مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های مستقل و ناهمگن تحت نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته

قباد برمال‌زن، عابدین حیدری

گروه آمار، دانشگاه زابل

چکیده: این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن و مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته می‌پردازد. ابتدا دو سیستم سری با پارامترهای متفاوت در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از مقایسه‌های پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی بین این سیستم‌ها حاصل می‌شود. سپس ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی به دست آورده شده است. همچنین، با استفاده از بیشاندن نامرتب و بیشاندن وزنی روی فضای $\mathcal{D}_n^{\pi}$، ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی، بررسی شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته، آماره‌های مرتب، بیشاندن نامرتب، ترتیب تصادفی معمولی، بیشاندن وزنی.

۱ مقدمه

متغیر تصادفی X دارای توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته ($X \sim GLFR(\alpha,\beta,\lambda)$) است، هرگاه دارای تابع توزیع

$$F(x;\alpha,\beta,\lambda)=\{1-e^{-(\alpha x+\frac{\beta}{2}x^{2})}\}^{\lambda} \qquad x>0,$$

[*] آدرس الکترونیک مسئول مقاله: قباد برمال‌زن، Ghobad.barmalzan@gmail.com

[*] کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 90B25.

باشد که در آن $\alpha > ۰, \beta > ۰, \lambda > ۰$ است. در حالت‌های خاص، این توزیع شامل توزیع‌های نمایی ($\beta = ۰$)، توزیع نرخ شکست خطی ($\lambda = ۱$)، توزیع نمایی تعمیم‌یافته ($\beta = ۰$) و توزیع رایلی تعمیم‌یافته ($\alpha = ۰$) است (سرهن و کوندو ۲۰۰۹). برخی از خواص مهم و پرکاربرد توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته در قابلیت اعتماد را می‌توان به صورت زیر برشمرد:

(الف) فرض کنید یک سیستم موازی با n مولفه در اختیار است که در آن مولفه‌ها از توزیع نرخ شکست خطی پیروی می‌کنند. در این صورت، طول عمر این سیستم، دارای توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته است.

(ب) یک سیستم موازی با مولفه‌های نرخ شکست خطی با چندین دور افتاده[۱] را می‌توان به عنوان یک سیستم موازی با دو مولفه ناهمگن از توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته در نظر گرفت.

مدل با چندین دور افتاده به صورت زیر تعریف می‌شود: فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که در آن $X_۱, \cdots, X_p$ دارای تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ و $X_{p+۱} \cdots, X_n$ دارای تابع توزیع متفاوت دیگری مانند $G(x)$ و تابع چگالی احتمال $g(x)$ هستند. در حقیقت در مدل‌های با چندین دور افتاده، همه متغیرها هم‌توزیع نیستند و به دو دسته از نظر هم‌توزیع بودن تقسیم می‌شوند.

یکی از مهمترین اهداف قابلیت اعتماد، تعیین ساختار سیستم‌های پیچیده و افزایش طول عمر سیستم‌ها است. برای این منظور، سیستم‌های متفاوتی در قابلیت اعتماد تعریف شده است که یکی از پرکاربردترین آنها سیستم $n - k + ۱$ از n است. برای فعال بودن این سیستم، فعالیت حداقل $n - k + ۱$ مولفه از آن ضروری است. با این تعریف، سیستم موازی یک سیستم ۱ از n و سیستم سری یک سیستم n از n است. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ بیانگر طول عمر مولفه‌های یک سیستم و $X_{۱:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ بیانگر آماره‌های مرتب، متناظر با این متغیرهای طول عمر باشند. به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $X_{k:n}$ بیانگر طول عمر یک سیستم $n - k + ۱$ از n است. این ارتباط مفید باعث شده است نظریه آماره‌های مرتب در تعیین خواص سیستم‌های $n - k + ۱$ از n به طور وسیع، مورد استفاده قرار گیرد. آماره‌های مرتب، در سایر شاخه‌های آمار مانند استنباط آماری، تحلیل بقا، کنترل کیفیت و آزمون‌های طول عمر، نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

در بسیاری از مسائل آماری مقایسه دو متغیر تصادفی، ضروری بنظر می‌رسد. ساده‌ترین روش برای مقایسه دو متغیر تصادفی، استفاده از شاخص‌های مرکزی یا شاخص‌های پراکندگی است. اما این شاخص‌ها در نهایت

---
[۱] Multiple outlier

یک عدد هستند و اطلاعات زیادی را در مورد توزیع متغیر تصادفی منتقل نمی‌کنند. از این رو محققان به روش‌هایی که منعکس کننده اطلاعات بیشتری از توزیع‌ها باشند روی آورده‌اند. این روش‌ها و مسائل نظری مربوط به آنها در بحث ترتیب‌های تصادفی می‌گنجند.

نویسندگان زیادی روی مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن کار کرده‌اند. این مقایسه‌ها برای زمانی که مولفه‌ها از توزیع نمایی پیروی می‌کنند بطور گسترده مورد توجه بسیاری از آماردانان قرار گرفته است. بسیاری از نتایج به دست آمده از مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های نمایی، به سایر توزیع‌ها تعمیم داده شده است. مثلاً خالدی و کوچار (۲۰۰۶)، کوچار و زو (۲۰۰۷a, ۲۰۰۷b)، و فانگ و ژانگ (۲۰۱۳) نتایج را به توزیع وایبول، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) و بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۳) نتایج را برای حالت گاما، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) نتایج را برای نمایی تعمیم‌یافته، برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۷) نتایج را به وایبول-هندسی نمایی‌شده و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) نتایج را برای مدل کلی مقیاس، تعمیم دادند.

در این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن و مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته پرداخته شده است. ابتدا دو سیستم سری با پارامترهای متفاوت در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از مقایسه‌های پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی بین این سیستم‌ها حاصل می‌شود. سپس ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی به دست آورده شده است. همچنین، با استفاده از بیشاندن نامرتب و بیشاندن وزنی روی فضای $\mathcal{D}_n^{\pi}$، ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی، بررسی شده است. در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است. مقایسه تصادفی سیستم‌های سری متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته، در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ به مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته پرداخته شده است. سرانجام به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷). فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع بقای به ترتیب $\bar{F}(x) = P(X > x)$ و $\bar{G}(x) = P(Y > x)$ باشند. X در ترتیب تصادفی معمولی، بزرگتر از

Y است ($X \geq_{st} Y$)، هرگاه به ازای هر $x \geq \circ$، $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x)$.

برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد انواع ترتیب‌های تصادفی، مفاهیم و کاربردهای آنها می‌توان به برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۱)، برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۲) و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) مراجعه نمود.

تعریف ۲. (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱). فرض کنید $\{x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}\}$ و $\{y_{(1)}, \cdots, y_{(n)}\}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ و $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ باشند. بردار $\boldsymbol{x}$ به معنای بیشاندن[۲] کوچکتر از بردار $\boldsymbol{y}$ است ($\boldsymbol{x} \overset{m}{\preceq} \boldsymbol{y}$)، هرگاه

$$\sum_{j=1}^{n} x_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} y_{(j)}, \qquad \sum_{j=1}^{i} x_{(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} y_{(j)}, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

تعریف ۳. (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱). فرض کنید $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ و $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ دو بردار باشند. تابع حقیقی مقدار ϕ روی مجموعه $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ شُور–محدب[۳] نامیده می‌شود هرگاه

$$\mathbf{x} \overset{m}{\succeq} \mathbf{y} \Longrightarrow \phi(\mathbf{x}) \geq \phi(\mathbf{y}).$$

همچنین، تابع ϕ شُور–مقعر[۴] نامیده می‌شود هرگاه جهت نامساوی فوق، عوض شود.

فضاهای برداری تعریف شده زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{D}_n^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \cdots \geq x_n > \circ\}$$
$$\mathcal{E}_n^+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \circ < x_1 \leq \cdots \leq x_n\}.$$

لم ۱. *(الف)* (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱۸۳). فرض کنید تابع $\phi : \mathcal{D}_n^+ \to \mathbb{R}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ پیوسته و روی نقاط درونی $\mathcal{D}_n^+$ مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathcal{D}_n^+$ شُور– محدب است اگر و تنها اگر $\phi_{(k)}(\boldsymbol{x})$ روی نقاط درونی $\mathcal{D}_n^+$ تابعی نزولی در $k \in \{1, \cdots, n\}$ باشد که در آن $\phi_{(k)}(\boldsymbol{x}) = \partial\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_k$.

(ب) (کوندو و همکاران، ۲۰۱۶). فرض کنید تابع $\phi : \mathcal{E}_n^+ \to \mathbb{R}$ روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ پیوسته و روی نقاط درونی $\mathcal{E}_n^+$ مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ روی $\mathcal{E}_n^+$ شُور– محدب است اگر و تنها اگر $\phi_{(k)}(\boldsymbol{x})$ روی نقاط درونی $\mathcal{E}_n^+$ تابعی صعودی در $k \in \{1, \cdots, n\}$ باشد که در آن $\phi_{(k)}(\boldsymbol{x}) = \partial\phi(\boldsymbol{x})/\partial x_k$.

[۲] Majorization
[۳] Schur-convex
[۴] Schur-concave

تعریف ۴. بردار $\boldsymbol{x}$ به صورت بیشاندن نامرتب[۵] کوچکتر از بردار $\boldsymbol{y}$ است *($\boldsymbol{x} \overset{uo}{\preceq} \boldsymbol{y}$)*، هرگاه

$$\sum_{j=۱}^{n} x_j = \sum_{j=۱}^{n} y_j, \quad \sum_{j=۱}^{i} x_j \leq \sum_{j=۱}^{i} y_j \qquad i = ۱, \cdots, n-۱.$$

لم ۲. *(پارکر و رام، ۱۹۹۷)*. فرض کنید $J \subset \mathbb{R}_+^n$ و $\phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. در این صورت روی J رابطه زیر برقرار است:

$$\boldsymbol{x} \overset{uo}{\preceq} \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \phi(\boldsymbol{x}) \leq \phi(\boldsymbol{y})$$

اگر و فقط اگر $\phi_{(k)}(\boldsymbol{z}) = \partial\phi(\boldsymbol{z})/\partial z_k$ تابعی نزولی در $k \in \{۱, \cdots, n\}$ باشد.

اکنون فضای برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{D}_n = \{(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_۱ \geq \cdots \geq x_n\}$$
$$\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}} = \{(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\pi_۱} \geq \cdots \geq x_{\pi_n}\}$$
$$\mathcal{D}_n^{+\boldsymbol{\pi}} = \{(x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\pi_۱} \geq \cdots \geq x_{\pi_n} > ۰\}.$$

تعریف ۵. *(چینگ، ۱۹۷۷)*. دو بردار $\boldsymbol{u} = (u_۱, \cdots, u_n)$ و $\boldsymbol{v} = (v_۱, \cdots, v_n)$ را روی $\mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{p} = (p_۱, \cdots, p_n)$ یک بردار از مولفه‌های مثبت باشد. آنگاه $\boldsymbol{u}$ به صورت وزنی $\boldsymbol{v}$ روی $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ می‌بیشاند *($\boldsymbol{u} \succ_{\boldsymbol{p}}^{m} \boldsymbol{v}$ روی $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$)*، هرگاه اولاً

$$\sum_{i=۱}^{n} p_{\pi_i} u_{\pi_i} = \sum_{i=۱}^{n} p_{\pi_i} v_{\pi_i}$$

و ثانیاً به ازای $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ و $k = ۱, \cdots, n-۱$

$$\sum_{i=۱}^{k} p_{\pi_i} u_{\pi_i} \geq \sum_{i=۱}^{k} p_{\pi_i} v_{\pi_i}.$$

تابع $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید به گونه‌ای که به ازای $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}_+^n, \boldsymbol{\pi} \in P$

$$\phi(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{p}) = \phi(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\pi}}; \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\pi}}), \tag{۱}$$

و روی $\mathcal{D}_n$

$$\boldsymbol{u} \prec_{\boldsymbol{p}}^{m} \boldsymbol{v} \Rightarrow \phi(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{p}) \leq \phi(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{p}). \tag{۲}$$

[۵] Unordered majorization

اگر روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ رابطه $\boldsymbol{u} \prec_{\boldsymbol{p}}^{m} \boldsymbol{v}$ برقرار باشد، آنگاه روی فضای $\mathcal{D}_n$ داریم $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\pi}} \prec_{\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\pi}}}^{m} \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{\pi}}$ و از روابط (؟؟) و (؟؟) نتیجه می‌شود

$$\phi(\boldsymbol{u};\boldsymbol{p}) = \phi(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\pi}};\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\pi}}) \leq \phi(\boldsymbol{v}^{\boldsymbol{\pi}};\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{\pi}}) = \phi(\boldsymbol{u};\boldsymbol{p}).$$

بنابراین اگر ϕ پایای جایگشتی باشد (خاصیت (؟؟)) و بیشاندن وزنی را روی $\mathcal{D}_n$ حفظ کند، آنگاه به ازای همه $\boldsymbol{\pi} \in P$، بیشاندن وزنی روی $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ هم حفظ می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت توابع پایای جایگشتی، فقط روی فضای $\mathcal{D}_n$ بررسی می‌شوند.

نکته‌ای که باید متذکر گردید این است که ترتیب بیشاندن وزنی، بردارهایی را که به صورت مشابه، مرتب شده‌اند مقایسه می‌کند. وقتی که بردارها در جهت مخالف مرتب شده باشند، آنگاه یک کلاس از توابع وجود دارد که بیشاندن وزنی را حفظ نمی‌کنند (چینگ، ۱۹۷۷).

لم ۳. *(چینگ، ۱۹۷۷).* تابع مشتق‌پذیر $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ که در شرط *(؟؟)* صدق می‌کند را در نظر بگیرید. آنگاه *(؟؟)* برقرار است اگر و تنها اگر به ازای $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ و $i, j = ۱, \cdots, n$ نابرابری زیر برقرار باشد:

$$(u_i - u_j)\left(\frac{۱}{p_i}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial u_i} - \frac{۱}{p_j}\frac{\partial\phi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial u_j}\right) \geq ۰. \qquad (۳)$$

لم ۴. *(بالاکریشنان و همکاران، ۲۰۱۵).* تابع $\psi : (۰,\infty) \times (۰,۱) \to (۰,\infty)$ را به صورت

$$\psi(\alpha,t) = \frac{\alpha\,(۱-t)\,t^{\alpha-۱}}{۱-t^{\alpha}}, \qquad (۴)$$

در نظر بگیرید. آنگاه

(الف) به ازای $۰ < t < ۱$، تابع $\psi(\alpha,t)$ تابعی نزولی نسبت به α است.

(ب) به ازای $۰ < \alpha \leq ۱$، تابع $\psi(\alpha,t)$ تابعی نزولی نسبت به t است.

(ج) به ازای $\alpha \geq ۱$، تابع $\psi(\alpha,t)$ تابعی صعودی نسبت به t است.

لم ۵. *(بالاکریشنان و همکاران، ۲۰۱۵)* تابع $\phi : (۰,\infty) \times (۰,۱) \to (-\infty,۰)$ را به صورت

$$\phi(\alpha,t) = \frac{t^{\alpha}\,\ln t}{۱-t^{\alpha}},$$

در نظر بگیرید. آنگاه

(الف) به ازای $0 < t < 1$، تابع $\phi(\alpha, t)$ تابعی صعودی نسبت به α است.

(ب) به ازای $\alpha > 0$، تابع $\phi(\alpha, t)$ تابعی نزولی نسبت به t است.

۳ مقایسه تصادفی سیستم‌های سری

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. نتایج بیان شده در این بخش، حالت‌های خاص و ساده‌تری از نتایج فانگ و بالاکریشنان (۲۰۱۷) را با دیدگاه ساده‌تر و کاربردی‌تری بیان می‌کنند که محاسبات آن ساده‌تر است.

قضیه ۱. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha_i, \beta_i, \lambda) \quad , \quad Y_i \sim GLFR(\nu_i, \mu_i, \lambda) \quad i = 1, \cdots, n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ باشد، آنگاه برای $\lambda \geq 1$ داریم $X_{1:n} \geq_{st} Y_{1:n}$.

برهان. یک مجموعه از متغیرهای تصادفی واسطه $Z_1, \cdots, Z_n$ را در نظر بگیرید که در آن $Z_i \sim GLFR(\nu_i, \beta_i, \lambda)$ است. اثبات در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا تحت $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ نشان داده می‌شود $X_{1:n} \geq_{st} Z_{1:n}$ و سپس تحت $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ نامساوی تصادفی $Z_{1:n} \geq_{st} Y_{1:n}$ اثبات می‌گردد. سرانجام با ترکیب کردن دو نامساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله اول: فرض کنید روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ برقرار باشد. تابع بقای $X_{1:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{X_{1:n}}(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - (1 - e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)})^{\lambda}),$$

است. مشتق جزئی $\bar{F}_{X_{1:n}}(x)$ نسبت به α_i به صورت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{F}_{X_{1:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= -x\, \bar{F}_{X_{1:n}}(x)\, \frac{\lambda(1 - e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)})^{\lambda - 1}\, e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)}}{1 - (1 - e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)})^{\lambda}} \\
&= -x\, \bar{F}_{X_{1:n}}(x)\, \psi(\lambda, 1 - e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)}),
\end{aligned}$$

است، که در آن $\psi(\theta, t)$ در لم ؟؟ تعریف شده است. بنابراین برای $\lambda \geq ۱$ تابع $\psi(\lambda, ۱ - e^{-(\alpha\, x + \frac{\beta}{۲}\, x^۲)})$، تابعی صعودی از $۱ - e^{-(\alpha\, x + \frac{\beta}{۲}\, x^۲)}$ است. لذا رابطه

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= -x\, \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\, \psi(\lambda, ۱ - e^{-(\alpha_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)}) \\ &\leq -x\, \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\, \psi(\lambda, ۱ - e^{-(\alpha_{i+۱}\, x + \frac{\beta_{i+۱}}{۲}\, x^۲)}) \\ &= \frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \alpha_{i+۱}},\end{aligned}$$

برقرار است، که با استفاده از لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $Z_{۱:n} \geq_{st} X_{۱:n}$.

مرحله دوم: فرض کنید روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ برقرار باشد. بدین منظور، با فرض اینکه $Z_i \sim GLFR(\nu_i, \beta_i, \lambda)$ باشد تابع بقای $Z_{۱:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{Z_{۱:n}}(x) = \prod_{i=۱}^{n} (۱ - (۱ - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)})^{\lambda}),$$

است. مشتق جزئی $\bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)$ نسبت به β_i برابر

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)}{\partial \beta_i} &= \frac{-x^۲}{۲}\, \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)\, \frac{\lambda (۱ - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)})^{\lambda - ۱}\, e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)}}{۱ - (۱ - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)})^{\lambda}} \\ &= \frac{-x^۲}{۲}\, \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)\, \psi(\lambda, ۱ - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)}),\end{aligned}$$

است، که در آن $\psi(\theta, t)$ در لم ؟؟ تعریف شده است. چون برای $\lambda \geq ۱$، تابع $\psi(\lambda, ۱ - e^{-(\nu\, x + \frac{\beta}{۲}\, x^۲)})$، تابعی صعودی از $۱ - e^{-(\nu\, x + \frac{\beta}{۲}\, x^۲)}$ است بنابراین رابطه

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \beta_i} &= \frac{-x^۲}{۲}\, \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)\, \psi(\lambda, ۱ - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta_i}{۲}\, x^۲)}) \\ &\leq \frac{-x^۲}{۲}\, \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)\, \psi(\lambda, ۱ - e^{-(\nu_{i+۱}\, x + \frac{\beta_{i+۱}}{۲}\, x^۲)}) \\ &= \frac{\partial \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)}{\partial \beta_{i+۱}},\end{aligned}$$

برقرار است، که با استفاده از لم ؟؟ نتیجه می‌توان گرفت $Y_{۱:n} \geq_{st} Z_{۱:n}$.

قضیه ۲. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $Y_۱, \cdots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha_i, \beta, \lambda_i) \quad , \quad Y_i \sim GLFR(\nu_i, \beta, \gamma_i) \quad i = ۱, \cdots, n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $۱ - \boldsymbol{\gamma} \overset{m}{\succ} ۱ - \boldsymbol{\lambda}$ روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ باشد، آنگاه $X_{۱:n} \geq_{st} Y_{۱:n}$.

برهان. یک مجموعه از متغیرهای تصادفی واسطه $Z_{۱},\cdots,Z_n$ را در نظر بگیرید که در آن $Z_i\sim GLFR(\nu_i,\beta,\lambda_i)$ است. اثبات در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا تحت $\boldsymbol{\alpha}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\nu}$ نشان داده می‌شود $X_{۱:n}\geq_{st} Z_{۱:n}$ و سپس تحت $۱-\boldsymbol{\gamma}\overset{m}{\succ}۱-\boldsymbol{\lambda}$ به بررسی نامساوی تصادفی $Z_{۱:n}\geq_{st} Y_{۱:n}$. پرداخته می‌شود. سرانجام با ترکیب کردن دو نامساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله اول: فرض کنید روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\alpha}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\nu}$ برقرار باشد. تابع بقای $X_{۱:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{X_{۱:n}}(x) = \prod_{i=۱}^{n}(۱-(۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})^{\lambda_i}),$$

است. مشتق جزئی $\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)$ نسبت به α_i به صورت

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= -x\,\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\,\frac{\lambda_i(۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})^{\lambda_i-۱}\,e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})}}{۱-(۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})^{\lambda_i}}\\ &= -x\,\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\,\psi(\lambda_i,۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})}),\end{aligned}$$

است که در آن $\psi(\theta,t)$ در لم ؟؟ تعریف شده است. از لم ؟؟ نتیجه می‌شود برای هر مقدار ثابت $۱-e^{-(\alpha x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})}$، تابع $\psi(\lambda,۱-e^{-(\alpha x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})$ تابعی نزولی از λ است . همچنین، برای $\lambda\geq ۱$ تابع $\psi(\lambda,۱-e^{-(\alpha x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})$، تابعی صعودی از $۱-e^{-(\alpha x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})}$ است بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= -x\,\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\,\psi(\lambda_i,۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})\\ &\leq -x\,\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\,\psi(\lambda_{i+۱},۱-e^{-(\alpha_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})\\ &\leq -x\,\bar{F}_{X_{۱:n}}(x)\,\psi(\lambda_{i+۱},۱-e^{-(\alpha_{i+۱} x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})\\ &= \frac{\partial \bar{F}_{X_{۱:n}}(x)}{\partial \alpha_{i+۱}},\end{aligned}$$

که با استفاده از لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $X_{۱:n}\geq_{st} Z_{۱:n}$.

مرحله دوم: فرض کنید روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ رابطه $۱-\boldsymbol{\gamma}\overset{m}{\succ}۱-\boldsymbol{\lambda}$ برقرار باشد. با فرض اینکه $Z_i\sim GLFR(\nu_i,\beta,\lambda_i)$ باشد تابع بقای $Z_{۱:n}$ به صورت

$$\bar{F}_{Z_{۱:n}}(x) = \prod_{i=۱}^{n}(۱-(۱-e^{-(\nu_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})^{\eta_i+۱}),$$

است. مشتق جزئی $\bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)$ نسبت به η_i برابر

$$\frac{\partial \bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)}{\partial \eta_i} = -x\,\bar{F}_{Z_{۱:n}}(x)\,\frac{(۱-e^{-(\nu_i x+\frac{\beta_i}{۲}x^{۲})})^{\eta_i}\,\ln(۱-e^{-(\nu_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})}{۱-(۱-e^{-(\nu_i x+\frac{\beta}{۲}x^{۲})})^{\eta_i+۱}}$$

$$= \quad -x\,\bar{F}_{Z_{1:n}}(x)\,\phi(\eta_i, 1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}),$$

است که در آن $\phi(\theta,t)=t^{\theta}\,\ln t/(1-t^{\theta})$ در لم ؟؟ تعریف شده است. از لم ؟؟ نتیجه می‌شود برای هر مقدار ثابت $1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}$، تابع $\phi(\theta, 1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})$ تابعی صعودی از θ است. همچنین برای هر مقدار ثابت θ، تابع $\phi(\theta, 1-e^{-(\nu\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})$، تابعی نزولی از $1-e^{-(\nu\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}$ است. بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{Z_{1:n}}(x)}{\partial \eta_i} &= -x\,\bar{F}_{Z_{1:n}}(x)\,\phi(\eta_i, 1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})\\ &\geq -x\,\bar{F}_{Z_{1:n}}(x)\,\phi(\eta_{i+1}, 1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})\\ &\geq -x\,\bar{F}_{Z_{1:n}}(x)\,\phi(\eta_{i+1}, 1-e^{-(\nu_{i+1}\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})\\ &= \frac{\partial \bar{F}_{Z_{1:n}}(x)}{\partial \eta_{i+1}},\end{aligned}$$

و با استفاده از لم ؟؟ نتیجه می‌شود $Y_{1:n} \geq_{st} Z_{1:n}$.

قضیه ۳. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ و $Y_1,\cdots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha,\beta_i,\lambda_i), \quad Y_i \sim GLFR(\alpha,\mu_i,\gamma_i) \quad i=1,\cdots,n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\mu} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\beta}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $\mathbf{1}-\boldsymbol{\gamma} \overset{m}{\succ} \mathbf{1}-\boldsymbol{\lambda}$ روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ باشد، آنگاه $Y_{1:n} \geq_{st} X_{1:n}$.

برهان. این قضیه، مشابه قضایای ؟؟ و ؟؟ اثبات می‌شود.

۴ مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از مولفه‌های مستقل ناهمگن با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. نتایج بیان شده در این بخش، حالت‌های خاص و ساده‌تری از نتایج فانگ و بالاکریشنان (۲۰۱۷) را با دیدگاه ساده‌تر و کاربردی‌تری بیان می‌کنند که محاسبات آن ساده‌تر است.

قضیه ۴. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ و $Y_1,\cdots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha_i,\beta_i,\lambda) \quad , \quad Y_i \sim GLFR(\nu_i,\mu_i,\lambda) \quad i=1,\cdots,n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\nu} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\alpha}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $\boldsymbol{\mu} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\beta}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ باشد، آنگاه $X_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$.

برهان. یک مجموعه از متغیرهای تصادفی واسطه $Z_1, \cdots, Z_n$ را در نظر بگیرید که در آن $Z_i \sim GLFR(\nu_i, \beta_i, \lambda)$ است. اثبات را در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا تحت $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ نشان داده می‌شود $X_{n:n} \geq_{st} Z_{n:n}$ و سپس تحت $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ به بررسی نامساوی تصادفی $Z_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$ پرداخته می‌شود. سرانجام با ترکیب کردن دو نامساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله اول: فرض کنید روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\alpha} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\nu}$ برقرار باشد. تابع توزیع $X_{n:n}$ به صورت

$$F_{X_{n:n}}(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)})^{\lambda},$$

است. مشتق جزئی $F_{X_{n:n}}(x)$ نسبت به α_i به صورت

$$\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} = F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda, x}{e^{\,(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)} - 1},$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_i} &= F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda x}{e^{\,(\alpha_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)} - 1} \\
&\leq F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda x}{e^{\,(\alpha_{i+1} x + \frac{\beta_i}{2} x^2)} - 1} \quad (\alpha_i \geq \alpha_{i+1}) \\
&\leq F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda x}{e^{\,(\alpha_{i+1} x + \frac{\beta_{i+1}}{2} x^2)} - 1} \quad (\beta_i \geq \beta_{i+1}) \\
&= \frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial \alpha_{i+1}},
\end{aligned}$$

که با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $X_{n:n} \geq_{st} Z_{n:n}$.

مرحله دوم: فرض کنید در فضای $\mathcal{D}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ برقرار باشد. با فرض اینکه $Z_i \sim GLFR(\nu_i, \beta_i, \lambda)$ تابع توزیع $Z_{n:n}$ به صورت

$$F_{Z_{n:n}}(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-(\nu_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)})^{\lambda},$$

است. مشتق جزئی $F_{Z_{n:n}}(x)$ نسبت به β_i عبارت است از:

$$\frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial \beta_i} = F_{X_{n:n}}(x)\frac{\frac{1}{2}\lambda x^2}{e^{\,(\nu_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)} - 1}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial \beta_i} = F_{Z_{n:n}}(x)\frac{\frac{1}{2}\lambda x^2}{e^{\,(\nu_i x + \frac{\beta_i}{2} x^2)} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq F_{Z_{n:n}}(x)\frac{\frac{1}{2}\lambda\, x^{2}}{e^{\,(\nu_{i+1}\,x+\frac{\beta_i}{2}\,x^{2})}-1}\\
&\leq F_{Z_{n:n}}(x)\frac{\frac{1}{2}\lambda\, x^{2}}{e^{\,(\nu_{i+1}\,x+\frac{\beta_{i+1}}{2}\,x^{2})}-1}\\
&= \frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial\beta_{i+1}},
\end{aligned}$$

، با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $Z_{n:n}\geq_{st} Y_{n:n}$.

قضیه ۵. فرض کنید $X_1,\cdots,X_n$ و $Y_1,\cdots,Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i\sim GLFR(\alpha_i,\beta,\lambda_i),\quad Y_i\sim GLFR(\nu_i,\beta,\gamma_i)\quad i=1,\cdots,n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\alpha}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\nu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $\boldsymbol{\lambda}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\gamma}$ روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ باشد، آنگاه $X_{n:n}\geq_{st} Y_{n:n}$.

برهان. یک مجموعه از متغیرهای تصادفی واسطه $Z_1,\cdots,Z_n$ را در نظر بگیرید که در آن $Z_i\sim GLFR(\nu_i,\beta,\lambda_i)$ است. اثبات را در دو مرحله انجام می‌پذیرد. ابتدا تحت $\boldsymbol{\alpha}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\nu}$ نشان داده می‌شود $X_{n:n}\geq_{st} Z_{n:n}$ و سپس تحت $\boldsymbol{\lambda}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\gamma}$ به بررسی $Z_{n:n}\geq_{st} Y_{n:n}$ پرداخته می‌شود. سرانجام با ترکیب کردن دو نامساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله اول: فرض کنید روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\lambda}\overset{m}{\succ}\boldsymbol{\gamma}$ برقرار باشد. تابع توزیع $X_{n:n}$ به صورت

$$F_{X_{n:n}}(x)\;=\;\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^{2})})^{\lambda_i},$$

است. مشتق جزئی $F_{X_{n:n}}(x)$ نسبت به α_i عبارت از:

$$\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial\alpha_i}=F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda_i\,x}{e^{\,(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^{2})}-1}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial\alpha_i} &= F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda_i\,x}{e^{\,(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^{2})}-1}\\
&\leq F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda_{i+1}\,x}{e^{\,(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^{2})}-1}\quad(\lambda_i\leq\lambda_{i+1})\\
&\leq F_{X_{n:n}}(x)\frac{\lambda_{i+1}\,x}{e^{\,(\nu_{i+1}\,x+\frac{\beta_{i+1}}{2}\,x^{2})}-1}\quad(\alpha_i\geq\alpha_{i+1})\\
&= \frac{\partial F_{X_{n:n}}(x)}{\partial\alpha_{i+1}},
\end{aligned}$$

و با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $X_{n:n} \geq_{st} Z_{n:n}$.

مرحله دوم: فرض کنید روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ رابطه $\boldsymbol{\lambda} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\gamma}$ برقرار باشد. با فرض اینکه $Z_i \sim GLFR(\nu_i, \beta, \lambda_i)$ باشد تابع توزیع $Z_{n:n}$ به صورت

$$F_{Z_{n:n}}(x) = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-(\nu_i\, x + \frac{\beta}{2}\, x^2)})^{\lambda_i},$$

است. مشتق جزئی $F_{X_{n:n}}(x)$ نسبت به λ_i عبارت است از:

$$\frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial \lambda_i} = F_{Z_{n:n}}(x)\, \ln(1 - e^{\,-(\nu_i\, x + \frac{\beta}{2}\, x^2)}).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial \lambda_i} &= F_{Z_{n:n}}(x)\, \ln(1 - e^{\,-(\nu_i\, x + \frac{\beta}{2}\, x^2)}) \\ &\geq F_{Z_{n:n}}(x)\, \ln(1 - e^{\,-(\nu_{i+1}\, x + \frac{\beta}{2}\, x^2)}) \quad (\nu_i \geq \nu_{i+1}) \\ &= \frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x)}{\partial \lambda_{i+1}}. \end{aligned}$$

و با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $Z_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$.

قضیه ۶. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha, \beta_i, \lambda_i) \quad , \quad Y_i \sim GLFR(\alpha, \mu_i, \gamma_i) \quad i = 1, \cdots, n,$$

باشند. اگر $\boldsymbol{\beta} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\mu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ و $\boldsymbol{\lambda} \overset{m}{\succ} \boldsymbol{\gamma}$ روی فضای $\mathcal{E}_n^+$ باشد، آنگاه $X_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$.

برهان. این قضیه، مشابه قضایای ؟؟ و ؟؟ اثبات می‌شود.

قضیه ۷. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ و $Y_1, \cdots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha_i, \beta, \lambda_i) \quad , \quad Y_i \sim GLFR(\nu_i, \beta, \gamma_i) \quad i = 1, \cdots, n,$$

باشند. اگر روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ رابطه $\boldsymbol{\nu} \succ^{m}_{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)} \boldsymbol{\alpha}$ برقرار باشد، آنگاه

$$\boldsymbol{\gamma} \overset{uo}{\succ} \boldsymbol{\lambda} \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}.$$

برهان. یک مجموعه از متغیرهای تصادفی واسطه $Z_1,\cdots,Z_n$ را در نظر بگیرید که در آن $Z_i \sim GLFR(\nu_i,\beta,\lambda_i)$ است. اثبات را در دو مرحله انجام می‌شود. ابتدا تحت $\boldsymbol{\alpha} \succ^m_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \boldsymbol{\nu}$ نشان داده می‌شود $X_{n:n} \geq_{st} Z_{n:n}$ و سپس تحت $\boldsymbol{\lambda} \overset{uo}{\succ} \boldsymbol{\gamma}$ به بررسی $Z_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$ پرداخته می‌شود. سرانجام با ترکیب کردن دو نامساوی فوق، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مرحله اول: فرض کنید روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ رابطه $\boldsymbol{\alpha} \succ^m_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)} \boldsymbol{\nu}$ برقرار باشد. تابع توزیع $X_{n:n}$ به صورت

$$F_{X_{n:n}}(x;\alpha,\lambda) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})^{\lambda_i},$$

است. واضح است که

$$F_{X_{n:n}}(x;\alpha,\lambda) = F_{X_{n:n}}(x;\alpha^{\boldsymbol{\pi}},\lambda^{\boldsymbol{\pi}}), \qquad \boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^{+n}\,,\ \boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^{+n}\,,\ \boldsymbol{\pi}\in P.$$

مشتق جزئی $F_{X_{n:n}}(x)$ نسبت به α_i عبارت است از:

$$\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \alpha_i} = F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\frac{\lambda_i\,x}{e^{\,(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}-1}.$$

اکنون شرط (؟؟) بررسی می‌شود. بدین منظور

$$\begin{aligned} I &= (\alpha_i-\alpha_j)\Big(\frac{1}{\lambda_i}\,\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{\lambda_j}\,\frac{\partial F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\alpha_j}\Big)\\ &= (\alpha_i-\alpha_j)\,x\,F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\lambda})\,\Big(\frac{1}{e^{\,(\alpha_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}-1}-\frac{1}{e^{\,(\alpha_j\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}-1}\Big)\\ &\leq 0, \end{aligned}$$

، با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $X_{n:n} \geq_{st} Z_{n:n}$.

مرحله دوم: فرض کنید رابطه $\boldsymbol{\lambda} \overset{uo}{\succ} \gamma$ برقرار باشد. با فرض اینکه $Z_i \sim GLFR(\nu_i,\beta,\lambda_i)$ باشد تابع توزیع $Z_{n:n}$ به صورت

$$F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)})^{\lambda_i},$$

است. مشتق جزئی $F_{X_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda})$ نسبت به λ_i عبارت است از:

$$\frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i} = F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda})\,\ln(1-e^{\,-(\nu_i\,x+\frac{\beta}{2}\,x^2)}).$$

چون $\boldsymbol{\nu}$ روی فضای $\mathcal{D}_n^+$ تعریف شده است بنابراین $\nu_i \geq \nu_{i+۱}$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_i} &= F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}) \ln(۱ - e^{-(\nu_i x + \frac{\beta}{۲} x^۲)}) \\ &\geq F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda}) \ln(۱ - e^{-(\nu_{i+۱} x + \frac{\beta}{۲} x^۲)}) \quad (\nu_i \geq \nu_{i+۱}) \\ &= \frac{\partial F_{Z_{n:n}}(x;\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_{i+۱}}.\end{aligned}$$

و با توجه به لم ؟؟ می‌توان نتیجه گرفت $Z_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}$.

مثال ۱. فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ و $Y_۱, Y_۲, Y_۳$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha_i, \beta, \lambda_i), \quad Y_i \sim GLFR(\nu_i, \beta, \gamma_i) \quad i = ۱, ۲, ۳$$

باشند. قرار دهید:

$$\boldsymbol{\lambda} = (۱, ۲, ۳), \quad \gamma = (۲, ۲/۵, ۱/۵), \quad \boldsymbol{\alpha} = (۲, ۳, ۴), \quad \boldsymbol{\nu} = (۱, ۲, ۵)$$

واضح است $\boldsymbol{\lambda} \overset{uo}{\succ} \gamma$ و اگر $\pi = (۱, ۲, ۳)$ یک جایگشت از اعداد $\{۱, ۲, ۳\}$ باشد، آنگاه روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ رابطه $\boldsymbol{\nu} \succ^m_{(\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳)} \boldsymbol{\alpha}$ برقرار است. بنابراین طبق قضیه ؟؟ نتیجه می‌شود $X_{۳:۳} \geq_{st} Y_{۳:۳}$.

قضیه ۸. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $Y_۱, \cdots, Y_n$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل با

$$X_i \sim GLFR(\alpha, \beta_i, \lambda_i), \quad Y_i \sim GLFR(\alpha, \mu_i, \gamma_i) \quad i = ۱, \cdots, n,$$

باشند. اگر روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$ رابطه $\boldsymbol{\mu} \succ^m_{(\lambda_۱, \cdots, \lambda_n)} \boldsymbol{\beta}$ برقرار باشد، آنگاه

$$\gamma \overset{uo}{\succ} \boldsymbol{\lambda} \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{st} Y_{n:n}.$$

برهان. این قضیه، مشابه قضیه ؟؟ اثبات می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های ناهمگن مستقل با توزیع نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته می‌پردازد. ابتدا یک سیستم سری با پارامترهای متفاوت در نظر گرفته می‌شود و

با استفاده از مقایسه‌های جداگانه پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی بین این سیستم‌ها حاصل می‌شود. سپس با استفاده از مقایسه‌های جداگانه پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی بین سیستم‌های موازی حاصل می‌شود. همچنین با استفاده از بیشاندن نامرتب و بیشاندن وزنی روی فضای $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$، ترتیب تصادفی معمولی بین این سیستم‌ها بررسی شده است. نتایج اثبات شده در این مقاله، حالت‌های خاص و ساده‌تری از نتایج فانگ و بالاکریشنان (۲۰۱۷) را با دیدگاه ساده‌تر و کاربردی‌تری بیان می‌کنند که محاسبات آن ساده‌تر است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شده است کمال قدردانی و تشکر فراوان را دارند. این تحقیق با حمایت مالی دانشگاه زابل انجام شده است. شماره گرنت: $UOZ - GR -$ ۹۵۱۷ $-$ ۶۱.

مراجع

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. (۱۳۹۲)، نتایجی جدید در مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-$ ۱$)$ از n، مجله علوم آماری، ۷، ۲۵-۴۴.

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. عبداله‌زاده، م. (۱۳۹۱)، مقایسه تصادفی فواصل نمونه‌ایی آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی، مجله علوم آماری، ۷، ۵-۳۹.

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۱۸۹-۲۰۶.

Balakrishnan, N., Haidari, A. and Masoumifard, K. (2015), Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Generalized Exponential Components, *IEEE Transactions on Reliability,* **64**, 333-348.

Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013), Hazard Rate Comparison of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components, *Journal of Multivariate Analysis*, **113**, 153-160.

Barmalzan, G., Payandeh Najafabadi, A. T. and Balakrishnan, N. (2017), Orderings for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull-Geometric Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9869-9880

Cheng, K. W. (1977), *Majorization: its extensions and preservation theorems*, Tech. Rep. No. 121. Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA.

Fang, L. and Balakrishnan, N. (2017), Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Generalized Linear Failure Rate Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* Published Online.

Fang, L. and Zhang, X. (2013), Stochastic Comparison of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components. *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

Khaledi, B. E. and Kochar, S.C. (2006), Weibull Distribution: Some Stochastic Comparisons Results, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3121-3129.

Kochar, S. C. and Xu, M. (2007a), Some Recent Results on Stochastic Comparisons and Dependence Among Order Statistics in the case of PHR Model, *Journal of the Iranian Statistical Society*, **6**, 125-140.

Kochar, S. C. and Xu, M. (2007b), Stochastic Comparisons of Parallel Systems when Components Have Proportional Hazard Rates, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 597-609.

Kundu, A., Chowdhury, S., Nanda, A. and Hazra, N. (2016), Some Results on Majorization and Their Applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **301**, 161-177.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications*, Second edition, Springer, Verlag, New York.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, New York.

Parker, D. S. and Ram, P. (1977), *Greed and majorization,* Tech. Report, Department of Computer Science, University of California, Los Angeles.

Sarhan, A. and Kundu, D. (2009), Generalized Linear Failure Rate Distribution, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **38**, 642-660.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011), New Results on Comparisons of Parallel Systems with Heterogeneous Gamma Components, *Statistics and Probability Letters*, **81**, 36-44.

Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Independent and Heterogeneous Components under the Generalized Linear Failure Rate

Barmalzan, G. Haidari, A

Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Abstract: This paper examines the problem of stochastic comparisons of series and parallel systems with independent and heterogeneous components generalized linear failure rate. First, we consider two series system with possibly different parameters and obtain the usual stochastic order between the series systems. Next, we drive the usual stochastic order between parallel systems. We also discuss the usual stochastic order between parallel systems by using the unordered majorization and the weighted majorization order between the parameters on the $\mathcal{D}_n^{\boldsymbol{\pi}}$.

Keywords: Generalized Linear Failure Rate Distribution, Order Statistics, Unordered Majorization, Usual Stochastic Order, Weighted Majorization.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.