع لاپلاس چوله (SL) با پارامترهای $\alpha = ۱$ و $\beta = ۲,۳$ (توزیع آمیخته حاصل از ترکیب توزیع نمایی با میانگین $\beta = ۲,۳$ با قرینه توزیع نمایی با میانگین $\alpha = ۱$).

توزیع‌های با تکیه‌گاه $(۰, \infty)$

توزیع نمایی با میانگین یک، توریع گاما با پارامتر شکل $\alpha = ۰٫۵$، توریع گاما با پارامتر شکل $\alpha = ۲$، توزیع لگ‌نرمال (LN) با پارامتر شکل $\sigma = ۱$، توزیع لگ‌نرمال (LN) با پارامتر شکل $\sigma = ۲$، توزیع وایبل با پارامتر شکل $\alpha = ۰٫۵$، توزیع وایبل با پارامتر شکل $\alpha = ۲$، توزیع خی‌دو با یک درجه آزادی، توزیع خی‌دو

با سه درجه آزادی، توزیع نمایی تعمیم‌یافته.

توزیع‌های با تکیه‌گاه $(۰, ۱)$

توزیع یکنواخت، توزیع بتا $(۰٫۵, ۳)$، توزیع بتا$(۰٫۵, ۱)$، توزیع بتا $(۲, ۲)$.

نکته قابل توجه در این‌جا این است که توان آزمون‌های مبتنی بر مبنای آنتروپی، به مقدار پارامتر m بستگی دارد و مقدار بهینه m، یعنی مقداری که به ازای آن توان آزمون ماکسیمم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع جانشین نیز وابسته است و چون توزیع جایگزین در عمل نامعلوم است، نمی‌توان مقداری برای m پیشنهاد داد که به ازای آن، توان آزمون برای تمام توزیع‌های جانشین ماکسیمم شود. این مطلب برای تمام آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی صدق می‌کند. لذا محققین در این زمینه، برای حجم نمونه n، مقداری از m $([\sqrt{n} + ۰٫۵])$ پیشنهاد داده‌اند که آزمون مربوطه، توان نسبتا خوبی به ازای تمام توزیع‌های جایگزین داشته باشد.

جدول ۶: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$.

n	مدل‌های رقیب	TV_{mn}	TVE_{mn}	TC_{mn}	TW_{mn}	TE_{mn}	TV_J	TVE_J	TC_J	TW_J	TE_J	TV_B	TVE_B	TC_B	TW_B	TE_B
۱۰	$t۱$	۰٫۴۱۶۶	۰٫۶۳۷۹	۰٫۳۶۳۱	۰٫۴۱۶۶	۰٫۴۱۶۶	۰٫۲۰۱۳	۰٫۵۳۵۸	۰٫۱۷۷۱	۰٫۲۰۱۳	۰٫۲۰۱۳	۰٫۳۰۱۳	۰٫۶۱۱۲	۰٫۲۳۶۸	۰٫۳۰۶۸	۰٫۳۰۱۴
	$t۳$	۰٫۱۰۱۳	۰٫۱۹۴۵	۰٫۰۸۷۲	۰٫۱۰۱۳	۰٫۱۰۱۳	۰٫۰۴۲۹	۰٫۱۳۴۹	۰٫۰۳۹۰	۰٫۰۴۲۹	۰٫۰۴۲۹	۰٫۰۷۵۲	۰٫۱۸۵۲	۰٫۰۵۸۱	۰٫۰۷۵۴	۰٫۰۷۲۹
	$logistic$	۰٫۰۵۱۹	۰٫۰۸۷۰	۰٫۰۴۶۶	۰٫۰۵۱۹	۰٫۰۵۱۹	۰٫۰۴۱۸	۰٫۰۶۷۱	۰٫۰۴۱۳	۰٫۰۴۱۸	۰٫۰۴۱۸	۰٫۰۴۸۷	۰٫۰۷۲۴	۰٫۰۴۶۲	۰٫۰۴۹۲	۰٫۰۴۸۱
	$laplace$	۰٫۰۵۰۷	۰٫۱۸۵۵	۰٫۰۶۱۷	۰٫۰۰۵۰۷	۰٫۰۵۰۷	۰٫۰۲۹۰	۰٫۱۱۱۲	۰٫۰۲۶۹	۰٫۰۲۹۰	۰٫۰۲۹۰	۰٫۰۵۴۸	۰٫۱۶۸۲	۰٫۰۴۵۱	۰٫۰۵۳۳	۰٫۰۵۱۳
۲۰	$t۱$	۰٫۶۸۸۷	۰٫۸۹۵۸	۰٫۶۰۷۰	۰٫۶۸۸۹	۰٫۶۸۸۷	۰٫۶۴۲۵	۰٫۷۹۳۷	۰٫۶۱۲۳	۰٫۶۴۲۵	۰٫۶۴۲۵	۰٫۵۵۷۲	۰٫۸۸۶۵	۰٫۴۵۷۱	۰٫۵۵۷۲	۰٫۵۵۹۲
	$t۳$	۰٫۱۳۸۱	۰٫۳۵۸۶	۰٫۱۰۵۶	۰٫۱۳۸۱	۰٫۱۳۸۱	۰٫۰۹۸۸	۰٫۲۲۱۸	۰٫۰۸۸۰	۰٫۰۹۸۸	۰٫۰۹۸۸	۰٫۰۸۸۴	۰٫۳۴۷۶	۰٫۰۶۲۰	۰٫۰۸۸۷	۰٫۰۹۰۷
	$logistic$	۰٫۰۴۵۹	۰٫۱۲۹۵	۰٫۰۴۱۱	۰٫۰۴۵۹	۰٫۰۴۵۹	۰٫۰۴۵۶	۰٫۰۷۷۳	۰٫۰۴۴۶	۰٫۰۴۵۵	۰٫۰۴۵۶	۰٫۰۴۰۱	۰٫۱۲۳۴	۰٫۰۳۶۲	۰٫۰۴۰۴	۰٫۰۴۱۴
	$laplace$	۰٫۰۶۸۷	۰٫۳۱۴۰	۰٫۰۴۸۹	۰٫۰۶۸۷	۰٫۰۶۸۷	۰٫۰۷۳۷	۰٫۱۵۱۵	۰٫۰۷۴۹	۰٫۰۷۳۷	۰٫۰۷۳۷	۰٫۰۴۵۹	۰٫۳۰۱۵	۰٫۰۳۳۱	۰٫۰۴۵۵	۰٫۰۴۴۵

توان آزمون‌های ساخته‌شده بر اساس برآوردگرهای آنتروپی را با یکدیگر در سطح خطای $\alpha = ۰٫۰۵$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه این مقایسه در جدول‌های ۶ تا ۹ آورده شده است و همچنین نتیجه نهایی را می‌توان در جدول ۱۰ مشاهده کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله برآورد آنتروپی را به کمک روش‌های باز نمونه‌گیری جک‌نایف و بوت‌استرپ بررسی کردیم. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپی و جک نایف را از لحاظ اریبی و میانگین توان دوم خطا با برآوردگرهای قبلی مقایسه کردیم. ملاحظه شد که با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ می‌توان عملکرد برآوردگرهای

جدول ۷: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(\circ, \infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مدل‌های رقیب	n
۰٫۷۲۶۹	۰٫۷۳۵۴	۰٫۶۶۴۶	۰٫۵۵۵۶	۰٫۷۳۳۶	۰٫۶۶۱۸	۰٫۶۶۱۸	۰٫۶۳۵۱	۰٫۵۹۵۹	۰٫۶۶۱۸	۰٫۷۸۱۰	۰٫۷۸۱۰	۰٫۷۵۸۲	۰٫۶۲۳۵	۰٫۷۸۱۰	Chi(۱)	۱۰
۰٫۲۳۴۷	۰٫۲۴۶۰	۰٫۲۰۴۸	۰٫۱۸۴۷	۰٫۲۴۰۲	۰٫۱۷۰۲	۰٫۱۷۰۲	۰٫۱۷۰۸	۰٫۱۸۴۸	۰٫۱۷۰۲	۰٫۲۷۸۸	۰٫۲۷۸۸	۰٫۲۶۶۶	۰٫۲۲۱۴	۰٫۲۷۸۸	Chi(۳)	
۰٫۵۱۷۴	۰٫۵۲۶۳	۰٫۴۶۸۴	۰٫۴۵۷۱	۰٫۵۲۰۴	۰٫۳۸۶۲	۰٫۳۸۶۲	۰٫۳۶۸۰	۰٫۴۳۵۰	۰٫۳۸۶۲	۰٫۵۹۹۶	۰٫۵۹۹۶	۰٫۵۸۰۲	۰٫۵۱۳۰	۰٫۵۹۹۶	LN(۰, ۱)	
۰٫۹۱۳۷	۰٫۹۱۳۷	۰٫۸۸۲۳	۰٫۸۳۰۱	۰٫۹۱۳۹	۰٫۸۸۶۰	۰٫۸۸۶۰	۰٫۸۷۰۳	۰٫۸۶۶۳	۰٫۸۸۶۰	۰٫۹۴۲۰	۰٫۹۴۲۰	۰٫۹۳۴۰	۰٫۸۷۹۸	۰٫۹۴۲۰	LN(۰, ۲)	
۰٫۷۳۱۴	۰٫۷۳۹۰	۰٫۶۶۹۲	۰٫۵۷۴۴	۰٫۷۳۵۱	۰٫۶۶۰۵	۰٫۶۶۰۵	۰٫۶۳۰۹	۰٫۶۰۳۴	۰٫۶۶۰۵	۰٫۷۸۶۲	۰٫۷۸۶۲	۰٫۷۶۰۴	۰٫۶۲۴۷	۰٫۷۸۶۲	Gamma(۰٫۵)	
۰٫۱۷۹۷	۰٫۱۸۵۶	۱۶۱۸	۰٫۱۴۷۳	۰٫۱۸۰۵	۰٫۱۲۲۴	۰٫۱۲۲۳	۰٫۱۲۱۹	۰٫۱۴۰۵	۰٫۱۲۲۴	۰٫۲۰۷۹	۰٫۲۰۷۹	۰٫۱۹۵۵	۰٫۱۷۶۹	۰٫۲۰۷۹	Gamma(۲)	
۰٫۸۸۷۴	۰٫۸۸۹۱	۸۴۳۷	۰٫۷۷۹۴	۰٫۸۸۶۴	۰٫۸۶۶۶	۰٫۸۶۶۶	۰٫۸۴۶۱	۰٫۸۲۹۲	۰٫۸۶۶۶	۰٫۹۳۰۶	۰٫۹۳۰۶	۰٫۹۱۶۰	۰٫۸۴۳۳	۰٫۹۳۰۶	Weibull(۰٫۵)	
۰٫۰۷۶۴	۰٫۰۸۳۱	۰٫۰۷۵۵	۰٫۰۶۶۰	۰٫۰۸۰۶	۰٫۰۶۹۴	۰٫۰۶۹۴	۰٫۰۷۱۶	۰٫۰۶۸۲	۰٫۰۶۹۴	۰٫۰۷۹۰	۰٫۰۷۹۰	۰٫۰۷۶۷	۰٫۰۶۱۰	۰٫۰۷۹۰	Weibull(۲)	
۰٫۳۸۹۷	۰٫۳۹۹۷	۰٫۳۴۶۶	۰٫۲۸۶۵	۰٫۳۹۴۹	۰٫۲۸۹۵	۰٫۲۸۹۴	۰٫۲۸۱۲	۰٫۲۷۷۳	۰٫۲۸۹۵	۰٫۴۴۸۶	۰٫۴۴۸۵	۰٫۴۳۲۰	۰٫۳۳۱۱	۰٫۴۴۸۵	Exp(۱)	
۰٫۷۱۲۳	۰٫۷۱۶۶	۰٫۶۴۹۸	۰٫۵۴۳۳	۰٫۷۱۲۲	۰٫۶۴۴۲	۰٫۶۴۴۲	۰٫۶۱۸۲	۰٫۵۸۶۴	۰٫۶۴۴۲	۰٫۷۷۲۸	۰٫۷۷۲۸	۰٫۷۴۹۰	۰٫۶۱۲۱	۰٫۷۷۲۸	Gexp(۰٫۵)	
۰٫۹۸۲۲	۰٫۹۸۲۴	۰٫۹۷۰۳	۰٫۹۰۵۸	۰٫۹۸۳۳	۰٫۹۷۷۹	۰٫۹۷۷۹	۰٫۹۶۸۳	۰٫۹۲۹۸	۰٫۹۷۷۲	۰٫۹۹۳۶	۰٫۹۹۳۶	۰٫۹۹۰۳	۰٫۹۴۳۱	۰٫۹۹۳۶	Chi(۱)	۲۰
۰٫۵۶۶۷	۰٫۵۵۸۴	۰٫۵۱۹۴	۰٫۳۹۵۱	۰٫۵۶۵۰	۰٫۴۵۷۱	۰٫۴۵۷۱	۰٫۴۳۹۴	۰٫۳۵۰۳	۰٫۴۵۷۲	۰٫۶۳۹۳	۰٫۶۳۹۳	۰٫۶۰۹۱	۰٫۴۴۴۰	۰٫۶۳۹۳	Chi(۳)	
۰٫۸۹۱۰	۰٫۸۹۱۵	۰٫۸۶۳۹	۰٫۷۹۹۱	۰٫۸۹۱۱	۰٫۸۳۲۹	۰٫۸۳۲۹	۰٫۸۱۴۳	۰٫۷۵۹۴	۰٫۸۳۲۹	۰٫۹۲۵۷	۰٫۹۲۵۷	۰٫۹۱۵۶	۰٫۸۲۹۱	۰٫۹۲۵۷	LN(۰, ۱)	
۰٫۹۹۹۳	۰٫۹۹۹۳	۰٫۹۹۸۸	۰٫۹۹۳۴	۰٫۹۹۹۵	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۸۲	۰٫۹۹۵۴	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۹۸	۰٫۹۹۹۸	۰٫۹۹۹۶	۰٫۹۹۶۷	۰٫۹۹۹۸	LN(۰, ۲)	
۰٫۹۸۴۷	۰٫۹۸۴۳	۹۷۰۶	۹۱۳۲	۰٫۹۸۴۲	۰٫۹۷۸۰	۰٫۹۷۸۰	۰٫۹۶۷۸	۰٫۹۲۶۸	۰٫۹۷۸۰	۰٫۹۹۱۳	۰٫۹۹۱۳	۰٫۹۸۸۲	۰٫۹۴۲۲	۰٫۹۹۱۳	Gamma(۰٫۵)	
۰٫۴۰۹۸	۰٫۴۰۴۹	۰٫۳۶۶۴	۰٫۲۹۸۷	۰٫۴۰۴۰	۰٫۳۱۰۳	۰٫۳۱۰۳	۰٫۳۰۰۹	۰٫۲۵۰۶	۰٫۳۱۰۳	۰٫۴۷۱۹	۰٫۴۷۱۹	۰٫۴۴۴۴	۰٫۳۲۰۷	۰٫۴۷۱۹	Gamma(۲)	
۰٫۹۹۸۸	۰٫۹۹۹۲	۰٫۹۹۸۱	۰٫۹۸۹۱	۰٫۹۹۸۷	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۶۸	۰٫۹۹۴۰	۰٫۹۹۸۶	۰٫۹۹۹۶	۰٫۹۹۹۶	۰٫۹۹۹۴	۰٫۹۹۴۵	۰٫۹۹۹۶	Weibull(۰٫۵)	
۰٫۱۲۶۹	۰٫۱۲۶۸	۰٫۱۱۷۵	۰٫۰۷۴۵	۰٫۱۲۶۷	۰٫۱۰۵۲	۰٫۱۰۵۲	۰٫۱۰۸۱	۰٫۰۷۹۳	۰٫۱۰۵۲	۰٫۱۳۸۴	۰٫۱۳۸۴	۰٫۱۳۷۶	۰٫۰۷۷۵	۰٫۱۳۸۴	Weibull(۲)	
۰٫۸۰۳۲	۰٫۷۹۸۹	۰٫۷۶۰۴	۰٫۵۸۷۴	۰٫۷۹۹۵	۰٫۷۲۰۳	۰٫۷۲۰۳	۰٫۶۹۷۲	۰٫۵۶۹۸	۰٫۷۲۰۳	۰٫۸۵۲۴	۰٫۸۵۲۴	۰٫۸۳۲۴	۰٫۶۳۸۲	۰٫۸۵۲۴	Exp(۱)	
۰٫۹۸۱۵	۰٫۹۷۹۸	۰٫۹۶۶۸	۰٫۸۹۴۹	۰٫۹۸۰۵	۰٫۹۷۴۴	۰٫۹۷۴۴	۰٫۹۶۲۹	۰٫۹۲۳۳	۰٫۹۷۴۴	۰٫۹۸۸۸	۰٫۹۸۸۸	۰٫۹۸۴۴	۰٫۹۲۸۱	۰٫۹۸۸۸	Gexp(۰٫۵)	

جدول ۸: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌های نامتقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	مدل‌های رقیب	n
۰٫۰۹۲۲	۰٫۰۹۹۴	۰٫۰۸۶۷	۰٫۱۱۰۰	۰٫۰۹۵۵	۰٫۰۶۷۰	۰٫۰۶۷۰	۰٫۰۶۶۵	۰٫۰۹۰۷	۰٫۰۶۷۰	۰٫۱۰۷۹	۰٫۱۰۷۹	۰٫۱۰۱۱	۰٫۱۲۱۰	۰٫۱۰۷۹	Gumbel(۰, ۱)	۱۰
۰٫۰۹۳۸	۰٫۱۰۴۷	۰٫۰۸۴۸	۰٫۱۰۸۵	۰٫۰۹۸۲	۰٫۰۶۸۸	۰٫۰۶۸۸	۰٫۰۶۸۴	۰٫۰۹۰۸	۰٫۰۶۸۸	۰٫۱۱۰۰	۰٫۱۰۹۹	۰٫۱۰۳۸	۰٫۱۲۲۷	۰٫۱۰۹۹	Gumbel(۰, ۲)	
۰٫۰۸۹۲	۰٫۰۹۱۰	۰٫۰۷۷۸	۰٫۰۹۵۳	۰٫۰۸۷۹	۰٫۰۶۷۲	۰٫۰۶۷۲	۰٫۰۶۷۳	۰٫۰۹۵۱	۰٫۰۶۷۲	۰٫۱۰۷۹	۰٫۱۰۷۹	۰٫۱۰۱۱	۰٫۱۲۱۰	۰٫۱۰۷۹	Gumbel(۰, ۳)	
۰٫۰۶۱۰	۰٫۰۶۵۲	۰٫۰۵۹۶	۰٫۰۶۲۸	۰٫۰۶۲۰	۰٫۰۵۰۳	۰٫۰۵۰۳	۰٫۰۴۸۸	۰٫۰۶۱۴	۰٫۰۵۰۳	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۵۶۷	۰٫۰۶۲۹	۰٫۰۵۶۰	SN(۰, ۱, ۲)	
۰٫۰۷۷۶	۰٫۰۸۲۵	۰٫۰۷۵۳	۰٫۰۷۴۱	۰٫۰۸۱۲	۰٫۰۶۱۸	۰٫۰۶۱۸	۰٫۰۶۲۳	۰٫۰۷۰۸	۰٫۰۶۱۸	۰٫۰۷۴۰	۰٫۰۷۴۰	۰٫۰۷۱۵	۰٫۰۷۴۴	۰٫۰۷۴۰	SN(۰, ۱, ۳)	
۰٫۰۹۸۹	۰٫۱۰۲۷	۰٫۰۸۳۶	۰٫۱۸۳۲	۰٫۰۹۹۲	۰٫۰۶۰۴	۰٫۰۶۰۳	۰٫۰۵۹۲	۰٫۱۴۱۱	۰٫۰۶۰۴	۰٫۱۳۳۷	۰٫۱۳۳۷	۰٫۱۱۸۹	۰٫۲۰۸۱	۰٫۱۳۳۷	SL(۰, ۱, ۲)	
۰٫۱۷۱۳	۰٫۱۶۹۸	۰٫۱۴۲۹	۰٫۲۰۹۳	۰٫۱۶۹۷	۰٫۰۹۷۲	۰٫۰۹۷۲	۰٫۰۹۴۳	۰٫۱۸۰۲	۰٫۰۹۷۲	۰٫۲۱۰۶	۰٫۲۱۰۵	۰٫۱۹۱۴	۰٫۲۴۶۷	۰٫۲۱۰۵	SL(۰, ۱, ۳)	
۰٫۱۶۸۱	۰٫۱۶۵۶	۰٫۱۴۷۲	۰٫۱۹۲۵	۰٫۱۶۶۴	۰٫۱۳۴۸	۰٫۱۳۴۸	۰٫۱۳۱۳	۰٫۱۴۵۳	۰٫۱۳۴۸	۰٫۲۰۰۵	۰٫۲۰۰۵	۰٫۱۸۱۷	۰٫۲۱۲۸	۰٫۲۰۰۵	Gumbel(۰, ۱)	۲۰
۰٫۱۶۵۸	۰٫۱۶۵۲	۰٫۱۴۲۹	۰٫۱۹۲۶	۰٫۱۶۴۹	۰٫۱۲۹۶	۰٫۱۲۹۶	۰٫۱۲۸۶	۰٫۱۳۷۵	۰٫۱۲۹۶	۰٫۲۰۰۲	۰٫۲۰۰۲	۰٫۱۸۲۹	۰٫۲۰۶۸	۰٫۲۰۰۲	Gumbel(۰, ۲)	
۰٫۱۷۱۳	۰٫۱۶۳۷	۰٫۱۴۸۹	۰٫۱۸۷۲	۰٫۱۷۱۰	۰٫۱۲۹۹	۰٫۱۲۹۹	۰٫۱۲۴۵	۰٫۱۳۸۱	۰٫۱۲۹۹	۰٫۲۰۶۱	۰٫۲۰۶۱	۰٫۱۸۵۰	۰٫۲۰۱۱	۰٫۲۰۶۱	Gumbel(۰, ۳)	
۰٫۰۷۳۹	۰٫۰۷۲۱	۰٫۰۶۷۵	۰٫۰۷۴۵	۰٫۰۷۲۲	۰٫۰۶۴۰	۰٫۰۶۴۰	۰٫۰۶۴۶	۰٫۰۶۷۴	۰٫۰۶۴۰	۰٫۰۷۴۴	۰٫۰۷۴۴	۰٫۰۶۹۱	۰٫۰۷۴۸	۰٫۰۷۴۴	SN(۰, ۱, ۲)	
۰٫۱۱۵۴	۰٫۱۱۵۳	۰٫۱۰۷۰	۰٫۱۰۵۰	۰٫۱۱۳۱	۰٫۰۸۹۱	۰٫۰۸۹۱	۰٫۰۹۱۰	۰٫۰۸۰۹	۰٫۰۸۹۱	۰٫۱۱۷۹	۰٫۱۱۷۹	۰٫۱۱۳۴	۰٫۱۰۱۴	۰٫۱۱۷۹	SN(۰, ۱, ۳)	
۰٫۱۵۲۶	۰٫۱۵۰۷	۰٫۱۱۹۹	۰٫۳۵۹۵	۰٫۱۵۴۶	۰٫۱۴۶۹	۰٫۱۴۶۹	۰٫۱۴۲۵	۰٫۲۲۶۲	۰٫۱۴۶۹	۰٫۲۰۴۷	۰٫۲۰۴۷	۰٫۱۶۸۳	۰٫۳۸۹۱	۰٫۲۰۴۷	SL(۰, ۱, ۲)	
۰٫۳۱۰۲	۰٫۳۰۵۷	۰٫۲۶۰۱	۰٫۴۳۳۷	۰٫۳۰۵۹	۰٫۲۴۹۰	۰٫۲۴۸۹	۰٫۲۳۳۸	۰٫۳۰۵۶	۰٫۲۴۹۰	۰٫۳۷۴۶	۰٫۳۷۴۸	۰٫۳۳۲۴	۰٫۴۵۶۳	۰٫۳۷۴۸	SL(۰, ۱, ۳)	

جدول ۹: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌هایی با تکیه‌گاه $(۰, ۱)$.

n	مدل‌های رقیب	TV_{mn}	TVE_{mn}	TC_{mn}	TW_{mn}	TE_{mn}	TV_J	TVE_J	TC_J	TW_J	TE_J	TV_B	TVE_B	TC_B	TW_B	TE_B
۱۰	$Uniform$	۰/۱۴۰۲	۰/۰۲۸۴	۰/۱۴۰۲	۰/۰۵۴۱	۰/۱۴۰۲	۰/۱۷۲۴	۰/۰۸۶۳	۰/۱۷۰۳	۰/۱۷۲۴	۰/۱۷۲۴	۰/۱۸۲۱	۰/۰۲۹۷	۰/۱۷۱۴	۰/۱۸۶۸	۰/۱۷۷۳
	$Beta(۰/۵, ۳)$	۰/۶۸۶۶	۰/۴۹۱۹	۰/۶۶۱۲	۰/۶۸۶۶	۰/۶۸۶۷	۰/۵۶۸۹	۰/۴۷۷۳	۰/۵۴۷۴	۰/۵۶۸۹	۰/۵۶۸۹	۰/۶۳۹۷	۰/۴۳۹۴	۰/۵۷۸۲	۰/۶۴۷۵	۰/۶۳۴۸
	$Beta(۰/۵, ۱)$	۰/۴۴۴۲	۰/۲۰۰۸	۰/۴۲۲۹	۰/۴۴۴۲	۰/۴۴۴۲	۰/۴۴۲۴	۰/۲۸۵۳	۰/۴۲۶۳	۰/۴۴۲۴	۰/۴۴۲۴	۰/۴۴۸۸	۰/۱۶۹۷	۰/۳۹۲۱	۰/۴۴۹۵	۰/۴۴۳۵
	$Beta(۲, ۲)$	۰/۰۶۶۸	۰/۰۲۷۶	۰/۰۶۵۳	۰/۰۶۶۸	۰/۰۶۶۸	۰/۰۸۷۳	۰/۰۵۶۸	۰/۰۸۵۳	۰/۰۸۷۳	۰/۰۸۷۳	۰/۰۸۶۰	۰/۰۳۳۱	۰/۰۸۴۱	۰/۰۸۸۱	۰/۰۸۱۵
۲۰	$Uniform$	۰/۴۴۲۷	۰/۰۳۳۳	۰/۴۳۷۳	۰/۴۴۲۸	۰/۴۴۲۸	۰/۳۸۸۴	۰/۱۳۸۷	۰/۳۷۵۰	۰/۳۸۸۱	۰/۳۸۸۴	۰/۴۳۴۳	۰/۰۳۱۰	۰/۴۲۸۳	۰/۴۳۱۴	۰/۴۳۵۷
	$Beta(۰/۵, ۳)$	۰/۹۷۵۰	۰/۸۴۰۵	۰/۹۶۵۹	۰/۹۷۵۰	۰/۹۷۵۰	۰/۹۴۱۶	۰/۸۳۷۲	۰/۹۲۸۳	۰/۹۴۱۶	۰/۹۴۱۶	۰/۹۵۸۸	۰/۷۹۰۴	۰/۹۳۴۵	۰/۹۵۵۹	۰/۹۵۷۲
	$Beta(۰/۵, ۱)$	۰/۸۸۲۵	۰/۴۲۱۹	۰/۸۶۵۶	۰/۸۸۵۸	۰/۸۸۵۸	۰/۸۴۲۶	۰/۵۵۲۶	۰/۸۲۰۱	۰/۸۴۲۶	۰/۸۴۲۶	۰/۸۶۰۸	۰/۳۴۹۷	۰/۸۲۴۹	۰/۸۶۱۴	۰/۸۶۲۵
	$Beta(۲, ۲)$	۰/۱۴۰۴	۰/۰۱۶۲	۰/۱۴۷۵	۰/۱۴۰۴	۰/۱۴۰۴	۰/۱۲۱۸	۰/۰۵۵۰	۰/۱۲۲۵	۰/۱۲۱۸	۰/۱۲۱۸	۰/۱۳۸۸	۰/۰۱۵۵	۰/۱۴۶۹	۰/۱۳۴۶	۰/۱۴۱۳

جدول ۱۰: بهترین آزمون‌های نرمال بودن در گروه‌های مختلف

آزمون مبتنی بر	گروه	آزمون با عملکرد بهتر
ماکسیمم آنتروپی	اول	TVE_{mn}
	دوم	TVE_{mn}
	سوم	$TV_{mn}, TW_{mn}, TE_{mn}$
	چهارم	TW_{mn}
روش جک‌نایف	اول	TVE_J
	دوم	TVE_J
	سوم	TV_J, TW_J, TE_J
	چهارم	TV_J, TW_J, TE_J
روش بوت‌استرپ	اول	TVE_B
	دوم	TVE_B
	سوم	TV_B
	چهارم	TV_B

آنتروپی را بهبود بخشید. لذا در عمل استفاده از این روش‌ها را پیشنهاد می‌شود. سپس آزمون نرمال بودن توزیع جامعه را براساس برآوردگرهای بوت‌استرپ و جک‌نایف انجام دادیم و توان آزمون‌های مختلف را در مقابل فرضیه های جانشین با یکدیگر مقایسه نمودیم و مشاهده کردیم که در مقابل برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های پیشنهادی از توان خوبی برخوردار بودند و لذا در عمل می‌توانند بکار برده شوند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود و ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر را دارند.

مراجع

حبیبی‌راد، آ. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی، مجله علوم آماری، **۱**، ۱۰۹-۱۲۰.

زمان‌زاده، ا. (۱۳۹۲)، آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی برمبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، **۷**، ۶۱-۷۵.

زمان‌زاده، ا. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، **۲**، ۱۷۹-۲۰۰.

عباس‌نژاد، م. و شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی برمبنای برآورد اطلاع رنی. مجله علوم آماری، **۴**، ۲۰۱-۲۱۱.

عباس‌نژاد، م. و محمدی، د. (۱۳۸۹)، آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی. مجله علوم آماری، **۴**، ۲۱-۳۳.

علیزاده، ه.، ارقامی، ن. ر. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه برآوردگرهای مختلف آنتروپی و توان آزمون‌های نمایی بودن برمبنای برآوردگرهای آنتروپی. مجله علوم آماری، **۲**، ۲۱۳-۲۲۷.

علیزاده، ه. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برازش برمبنای آنتروپی با سایر روشها. مجله علوم آماری، **۲**، ۹۷-۱۱۳.

Alizadeh Noughabi, H. (2010), A New Estimator of Entropy and Its Application in Testing Normality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 1151-1162.

Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N. R. (2011), Monte Carlo comparison of Five Exponentiality Tests Using Different Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 1579–1592.

Bradley, E. and Gail, G.(1983), A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation, *The American Statistician*, **37**, 36-48.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality based on Kullback-Leibler information with Pogressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 301-307.

Baratpour, S. and Habibi Rad. A. (2012), Testing Goodness of Fit for Exponential Distribution based an cumulative residnal entropy, *Communications in Statistics–Theory and Methods*, **47**, 1387-1396.

Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-Based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Choi, B. and Kim, K. (2006), Testing Goodness-of-Fit for Laplace Distribution Based on Maximum Entropy, *Statistics*, **40**, 517–531.

Correa, J. C., (1995), A New Estimator of Entropy. *Communications in Statistics– Theory and Methods*, **24**, 2439–2449.

Chhikara, R. S. and Folks, JL. (1977), The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model, *Technometrics*, **19**, 461-468.

Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy. *Statistics and Probability Letters*, **20**, 225–234.

Esteban, M. D., Castellanos, M. E., Morales, D. and Vajda, I. (2001), Monte Carlo Comparison of Four Normality Tests Using Different Entropy Estimates, *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, **30**, 761-285.

Habibi Rad, A., Yousefzadeh, F., and Balakrishnan, N. (2011), Goodness of-Fit Test Based on Kullback-Leibler Information for Progressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 570-579.

Kagan, A. M., Linnik, Y. and Rao, C. R. (1973), Characterization Problems in Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.

Lim, J., and Park, S. (2007), Censored Kullback-Leibler Information and Goodness of-Fit Test with Type II Censored Data, *Journal of Applied Statistics*, **34**, 1051-1064.

Lee S., Vonta I., and Karagrigoriou, A. (2011), A Maximum Entropy Type Test of Fit. *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2635-2643.

Mudholkar, G. S., Natarajan R., and Chaubey Y. P. (2001), A Goodness-of-fit Test for the Inverse Gaussian Distribution Using its Independence Characterization. *Sankhya: Ser B*, **63**, 362-374.

Mudholkar, G. S. and Tian, L. (2002), An Entropy Characterization of the Inverse Gaussian Distribution and Related Goodness of Fit Test, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **102**, 211-221.

Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on The Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 22-26.

Rodriguez, P. P., Vaquera-Huerta, H., and Villasenor-Alva, J. (2009), A Goodness of-Fit Test for the Gumbel Distribution Based on Kullback-Leibler Information, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **38**, 842-855.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423; 623–656.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **38**, 54-59.

Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by Class of Statistics Based on Sapacings, *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 61-72.

Von Alven, W. H. (1964), Reliability Engineering by ARINC. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall.

Wieczorkowski, R. and Grzegorzewsky, P. (1999), Entropy Estimators Improvements and Comparisons, *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, **28**, 541–567.

Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1479–1499.

Zamanzade, E. and Arghami, N. R. (2011), Goodness of Fit Test Based on Correcting Moments of Modified Entropy Estimator, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 2077-2093.

Entropy estimation using Bootstrap and Jackknife methods and its application in testing normality

Pourkazemi, A. , Alizadeh Noughabi, H. and Jomhoori, S.

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Abstract: In this paper, the Bootstrap and Jackknife methods are stated and using these methods, entropy is estimated. Then the estimators based on Bootstrap and Jackknife are investigated in terms of bias and RMSE using simulation. The proposed estimators are compared with other entropy estimators by Monte Carlo simulation. Results show that the entropy estimators based on Bootstrap and Jackknife have a good performance as compared to the other estimators. Next, some tests of normality based on the proposed estimators are introduced and the power of these tests are compared with other tests.

Keywords: Entropy, Bootstrap, Jackknife, Testing normality, Test power

Mathematics Subject Classification (2010): 62B10, 62G05.