

تعیین تابع عضویت بهینه بیزی فازی با استفاده از داده‌های فازی

شادی سعیدی جیبری، محمدرضا زادکرمی، غلامعلی پرهام

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۲۵

چکیده: در این مقاله برآورد بیزی فازی برای داده‌های فازی، ابتدا بر پایه توزیع پیشین احتمالی، سپس بر پایه مدل امکانی و توزیع پیشین امکانی به دست آورده می‌شود. با توجه به تأثیر تابع‌های عضویت بر برآورد بیزی فازی و امکانی، تابع عضویتی که برآورد بیزی فازی و امکانی بهینه را نتیجه می‌دهد برای داده‌ها معرفی می‌شود. با استفاده از داده‌های فازی نرمال و نمایی بهینگی تابع عضویت مثلثی-گوسی جدید معرفی شده برای داده‌های مطرح شده نشان داده می‌شود. واژه‌های کلیدی: تابع عضویت، تابع عضویت مثلثی-گوسی، ریسک بیز پسین، برآورد بیزی فازی، برآورد بیزی امکانی.

۱ مقدمه

استنباط بیزی بستگی به مدل آماری $f(x|\theta)$ ، تابع پیشین $\pi(\theta)$ و داده‌های مرتبط با متغیر تصادفی X دارد. اما گاهی اطلاع درباره θ مبهم است یا داده‌های موجود به صورت نادقیق مشاهده یا گزارش شده‌اند. در این موارد باید از روش‌های فازی استفاده کرد. داده‌های فازی براساس یک تابع عضویت ساخته می‌شوند. تعریف تابع عضویت بسیار مهم است زیرا تمام اطلاعات یک داده فازی توسط تابع عضویت آن مشخص می‌شود. در نتیجه ساختار ریاضی تابع عضویت در استنباط آماری مؤثر خواهد بود.

مجموعه‌های فازی اولین بار توسط لطفی‌زاده (۱۹۶۵) معرفی شده است. ارزیابی تابع عضویت یکی از مسائل بسیار مهم در آمار فازی است و در علوم مختلف معیاری برای تعیین تابع عضویت بهینه انتخاب

می‌شود. به عنوان مثال، پیش‌بینی سطح آب‌های زیرزمینی (میلواگان و نادبو، ۲۰۱۱)، ارزیابی پیش‌بینی سرعت باد (جوادی و حجتی نیا، ۲۰۱۲)، پیش‌بینی داده‌های سری زمانی (مندل و چودری، ۲۰۱۲) و در کنترل کننده‌های فازی برای کنترل موتور (ژائو و بوس، ۲۰۰۲) معیاری برای ارزیابی و مقایسه تابع‌های عضویت معرفی شده‌اند. پرکاربردترین تابع‌های عضویت، تابع عضویت مثلثی (میلواگان و نادبو، ۲۰۱۱)، تابع عضویت دوزنقه‌ای (ژائو و بوس، ۲۰۰۲) و تابع عضویت گاوسی (موهار و دیوگان، ۲۰۱۵؛ لی، ۲۰۰۸) هستند. پرینسی و دناکاران (۲۰۱۶) در تشخیص بیماری دریافتند که تابع عضویت دوزنقه‌ای بهتر از تابع عضویت مثلثی است. در مطالعه میلواگان و نادبو (۲۰۱۱) تابع عضویت گاوسی بهتر از دیگر تابع‌های عضویت نتیجه می‌داد. جوادی و حجتی نیا (۲۰۱۲) نشان دادند که تابع عضویت گاوسی بهتر از مثلثی و دوزنقه‌ای است. پرنبسکی و ستراسزکا (۲۰۱۶) با استفاده از پنج مجموعه داده پزشکی دریافتند که تابع‌های عضویت گاوسی و مثلثی بهتر از دیگر تابع‌های عضویت در برازش داده‌ها هستند. در سال‌های اخیر روش‌های استنباط آماری برای مشاهدات فازی توسط محققین زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است (چن، ۱۹۹۵؛ دوبویس، ۲۰۰۶؛ ویرتل، ۲۰۰۸، ۲۰۱۱). لطفی‌زاده (۱۹۶۸) و دوبویس (۲۰۰۶) استنباط آماری با استفاده از اندازه امکان را مورد بررسی قرار دادند. استنباط بیزی نیز با استفاده از داده‌های فازی مورد توجه آماردانان قرار گرفته است (عارفی و طاهری، ۲۰۱۶). قاعده تصمیم بیز فازی براساس تابع زیان در محیط فازی توسط اوکودا و همکاران (۱۹۷۸) و تاناکا و همکاران (۱۹۷۹) فرمول‌بندی شده است و تصمیم آماری برای حالتی که داده‌های موجود فازی هستند توسط گیل و همکاران (۱۹۸۵) تعمیم یافته است. لاپوینت و بویی (۲۰۰۰) توزیع پسین امکانی تحت داده‌های فازی را براساس یک مدل امکانی برای مشاهدات و یک توزیع پیشین امکانی برای پارامتر مورد نظر تعریف نموده‌اند. چاچی و حسامیان (۱۳۹۴) مدل‌بندی داده‌های فازی با رگرسیون اسپلاین تطبیقی چندگانه را ارائه دادند.

در این مقاله تأثیر تابع‌های عضویت پرکاربرد و تابع‌های عضویتی که براساس ترکیب گاوسی با مثلثی یا دوزنقه‌ای به‌دست آمده‌اند بر برآورد بیزی براساس مقدار ریسک بیز پسین آن‌ها مقایسه می‌شوند. برآورد بیزی بهینه از مینیم کردن ریسک بیز پسین به‌دست می‌آید. در بخش ۲ مفاهیم ضروری فازی، توزیع پسین فازی و برآورد بیز فازی، توزیع پسین امکانی و برآورد بیز امکانی تعریف می‌شود. در بخش ۳ با استفاده از داده‌های واقعی فازی تأثیر تابع‌های عضویت دوزنقه‌ای، گاوسی، مثلثی، دوزنقه‌ای-گاوسی و مثلثی-گاوسی بر مقدار ریسک بیز پسین برآوردهای بیز فازی بررسی و تابع عضویت بهینه بیزی در بین تابع‌های عضویت مطرح شده مشخص می‌شود. همچنین تأثیر این تابع‌های عضویت بر مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیزی امکانی محاسبه و تابع عضویت بهینه بیزی انتخاب می‌شود. بخش ۴ شامل نتیجه‌گیری است.

۲ مفاهیم اولیه

اعداد فازی زیرمجموعه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند که به صورت مجموعه فازی ارائه و به وسیله یک تابع عضویت مشخص می‌شوند. فرض کنید X مجموعه مرجع باشد.

تعریف ۱: تابعی که به هر عضو x از X ، عددی از بازه $[0, 1]$ را نسبت دهد تابع عضویت نامیده و به صورت $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲: مجموعه عناصری از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A دستکم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش A (مجموعه تراز α وابسته به A) نامیده می‌شوند و با A_α نشان داده می‌شوند (طاهری و ماشین‌چی، ۱۳۹۴)، یعنی $A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$.

تعریف ۳: مجموعه فازی \tilde{A} از R (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گویند اگر الف) نرمال و تک‌نمایی باشد، یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in R$ وجود داشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$.
ب) α -برش‌های \tilde{A} ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند (طاهری و ماشین‌چی، ۱۳۹۴).
تابع‌های عضویت مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است که از مهمترین آنها می‌توان به تابع عضویت دوزنقه‌ای، گاوسی، مثلثی، دوزنقه‌ای-گاوسی و مثلثی-گاوسی اشاره کرد.

تعریف ۴: تابع عضویت گاوسی با دو پارامتر (a, σ^2) به صورت $gsn(x : a, \sigma) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ تعریف می‌شود (ژائو و بوس، ۲۰۰۲).

تعریف ۵: فرض کنید در یک مجموعه فازی بیشتر از یک عضو دارای مقدار عضویت یک باشند. در این صورت، تابع عضویت دوزنقه‌ای با چهار عدد حقیقی به صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x \leq d \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

معرفی می‌شود (ژائو و بوس، ۲۰۰۲).

تعریف ۶: تابع عضویت مثلثی بوسیله سه عدد حقیقی که به صورت (a, b, c) بیان می‌شود به صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b \leq x \leq c \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان داده می‌شود که در آن a و c به ترتیب گستره چپ و گستره راست و b مرکز عدد فازی نامیده می‌شود (ژائو و بوس، ۲۰۰۲).

لی و گان (۲۰۱۶) تابع عضویتی برای داده‌های نرمال تعریف کردند که تعمیمی از تابع عضویت دوزنقه‌ای بود و با استفاده از تابع چگالی نرمال ساخته شده است، که آن را دوزنقه‌ای-گاوسی نام‌گذاری کرده‌اند.

تعریف ۷: تابع عضویت دوزنقه‌ای-گاوسی تابع عضویتی است که با دو پارامتر (μ, σ) به صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-\mu+\sigma}{\sigma}\right)^2 & \mu - \sigma < x < \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\ 1 & \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \leq x \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \\ \left(\frac{\mu+\sigma-x}{\sigma}\right)^2 & \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} < x < \mu + \sigma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نشان داده می‌شود (لی و گان، ۲۰۱۶).

اکنون با استفاده از تابع چگالی نرمال تابع عضویتی که تعمیمی از تابع عضویت مثلثی است تعریف می‌شود.

تعریف ۸: تابع عضویت مثلثی-گاوسی با دو پارامتر μ (که مرکز عدد فازی را نشان می‌دهد) و σ به صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-\mu+\sigma}{\sigma}\right)^2 & \mu - \sigma < x \leq \mu \\ \left(\frac{\mu+\sigma-x}{\sigma}\right)^2 & \mu \leq x < \mu + \sigma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف می‌شود.

۱.۲ توزیع پسین فازی براساس تابع پیشین احتمالی

تعریف ۹: فضای نمونه‌ای فازی مرتبط با X ، که با \tilde{X} نشان داده می‌شود، افزای فازی از X توسط پیشامدهای فازی است، یعنی ردهای از زیرمجموعه‌های فازی \tilde{X}_i ، $i = 1, \dots, k$ از X که توابع عضویت آن‌ها در شرط تعامد صدق کنند، یعنی $x \in X$ ، $\sum_{i=1}^k \tilde{X}_i(x) = 1$ ، (طاهری و ماشین چی، ۱۳۹۴).

تعریف ۱۰: نمونه فازی $\tilde{X} = (\tilde{X}_{r_1}, \dots, \tilde{X}_{r_n})$ به حجم n از فضای نمونه‌ای \tilde{X} نمونه‌ای تصادفی است، که در آن $\tilde{X}_{r_i} \in \tilde{X}$ ، $i = 1, \dots, n$. تابع درست‌نمایی θ براساس نمونه تصادفی فازی \tilde{X} به صورت

$$\ell(\theta; \tilde{X}) = p(\tilde{X}|\theta) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} [(\prod_{i=1}^n \tilde{X}_i(x_i))\ell(\theta; \underline{x})] dx_1 \dots dx_n & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ پیوسته باشد} \\ \sum_{x_1} \dots \sum_{x_n} [(\prod_{i=1}^n \tilde{X}_i(x_i))\ell(\theta; \underline{x})] & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ گسسته باشد} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{X}_i(x_i)f(x_i|\theta)] dx_i & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ پیوسته باشد} \\ \prod_{i=1}^n \sum_{x_i} [\tilde{X}_i(x_i)f(x_i|\theta)] & \text{اگر } f(\cdot|\theta) \text{ گسسته باشد} \end{cases} \quad (1)$$

به دست می‌آید، که در آن $\ell(\theta; \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$ (عارفی و همکاران، ۲۰۱۰).

تعریف ۱۱: فرض کنید $p_X(x|\theta)$ یک تابع احتمال باشد که در آن θ دارای توزیع پیشین $\pi(\theta)$ است. توزیع پسین θ بر پایه داده‌های فازی \tilde{X} به صورت

$$\pi(\theta|\tilde{X}) = \frac{p(\tilde{X}|\theta)\pi(\theta)}{p(\tilde{X})} \quad (2)$$

تعریف می‌شود، که در آن $p(\tilde{X}|\theta)$ تابع چگالی \tilde{X} و $p(\tilde{X})$ تابع چگالی حاشیه‌ای X است (طاهری و ماشین چی، ۱۳۹۴).

۲.۲ برآورد بیزی فازی

برآورد بیزی فازی بر پایه داده‌های فازی عبارت است از یافتن یک برآوردگر d_f از فضای برآوردگرهای فازی D_f برای پارامتر θ براساس نمونه تصادفی فازی \tilde{X} ، و توزیع پیشین $\pi(\theta)$ تحت تابع زیان $L(\theta, d_f)$ است.

تعریف ۱۲: تابع ریسک بیز پسین برآوردگر فازی d_f برابر

$$r(\pi, d_f) = E_{\theta|\tilde{X}}(L(\theta, d_f(\tilde{X}))) = \int_{\theta} L(\theta, d_f(\tilde{X}))\pi(\theta|\tilde{X})d\theta, \quad (۳)$$

است (طاهری و ماشین چی، ۱۳۹۴).

تعریف ۱۳: برآورد d_f^B براساس تابع زیان $L(\theta, d)$ و توزیع پسین فازی با داده‌های فازی $\pi(\theta|\tilde{X})$ یک برآورد بیزی فازی نامیده می‌شود اگر تابع ریسک بیز پسین فازی را مینیمم کند یعنی

$$r(\pi, d_f^B) = \min_{d_f \in D_f} r(\pi, d_f).$$

۳.۲ توزیع پسین امکانی برای داده‌های فازی

تعریف ۱۴: نمونه تصادفی فازی $\tilde{X} = \{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n\}$ با تابع درست‌نمایی $\ell(\theta; \tilde{X})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که پارامتر θ از یک توزیع پیشین امکانی $\pi^*(\theta)$ پیروی می‌کند. توزیع پسین امکانی تحت T -نرم $T(a, b)$ به صورت

$$\pi^*(\theta|\tilde{X}) = \frac{T(\ell(\theta; \tilde{X}), \pi^*(\theta))}{m(\tilde{X})}, \quad (۴)$$

تعریف می‌شود، که در آن $m(\tilde{X}) = \sup_{\theta} \{T(\ell(\theta; \tilde{X}), \pi^*(\theta))\}$ تابع چگالی حاشیه‌ای \tilde{X} است (عارفی و همکاران، ۲۰۱۰).

۴.۲ برآوردگر بیز امکانی

تعریف ۱۵: تابع ریسک بیز پسین برای داده‌های فازی \tilde{X} برای برآوردگر $d(\tilde{X})$ تحت تابع چگالی احتمال $f(x|\theta)$ و توزیع پیشین امکانی $\pi^*(\theta)$ براساس تابع زیان $L(\theta, d)$ به صورت

$$r(\pi^*(\theta|\tilde{X}), d) = \sup_{\theta \in \Theta} \{L(\theta, d) \cdot \pi^*(\theta|\tilde{X})\} \quad (۵)$$

تعریف می‌شود (عارفی و همکاران، ۲۰۱۰).

تعریف ۱۶: برآوردگر d^{PB} براساس تابع زیان $L(\theta, d)$ و توزیع پسین امکانی با داده‌های فازی، $\pi^*(\theta|\tilde{X})$ ، یک برآوردگر بیزی امکانی نامیده می‌شود اگر رابطه

$$r(\pi^*(\theta|\tilde{X}), d^{PB}) = \min_{d \in D} r(\pi^*(\theta|\tilde{X}), d)$$

برقرار باشد که در آن D مجموعه همه برآوردگرها برای θ است.

متأسفانه تابع ریسک بیز پسین فرم بسته‌ای ندارد، اما برآورد بیز امکانی عددی محاسبه می‌شود که باید از نرم افزارهای آماری استفاده کرد. با توجه به تعریف‌های ۱۱ و ۱۴ و روابط (۳) و (۵) تابع عضویت به شکل تابع پسین فازی یا امکانی و در نتیجه بر تابع ریسک بیز پسین فازی (امکانی) مؤثر است. بنابراین برآوردگر بیزی تحت تأثیر تابع عضویت تغییر می‌کند.

تعریف ۱۷: تابع عضویت بهینه بیزی در کلاس توابع عضویت مجموعه C ، تابع عضویتی است که ریسک بیز پسین فازی (امکانی) برآوردگر بیزی آن نسبت به ریسک بیز پسین فازی (امکانی) برآوردگرهای بیزی تمام توابع عضویت عضو کلاس C کمتر باشد.

۳ تأثیر تابع عضویت بر برآورد بیز فازی

در این بخش دو مجموعه داده که بترتیب از توزیع‌های نرمال نمایی بدست آمده‌اند مورد بررسی قرار می‌گیرند. هر دو مجموعه داده‌ها با تابع عضویت بهینه بیزی مشخص می‌شوند.

۱.۳ داده‌های فازی نرمال با تابع پیشین نرمال احتمالی

برای داده‌های فازی نرمال یک پیشین نرمال در نظر گرفته می‌شود. تابع درستنمایی با توجه به (۱) به صورت

$$\ell(\theta; \tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} dt_1 \dots dt_n \quad (۶)$$

است و اگر تابع درستنمایی حاصل در (۲) قرار داده شود تابع درستنمایی فازی داده‌های نرمال برابر

$$\pi(\theta|\tilde{X}) = \frac{\pi(\theta) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} dt_1 \dots dt_n}{p(\tilde{X})} \quad (۷)$$

خواهد بود، که در آن

$$p(\tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} \pi(\theta) dt_1 \dots dt_n d\theta \quad (۸)$$

و بر پایه تابع پسین فازی به دست آورده شده و تابع زیان توان دوم خطا، با مینیمم کردن تابع ریسک بیز پسین

$$r(\pi, d_f) = E_{\theta|\tilde{X}}[L(\theta, d_f(\tilde{X}))] = \int_{\theta} L(\theta, d_f(\tilde{X})) \pi(\theta|\tilde{X}) d\theta \quad (۹)$$

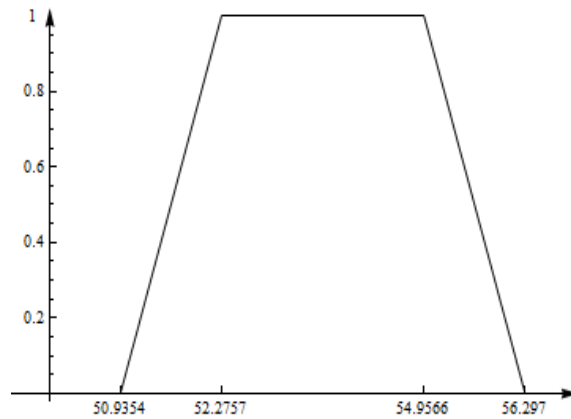
برآوردگر بیز فازی محاسبه می‌شود. بنابر (۶) تا (۹) تابع عضویت بر تابع درستنمایی فازی و در نتیجه بر تابع پسین فازی و تابع ریسک بیز پسین فازی مؤثر است. هرچه مقدار مساحت زیر تابع عضویت برای هر مشاهده فازی کمتر باشد، تابع ریسک پسین تحت تابع زیان توان دوم خطا با توجه به (۸) کمتر می‌شود و برآوردگر بیزی فازی بهینه به دست می‌آید. مجموعه داده‌های اول یک نمونه تصادفی ۵۰ تایی از نمره آزمون ورزشکاران است (لی و گان، ۲۰۱۶). نمره آزمون ورزشکاران از توزیع نرمال با میانگین θ و واریانس ۱۰۰ پیروی می‌کنند (جدول ۱). با در نظر گرفتن تابع پیشین احتمالی

$$\frac{1}{\sqrt{128}} e^{-\frac{1}{128}(\theta-70)^2} \quad (۱۰)$$

برای بررسی تأثیر تابع عضویت بر برآورد بیزی فازی با تابع زیان توان دوم خطا، ابتدا تابع عضویت دوزنقه‌ای

$$\tilde{X}_i(t) = \begin{cases} \frac{t-x_i+s_i}{\frac{s_i}{\gamma}} & x_i - s_i < t < x_i - \frac{s_i}{\gamma} \\ 1 & x_i - \frac{s_i}{\gamma} \leq t \leq x_i + \frac{s_i}{\gamma} \\ \frac{x_i+s_i-t}{\frac{s_i}{\gamma}} & x_i + \frac{s_i}{\gamma} < t < x_i + s_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید به طوری که $s_i = 0.05x_i, i = 1, \dots, 5$ باشد. به عنوان مثال، تابع عضویت برای مشاهده ۵۳/۶۱۶۲ در شکل ۱ نمایش داده شده است. تابع درستنمایی فازی برای داده‌های فازی به



شکل ۱: نمودار تابع عضویت دوزنقه‌ای برای عدد فازی ۵۳/۶۱۶۲

صورت

$$\ell(\theta; \tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{50} [\tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{200}\pi} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{200}}] dt_1 \dots dt_{50} \quad (11)$$

خواهد بود. بنابراین توزیع پسین فازی براساس توزیع پیشین احتمالی (۱۰) به صورت

$$\pi(\theta | \tilde{X}) = \frac{e^{-\frac{(\theta-\gamma_0)^2}{128}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{50} [\tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{200}\pi} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{200}}] dt_1 \dots dt_{50}}{\sqrt{128}\pi p(\tilde{X})} \quad (12)$$

جدول ۱: نمره آزمون ورزشکاران (لی و گان، ۲۰۱۶)

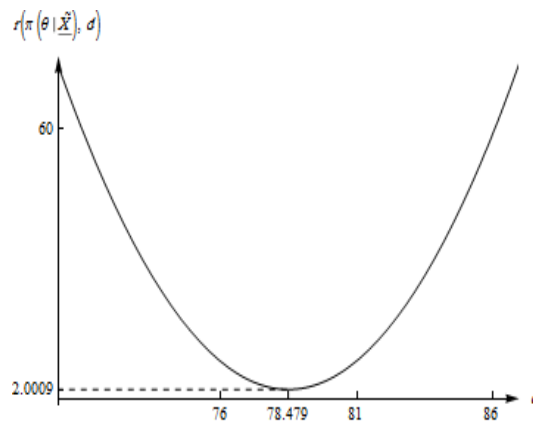
۵۳/۶۱۶۲	۶۱/۹۶۳۴	۶۱/۴۶۹۹	۵۵/۶۰۷۹	۷۱/۱۵۱۴
۶۴/۷۶۹۸	۷۰/۷۷۵۹	۶۶/۸۸۷۲	۶۶/۳۶۲۶	۶۵/۸۹۸۲
۷۴/۱۳۳۱	۷۴/۰۴۵۰	۷۳/۵۹۰۲	۷۲/۳۶۳۸	۷۲/۱۲۶۲
۷۸/۵۴۳۱	۷۸/۰۹۳۳	۷۶/۷۹۷۳	۷۵/۵۵۶۷	۷۴/۱۶۰۲
۸۰/۵۶۶۳	۸۰/۵۲۲۰	۸۰/۳۳۷۴	۷۹/۱۵۳۳	۷۸/۹۶۳۷
۸۱/۶۵۶۸	۸۱/۲۱۰۴	۸۱/۰۵۷۹	۸۰/۶۹۱۴	۸۰/۶۴۹۰
۸۳/۶۵۵۹	۸۳/۶۵۵۹	۸۲/۲۹۲۳	۸۲/۱۶۱۷	۸۱/۷۲۷۵
۸۶/۴۳۳۸	۸۵/۷۸۱۳	۸۵/۴۵۱۰	۸۵/۲۳۰۲	۸۴/۶۹۹۴
۸۹/۶۸۳۴	۸۸/۷۲۰۱	۸۸/۹۸۲۹	۸۷/۲۳۵۹	۸۶/۸۲۳۵
۹۹/۷۹۳۳	۹۳/۵۰۳۸	۹۱/۴۵۰۳	۹۰/۷۸۰۱	۹۰/۴۸۲۱

است، که در آن

$$p(\tilde{X}) = \frac{1}{\sqrt{128\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^5 [\tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{200\pi}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{200}}] e^{-\frac{(\theta-\gamma_0)^2}{128}} dt_1 \dots dt_5 d\theta$$

$$= 2,19759 \times 10^{-43}$$

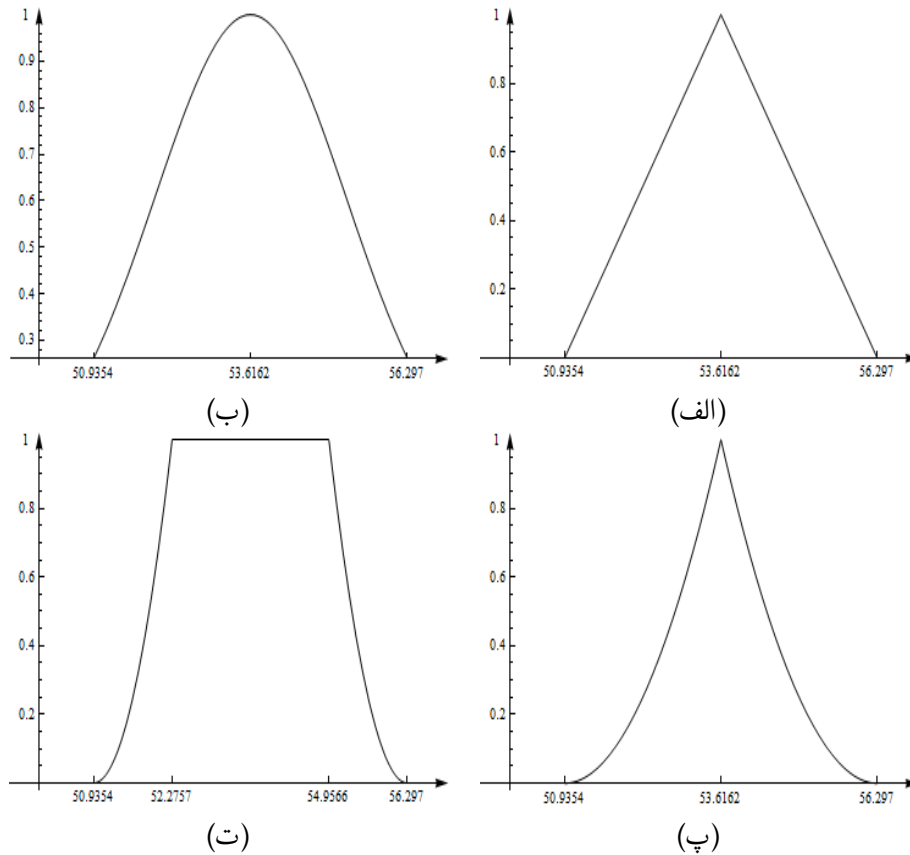
مقدار احتمال رخ دادن نمونه فازی X با توجه به تابع عضویت آن را نشان می‌دهد. تابع ریسک بیز پسین با استفاده از (۳) محاسبه می‌شود محاسبه تابع ریسک بیز پسین بسیار پیچیده است بنابراین تابع ریسک بیز پسین با استفاده از روش‌های عددی و نرم افزار *Mathematica* محاسبه شده است. با توجه به



شکل ۲: نمودار تابع ریسک بیز پسین با تابع عضویت دوزنقه‌ای و تابع زیان توان دوم خطا

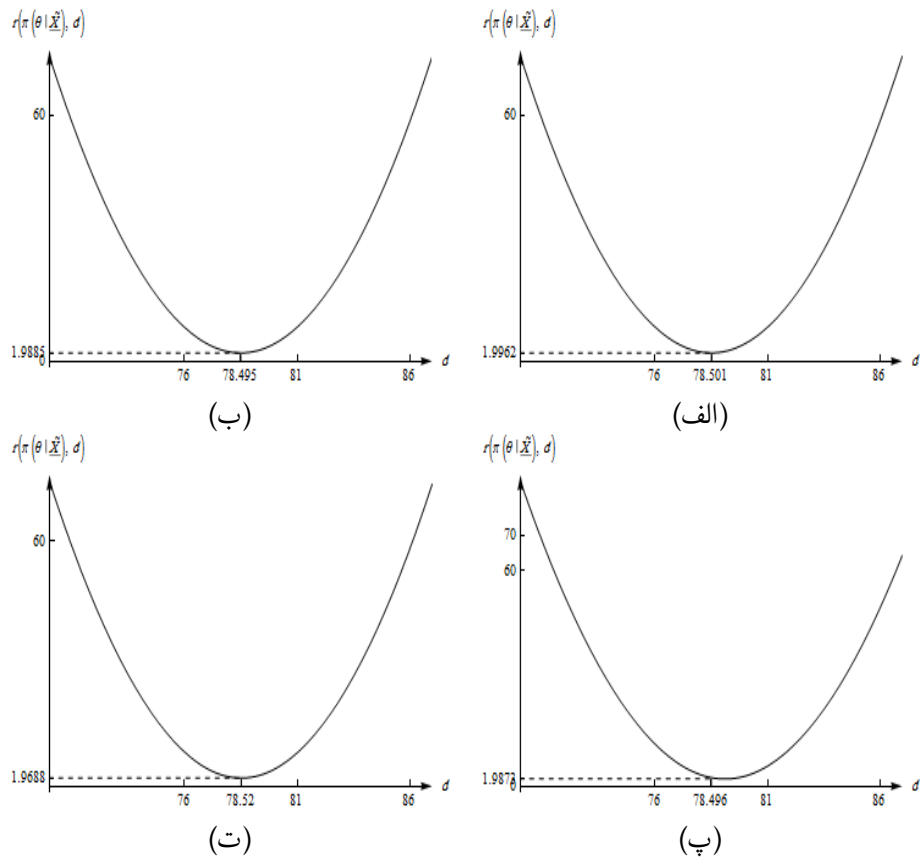
نمودار تابع ریسک بیز پسین، در شکل ۲، برآورد بیزی برای پارامتر θ برابر $78/479$ با مقدار ریسک بیز

پسین ۲/۰۰۰۹ است. نمودار تابع‌های عضویت گاوسی، مثلثی، دوزنقه‌ای-گاوسی و مثلثی-گاوسی برای عدد فازی ۵۳/۶۱۶۲ در شکل ۳ نمایش داده شده است. با استفاده از (۱۱)، (۱۲) و (۳) نمودار تابع



شکل ۳: نمودار تابع عضویت الف: مثلثی، ب: گاوسی، پ: مثلثی-گاوسی، ت: دوزنقه‌ای-گاوسی،

ریسک بیز پسین برای این تابع‌های عضویت در شکل ۴ رسم شده‌اند. برآورد بیزی فازی و مقدار ریسک بیز پسین برآوردهای بیز θ برای تابع‌های عضویت مختلف در جدول ۲ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد تابع عضویت مثلثی-گاوسی، معرفی شده در این مقاله، مینیمم ریسک بیز پسین را نسبت به چهار تابع عضویت دیگر برای مقادیر مختلف s_i دارد بنابراین تابع عضویت مثلثی-گاوسی برای داده‌های فازی بهینه است. بعلاوه مقدار s_i بر ریسک بیز پسین نیز تأثیر دارد و هر چه مقدار s_i بیشتر باشد مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیز فازی بیشتر می‌شود و هر چه مقدار s_i کمتر باشد



شکل ۴: نمودار تابع ریسک بیز پسین برای تابع‌های عضویت الف: گاوسی، ب: مثلثی، پ: دوزنقه‌ای-گاوسی و ت: مثلثی-گاوسی

جدول ۲: برآورد بیزی فازی و مقدار ریسک بیز پسین

$s_i = 0.1x_i$		$s_i = 0.05x_i$		$s_i = 0.025x_i$		تابع عضویت
ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	
۲/۱۸۷۰	۷۸/۲۵۴	۲/۰۰۰۹	۷۸/۴۷۹	۱/۹۵۴۶	۷۸/۵۳۸	دوزنقه‌ای
۲/۰۸۰۴	۷۸/۴۴۴	۱/۹۹۶۲	۷۸/۵۰۱	۱/۹۵۷۹	۷۸/۵۳۶	گاوسی
۲/۱۳۶۴	۷۸/۳۱۷	۱/۹۸۸۵	۷۸/۴۹۵	۱/۹۵۱۵	۷۸/۵۴۲	مثلثی
۲/۱۳۳۴	۷۸/۳۵۴	۱/۹۸۷۳	۷۸/۴۹۶	۱/۹۵۱۷	۷۹/۱۶۷	دوزنقه‌ای-گاوسی
۲/۰۵۷۳۰	۷۸/۴۱۲	۱/۹۶۸۸	۷۸/۵۲	۱/۹۴۶۵	۷۸/۵۵۴	مثلثی-گاوسی

مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیز فازی کاهش می‌یابد که می‌توان نتیجه گرفت هر اندازه سطح زیر منحنی تابع عضویت کمتر باشد مقدار ریسک بیز پسین کاهش می‌یابد. بنابراین هر چقدر گزارش داده‌ها نادقیق تر و نادقیق بودن گزارش برای داده بزرگتر بیشتر باشد ریسک بیز پسین فازی افزایش می‌یابد اما در تمام حالات تابع عضویت مثلثی-گاوسی تابع عضویت بهینه بیزی است.

۲.۳ داده‌های فازی نرمال با تابع پیشین امکانی

برای داده‌های فازی نرمال و تابع پیشین امکانی، با توجه به (۱)، تابع درستنمایی به صورت

$$\ell(\theta; \tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{2\sigma^2}} dt_1 \dots dt_n \quad (13)$$

است. اگر تابع درستنمایی حاصل در (۴) قرار داده شود، تابع درستنمایی فازی داده‌های نرمال به صورت

$$\pi^*(\theta|\tilde{X}) = \frac{T(\ell(\theta; \tilde{X}), \pi^*(\theta))}{m(\tilde{X})} \quad (14)$$

به دست می‌آید که در آن

$$m(\tilde{X}) = \sup_{\theta} \{T(\ell(\theta; \tilde{X}), \pi^*(\theta))\} \quad (15)$$

تابع ریسک بیز پسین براساس تابع پسین امکانی به دست آورده شده و تابع زیان توان دوم خطا برابر

$$r(\pi^*(\theta|\tilde{X}), d) = \sup_{\theta \in \Theta} \{L(\theta, d) \cdot \pi^*(\theta|\tilde{X})\} \quad (16)$$

خواهد بود که با مینیم کردن آن برآوردگر بیز فازی حاصل می‌شود. براساس (۱۳) تا (۱۶) تابع عضویت بر تابع درستنمایی فازی تأثیر دارد. در نتیجه بر تابع پسین امکانی و تابع ریسک بیز پسین امکانی نیز مؤثر است. فرض کنید در نمونه تصادفی ۵۰ تایی از نمره آزمون ورزشکاران که از توزیع نرمال با میانگین θ و

واریانس ۱۰۰ پیروی می‌کنند (جدول ۱)، توزیع پیشین امکانی

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta-60}{10} & 60 < \theta \leq 70 \\ 1 & 70 < \theta \leq 80 \\ \frac{90-\theta}{10} & 80 < \theta \leq 90 \end{cases}$$

برای پارامتر θ در نظر گرفته شده است. برای بررسی تأثیر تابع عضویت بر برآورد بیز امکانی با تابع زیان توان دوم خطا، داده‌های فازی با تابع عضویت دوزنقه‌ای، گاوسی، مثلثی، دوزنقه‌ای-گاوسی و مثلثی-گاوسی در نظر گرفته می‌شوند. ابتدا برای داده‌های جدول ۱ تابع عضویت دوزنقه‌ای به صورت

$$\tilde{X}_i(t) = \begin{cases} \frac{t-x_i+s_i}{\frac{s_i}{\gamma}} & x_i - s_i < t < x_i - \frac{s_i}{\gamma} \\ 1 & x_i - \frac{s_i}{\gamma} \leq t \leq x_i + \frac{s_i}{\gamma} \\ \frac{x_i+s_i-t}{\frac{s_i}{\gamma}} & x_i + \frac{s_i}{\gamma} < t < x_i + s_i \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

را در نظر بگیرید، به طوری که $s_i = 0.5x_i, i = 1, \dots, 50$ باشد. تابع درستنمایی فازی برای مشاهدات فازی نمره آزمون ورزشکاران برابر

$$\ell(\theta; \tilde{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{50} [\tilde{X}_i(t_i) \frac{1}{\sqrt{200\pi}} e^{-\frac{(t_i-\theta)^2}{200}}] dt_1 \dots dt_{50} \quad (17)$$

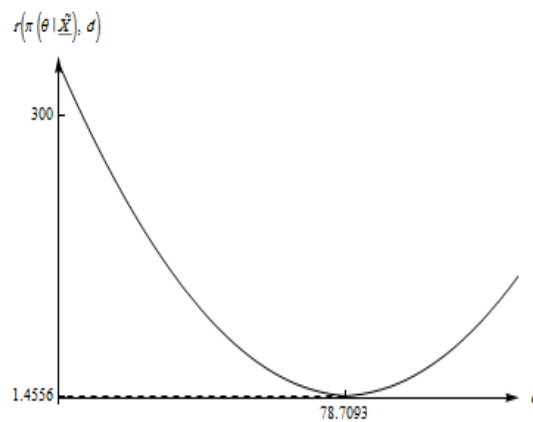
خواهد بود. توزیع پسین امکانی براساس تابع درستنمایی و توزیع پیشین امکانی ذکر شده با توجه به T -نرم ضربی به صورت

$$\pi(\theta|\tilde{X}) = \begin{cases} \frac{\theta-60}{10m(\tilde{X})} \ell(\theta; \tilde{X}) & 60 < \theta \leq 70 \\ \frac{1}{m(\tilde{X})} \ell(\theta; \tilde{X}) & 70 < \theta \leq 80 \\ \frac{90-\theta}{10m(\tilde{X})} \ell(\theta; \tilde{X}) & 80 < \theta \leq 90 \end{cases} \quad (18)$$

است، که در آن

$$m(\tilde{X}) = \sup_{60 < \theta < 90} \{ \ell(\theta; \tilde{X}) \pi(\theta) \} = 2,2193 \times 10^{-22}$$

مقدار تابع چگالی حاشیه‌ای X است. تابع ریسک بیز پسین امکانی با توجه به (۵) محاسبه می‌شود که نمودار آن در شکل ۵ نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برآورد بیز θ برابر $78/7093$ و $78/7093$

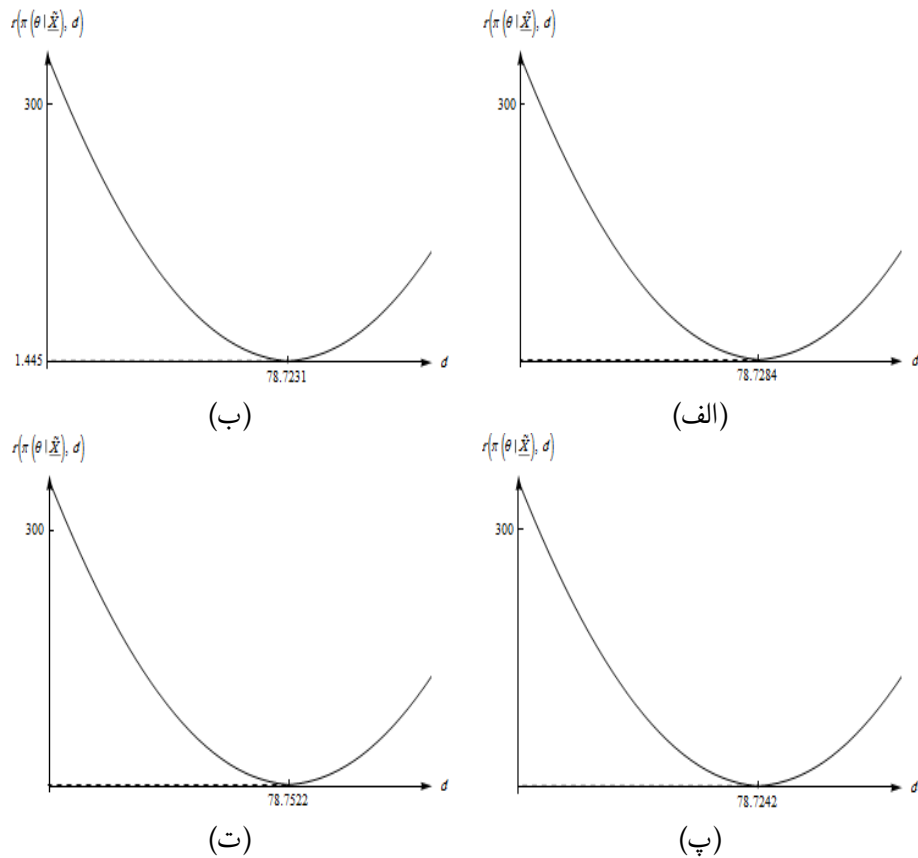


شکل ۵: نمودار تابع ریسک بیز پسین براساس تابع عضویت دوزنقه‌ای و تابع زیان توان دوم خطا

با مقدار ریسک بیز پسین $1/4556$ است. اکنون داده‌ها با تابع‌های عضویت گاوسی، مثلثی، دوزنقه‌ای-گاوسی و مثلثی-گاوسی در مدل امکانی در نظر گرفته می‌شود. تابع ریسک بیز پسین برای این توابع عضویت با استفاده از (۱۷)، (۱۸) و تابع ریسک بیز پسین در مدل امکانی (۵) با نرم افزار *Mathematica* به دست آورده شده و نمودار آن‌ها در شکل ۶ نشان داده شده است.

جدول ۳: برآورد بیزی فازی و مقدار ریسک بیز پسین امکانی

$s_i = 0.1x_i$		$s_i = 0.05x_i$		$s_i = 0.025x_i$		تابع عضویت
ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	
$1/5823$	$78/4911$	$1/4556$	$78/7093$	$1/4272$	$78/7683$	دوزنقه‌ای
$1/4695$	$78/6520$	$1/4488$	$78/7284$	$1/4297$	$78/7670$	گاوسی
$1/5214$	$78/5349$	$1/4450$	$78/7231$	$1/4247$	$78/7719$	مثلثی
$1/5181$	$78/5358$	$1/4440$	$78/7242$	$1/4245$	$78/7722$	دوزنقه‌ای-گاوسی
$1/3823$	$78/6095$	$1/4386$	$78/7522$	$1/4207$	$78/7776$	مثلثی-گاوسی



شکل ۶: نمودار تابع ریسک بیز پسین برای تابع‌های عضویت الف: گاوسی، ب: مثلثی، پ: دوزنقه‌ای-گاوسی و ت: مثلثی-گاوسی

از جدول ۳ می‌توان نتیجه گرفت که برآورد بیزی برای تابع عضویت مثلثی-گاوسی دارای مینیمم ریسک بیز پسین امکانی نسبت به چهار تابع عضویت دیگر است و در نتیجه تابع عضویت بهینه بین پنج تابع عضویت برای این داده‌ها است. علاوه بر این، مقدار s_i نیز بر ریسک بیز پسین امکانی تأثیر دارد و با افزایش مقدار s_i و در نتیجه ابهام بیشتر در گزارش داده‌ها مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیزی امکانی بیشتر می‌شود و با کاهش مقدار s_i مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیزی امکانی کاهش می‌یابد بنابراین هرچه مقدار مساحت زیر تابع عضویت برای هر مشاهده فازی کمتر باشد، مقدار ریسک بیز پسین تحت تابع زیان توان دوم خطا کمتر می‌شود و برآوردگر بیزی فازی بهینه به دست می‌آید. بعلاوه افزایش ابهام

جدول ۴: طول عمر لنت‌های ترمز

۵۹/۸	۷۳/۱	۴۲/۸	۴۸/۸	۲۲/۷	۴۵/۵	۳۸/۴	۸۶/۲
۳۱/۷	۲۸/۴	۱۰۲/۵	۸۱/۷	۲۲/۶	۳۶/۷	۴۱/۰	۴۵/۱
۳۳/۹	۴۶/۹	۴۲/۷	۶۱/۵	۴۰/۰	۴۲/۲	۵۶/۴	۵۲/۱
۵۰/۶	۴۵/۹	۸۰/۶	۵۳/۶	۳۸/۸	۵۱/۶	۸۱/۳	۵۴/۲
۵۶/۷	۳۳/۸	۶۴/۵	۵۰/۷	۵۰/۲	۳۴/۴	۶۲/۴	۵۹/۰

گزارش با اندازه داده‌ها موجب افزایش ریسک بیز پسین می‌شود.

۳.۳ داده‌های فازی نمایی

مجموعه دوم، داده‌های طول عمر لنت‌های ترمز دیسک جلوی مجموعه‌ای تصادفی از ۴۰ ماشین است که در جدول ۴ ارائه شده است (لاولس، ۲۰۰۳). طول عمر لنت‌ها از توزیع نمایی با تابع چگالی

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad t > 0, \theta > 0,$$

پیروی می‌کند، که در آن θ میانگین طول عمر آن‌ها است (عارفی و همکاران، ۲۰۱۰). یک کارشناس معتقد است که مقدار متغیر θ با امکان یک در بازه $[40, 50]$ است. بعلاوه ممکن است θ کوچکتر از ۴۰ باشد، اما هرگز کمتر از ۳۰ نیست و بزرگتر از ۵۰ است اما هرگز بیشتر از ۶۰ نیست. بنابراین برای توزیع پیشین امکانی یک مدل ذوزنقه‌ای فازی در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$\pi^*(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta-30}{10} & 30 < \theta \leq 40 \\ 1 & 40 < \theta \leq 50 \\ \frac{60-\theta}{10} & 50 < \theta \leq 60 \end{cases}$$

همان‌طور که در جدول ۵ ملاحظه می‌شود برآورد بیزی برای تابع عضویت مثلثی-گاوسی برای داده‌های نمایی نیز دارای مینیمم ریسک بیز پسین امکانی نسبت به چهار تابع عضویت دیگر است، در نتیجه تابع عضویت مثلثی-گاوسی تابع عضویت بهینه بین پنج تابع عضویت رایج برای این داده‌ها نیز هست. علاوه بر این، مقدار s_i نیز بر ریسک بیز پسین امکانی تأثیر دارد و با افزایش مقدار s_i مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیزی امکانی بیشتر می‌شود و با کاهش مقدار s_i مقدار ریسک بیز پسین برآورد بیزی امکانی کاهش

جدول ۵: برآورد بیزی فازی و مقدار ریسک بیز پسین

$S_i = 0.1x_i$		$S_i = 0.05x_i$		$S_i = 0.025x_i$		تابع عضویت
ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	ریسک	برآورد	
۱۹/۷۱۴۲	۴۸/۴۷۸	۱۹/۶۳۴۰	۴۸/۵۱۶	۱۹/۶۰۵۸	۴۸/۵۲۸	دوزنقه‌ای
۱۹/۷۳۹۸	۴۸/۴۹۱	۱۹/۶۳۹۹	۴۸/۵۱۶	۱۹/۶۰۸	۴۸/۵۲۷۶	گاوسی
۱۹/۷۱۴۲	۴۸/۴۷۴	۱۹/۶۲۹۵	۴۸/۵۲۰	۱۹/۶۰۱۲	۴۸/۵۲۹	مثلی
۱۹/۷۰۹۳	۴۸/۴۷۹	۱۹/۶۲۷	۴۸/۵۲۰	۱۹/۶۰۲۸	۴۸/۵۲۹	دوزنقه‌ای-گاوسی
۱۹/۶۷۶۸	۴۸/۵۰۲	۱۹/۶۱۵۴	۴۸/۵۲۵	۱۹/۶۰۰۷	۴۸/۵۳۰	مثلی-گاوسی

می‌یابد. در این حالت نیز هر چقدر ابهام در گزارش داده‌ها افزایش یابد مقدار ریسک بیز پسین افزایش می‌یابد و این دو موضوع بستگی به نوع تابع عضویت ندارد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تابع عضویت جدید مثلی-گاوسی معرفی و تأثیر تابع‌های عضویت پرکاربرد در دو مدل احتمالی و امکانی با استفاده از داده‌های فازی نرمال و نمایی بررسی شد. با توجه به معیار تابع ریسک بیز پسین، نتایج نشان داد که تابع عضویت مثلی-گاوسی، برای مجموعه داده‌های نرمال و نمایی نسبت به تابع‌های عضویت دوزنقه‌ای، گاوسی، مثلی و دوزنقه‌ای-گاوسی تابع عضویت بهینه است. بعلاوه هر چقدر داده‌ها نادقیق‌تر گزارش شوند، ریسک بیز پسین افزایش می‌یابد و افزایش ابهام در گزارش داده‌های بزرگتر نیز باعث افزایش ریسک بیز پسین می‌شود و این موضوع بستگی به نوع تابع عضویت و توزیع داده‌ها ندارد. علاوه بر این نشان داده شد که ترکیبی از تابع‌های عضویت گاوسی و مثلی، تابع عضویت بهینه را نتیجه می‌دهد.

تقدیر و تشکر

از داوران و ویراستار محترم مجله که با توصیه‌های بسیار مفید سبب ارتقای این مقاله و ارائه بهتر آن شده اند کمال تشکر و قدردانی را داریم.

مراجع

طاهری، م. و ماشین‌چی، م. (۱۳۹۲)، مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، چاپ دوم.

چاچی، ج. و حسامیان، غ. ر. (۱۳۹۳)، مدل‌بندی داده‌های فازی با رگرسیون اسپلاین تطبیقی چندگانه، مجله علوم آماری، ۸، ۱-۱۸.

Arefi, M., Viertl, R. and Taheri, S. (2010), A Possibilistic Analogue to Bayes Estimation with Fuzzy Data, *Technische Universität Wien, Vienna University of Technology*, **3**.

Arefi, M., and Taheri, S. M. (2016), Possibilistic Bayesian Inference Based on Fuzzy Data, *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, **7**, 753-763.

Chen, Y. Y. (1995). Statistical Inference Based on The Possibility and Belief Measures, *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 1855-1863.

Dubois, D. (2006), Possibility Theory and Statistical Reasoning, *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 47-69.

Gil, M., Corral, N. and Gil, P. (1985), The Fuzzy Decision Problem: An Approach to The Point Estimation Problem with Fuzzy Information, *European Journal of Operational Research*, **22**, 26-34.

Javadi, S., and Hojjatinia, Z. (2012), Evaluation of Optimal Fuzzy Membership Function for Wind Speed Forecasting, *International Journal of Smart Electrical Engineering*, **1**, 125-130.

Lapointe, S., and Bobée, B. (2000), Revision of Possibility Distributions: A Bayesian Inference Pattern, *Fuzzy Sets and Systems*, **116**, 119-140.

Lawless JF. (2003), Statistical Models and Methods for Lifetime Data, (Second Edition), *John Wiley & Sons*, New Jersey.

Li, A., and Zhao, Z. (2017), An Improved Model of Variable Fuzzy Sets with Normal Membership Function for Crane Safety Evaluation, *Mathematical Problems in Engineering*, **2017**, 1-13.

Liu, H., and Guan, J. (2016), A Model of Fuzzy Normal Distribution, *Open Journal of Statistics*, **6**, 749-755.

- Mandal, S. N., Choudhury, J. P. and Chaudhuri, S. (2012), In Search of Suitable Fuzzy Membership Function in Prediction of Time Series Data, *International Journal of Computer Science Issues*, **9**, 293-302.
- Mayilvaganan, M.K., and Naidu, K.B.(2011), Comparison of Membership Functions in Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System (ANFIS) For The Prediction of Groundwater Level of a Watershed, *Journal of Computer Applications Resarched and Development*, **1**, 35-42.
- Mohar, M. K. KH., and Devgan, M. S. (2015), Gaussian Fuzzy Membership Function for Enhancement of Different Medical Image, *Scholars Journal of Engineering and Technology*, **3**, 500-509.
- Okuda, T., Tanaka, H., and Asai, K. (1978), A Formulation of Fuzzy Decision Problems with Fuzzy Information Using Probability Measures of Fuzzy Events, *Information and Control*, **38**, 135-147.
- Porembski,S., and Straszecka (2016), Membership Functions for Fuzzy Focal Elements, *Archives of contral sciences*, **3**, 395-427.
- Princy, S., and Dhenakaran, S. S. (2016), Comparison of Triangular and Trapezoidal Fuzzy Membership Function, *Journal of Computer Science and Engineering*, **2**, 46-51.
- Tanaka, H., Okuda, T., and Asai, K. (1979), Fuzzy Information and Decision in Statistical Model, *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*,**1**, 303-320.
- Viertl, R. (2008), Foundations of Fuzzy Bayesian Inference, *Journal of Uncertain Systems*, **2**,187-191.
- Viertl, R. (2011), Statistical Methods for Fuzzy Data, *John Wiley & Sons*.
- Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and contral*, **8**, 338-353.
- Zadeh, L. A. (1968), Probability Measures of Fuzzy Events, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **23**, 421-427.
- Zhao, J., and Bose, B. K. (2002), Evaluation of Membership Functions for Fuzzy Logic Controlled Induction Motor Drive, *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, *IEEE*, **1**, 229-234.