مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۷

جلد ۲، شماره ۱، ص ۹۷-۱۱۳

مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها

هادی علیزاده نوقابی، رضا علیزاده نوقابی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۵/۲۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۸/۱۰

چکیده : در این مقاله توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی نمونه را برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت مورد بحث و ارزیابی قرار می‌دهیم و آنها را با توان آزمون‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که آزمون‌های بر مبنای آنتروپی نسبت به آزمون‌های مقایسه شده دارای توان کمتری هستند. در این مقاله یک آزمون جدید تقارن بر مبنای آنتروپی نمونه معرفی می‌کنیم و این آزمون جدید را با آزمون تقارن دیگری مقایسه و به کمک شبیه‌سازی توان آزمون‌ها، نشان می‌دهیم که آزمون جدید دارای توان بیشتری است.

واژه‌های کلیدی : آزمون نیکویی برازش، آزمون تقارن.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله : هادی علیزاده نوقابی، *alizadehhadi@ymail.com*

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): 62F03، 62F05

۱ مقدمه

مفهوم آنتروپی اولین بار در علم فیزیک معرفی و برای کمی‌سازی مفاهیمی چون عدم حتمیت و بی‌نظمی به کار برده شد. بعدها از این مفهوم برای اندازه‌گیری اطلاعات حاصل از مشاهدات متغیرهای تصادفی استفاده شد. شانون (۱۹۴۸) آنتروپی توزیع F با تابع چگالی f را بصورت

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\log f(x)\,dx.$$

تعریف کرد. برآورد آنتروپی یک توزیع را بر مبنای مشاهدات $x_{1},\ldots,x_n$ که از توزیع نامعلومی آمده‌اند، آنتروپی نمونه‌ای گویند. بسیاری از محققان روش‌های مختلفی برای برآورد ناپارامتری توزیع‌های پیوسته پیشنهاد نموده‌اند، از جمله می‌توان به واسیچک (۱۹۷۶)، جوی (۱۹۸۹)، هال و مورتن (۱۹۹۲)، ون (۱۹۹۲) و کوریا (۱۹۹۵) اشاره کرد. در میان این برآوردگرها، برآوردگر واسیچک، به علت سادگی در محاسبه، به ویژه در مبحث آزمون‌ها بیشتر مورد توجه قرار گرفته است.
فرض کنید $x_{1},\ldots,x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع F باشد. برآورد آنتروپی نمونه‌ای واسیچک بصورت

$$H_{mn} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{n}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\},$$

است، که در آن $x_{(i)} = x_{(1)}$ اگر $i < 1$ و $x_{(i)} = x_{(n)}$ اگر $i > n$ باشد.
در مطالعات علوم مهندسی و اجتماعی مهم است که بدانیم آیا داده‌ها از توزیع خاصی آمده‌اند یا نه. محققان بسیاری علاقمند به آزمون‌های نیکویی برازش برای توزیع‌های نرمال، نمایی و یکنواخت بوده‌اند. بنابراین آزمون‌های زیادی در این زمینه‌ها معرفی شده‌اند. واسیچک (۱۹۷۶) همراه با معرفی برآوردگر برای آنتروپی آزمونی برای نرمال بودن بر مبنای برآوردگر خود معرفی کرد و آن را با چند آزمون دیگر مقایسه کرد. محققان بعدی که به ارایه‌ی آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی نمونه پرداخته‌اند نیز از این برآوردگر استفاده کرده‌اند. دادویچ و وندرمولن (۱۹۸۱) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) به ترتیب آزمون‌هایی بر مبنای آنتروپی برای

یکنواختی و نمایی بودن معرفی و آزمون‌های خود را با تعدادی از آزمون‌های دیگر مقایسه کردند. ما در اینجا آزمون‌هایی را برای مقایسه آزمون‌های بر مبنای آنتروپی در نظر می‌گیریم که دادویچ و وندرمولن (۱۹۸۱) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) از آنها برای مقایسه آزمون‌های خود استفاده نکرده‌اند و نشان خواهیم داد که آزمون‌های در نظر گرفته شده دارای توان بالاتری هستند. همچنین آزمون نرمال بودن بر مبنای آنتروپی را با پرتوانترین آزمون نرمال بودن که تاکنون شناخته شده است، مقایسه می‌کنیم.

در بخشهای ۲، ۳ و ۴ به ترتیب به آزمون‌های نرمال بودن، نمایی و یکنواخت بر مبنای آنتروپی می‌پردازیم و توان این آزمون‌ها را با توان آزمون‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. در بخش ۵ آزمون جدید تقارن بر مبنای آنتروپی نمونه را معرفی می‌کنیم و توان این آزمون را با توان آزمون تقارن دیگری مقایسه می‌کنیم.

تمامی شبیه‌سازی‌ها با استفاده از نرم افزار R و با ۱۰۰۰۰ تکرار انجام شده است.

۲ آزمون نرمال بودن

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع F با تابع چگالی f باشد. می‌خواهیم آزمون فرضیه

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

در مقابل

$$H_1 : f(x) \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$$

را انجام دهیم، که میانگین μ و انحراف معیار σ هر دو نامعلوم‌اند.

فرض کنید $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ آماره‌های مرتب نمونه باشند. با توجه به اینکه در میان تمام توزیع‌های با واریانس σ^2 توزیع نرمال دارای ماکزیمم آنتروپی می‌باشد، آماره‌ی واسیچک (۱۹۷۶) بصورت

$$K_{mn} = \frac{n}{2ms} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(x_{(i+m)} - x_{(i-m)} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$$

است، که در آن $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ واریانس نمونه، m عدد صحیح مثبت کمتر از $\frac{n}{2}$ و $x_{(i)} = x_{(1)}$ اگر $i < 1$ و $x_{(i)} = x_{(n)}$ اگر $i > n$ می‌باشند. مقادیر کوچک K_{mn} منجر به رد فرضیه نرمال بودن می‌شوند. تحت فرضیه صفر توزیع K_{mn} معلوم نیست و لذا نقاط بحرانی را به کمک شبیه سازی بدست می‌آوریم. برای این کار تحت فرضیه صفر به تعداد دفعات زیاد و در هر بار n داده از توزیع نرمال تولید کرده و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم. نقطه‌ای که نسبت α (سطح آزمون) از مقادیر محاسبه شده‌ی آماره آزمون کمتر از آن است نقطه‌ی بحرانی آزمون خواهد بود. انتخاب m نیز مسئله‌ای است زیرا برای مقادیر مختلف n، یک m مشخصی وجود ندارد که توان آزمون ماکزیمم شود. توان آزمون K_{mn} روی تعدادی از فرضیه‌های مقابل به ازای مقادیر مختلف m محاسبه شده است و از mای که بیشترین توان را می‌دهد، استفاده می‌کنیم. واسیچک (۱۹۷۶) مقادیر m بهینه را برای $n = 10, 20$ داده است. ما از این مقادیر m برای محاسبه توان آزمون K_{mn} استفاده می‌کنیم. توانها در جدول ۱ آورده شده است.

آماره شاپیرو- ویلک[1] برای آزمون نرمال بودن بصورت

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

است، که مشابه آماره K_{mn} پایا در مکان و مقیاس است. مقادیر کوچک W منجر به رد فرضیه نرمال بودن می‌شود. در حقیقت $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} X_{(i)}$، بهترین برآوردگر خطی نااریب ($BLUE$) برای σ است. ضرایب $a_{i,n}$ برای $n \leq 50$ و نقاط بحرانی W در پیرسون و هارتلی (۱۹۷۲) آمده است. آماره W پرتوانترین آزمون نرمال بودن را فراهم می‌سازد (برای مثال تیکو، (۱۹۷۴) را ببینید).

برای شبیه‌سازی توان آزمون‌های K_{mn} و W هر بار تعداد n داده از توزیعی که به عنوان فرضیه جانشین در نظر گرفته شده است، تولید و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم. نسبت تعداد دفعاتی که آزمون رد می‌شود به کل تعداد دفعات

[1] Shapiro-Wilk

شبیه‌سازی، توان آزمون خواهد بود. چگونگی تولید داده از توزیع‌های مختلف و برنامه‌های محاسبه‌ی نقاط بحرانی و توان آزمون در پیوست ۲ آمده است. مقادیر توان آزمون‌ها را در جدول ۱ برای ۱۲ توزیع (توزیع‌های چوله[۲]، توزیع‌های متقارن با دم‌های کوتاه[۳] و بلند[۴]) که به عنوان فرضیه‌های جانشین در نظر گرفته شده‌اند، آورده‌ایم. توابع چگالی این توزیع‌ها در پیوست ۱ آورده شده است. در اکثر مقالات از این توزیع‌ها به عنوان فرضیه‌های جانشین استفاده شده است. (برای مثال استبان و همکاران، (۲۰۰۱) و یازیکی و یلاکن، (۲۰۰۷) را ببینید).

با توجه به جدول ۱، توان آزمون K_{mn} برای توزیع‌های چوله و متقارن با دم‌های بلند کمتر از توان آزمون W است. همچنین مشاهده می‌کنیم که در ۱۶ مورد از ۲۲ مورد، توان آزمون W بیشتر از آزمون K_{mn} می‌باشد. بنابراین در مجموع می‌توان گفت که در اکثر موارد آزمون W پرتوانتر از آزمون K_{mn} است.

انتخاب مقدار m در آماره K_{mn} مسئله‌ای است که با n تغییر می‌کند. همچنین با انتخاب مقادیر متفاوتی از m در جدول ۱، توان پایینی برای آزمون K_{mn} نتیجه می‌شود که آن را به رقیب کم توانی برای آزمون W تبدیل می‌کند.

۳ آزمون نمایی بودن

فرض کنید که علاقمند به آزمون نیکویی برازش برای فرضیه

$$H_0 :\ f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \quad x > 0$$

در مقابل

$$H_1 :\ f(x) \neq \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \quad x > 0$$

هستیم، که در آنها σ نامعلوم است.

با استفاده از اطلاع کولبک-لیبلر[۵] آماره آزمون پیشنهاد شده بصورت (ابراهیمی و

---

۲ Skew distributions

۳ Short-tailed symmetric distributions

۴ Long-tailed symmetric distributions

۵ Kullback-Leibler information

همکاران، ۱۹۹۲)

$$K_{mn} = -H_{mn} + \log(\bar{x}) + ۱,$$

است که در آن

$$\bar{x} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i$$

سرعت همگرایی توزیع K_{mn} به نرمال خیلی پایین است (ژا و ژانگ، ۲۰۰۱)، طوریکه شبیه سازی‌ها نشان می‌دهند همگرایی به نقاط بحرانی توزیع نرمال بدست نمی‌آید حتی اگر اندازه نمونه n خیلی بزرگ مانند $n = ۵۰۰$ است. بنابراین نقاط بحرانی آزمون K_{mn} را از طریق شبیه‌سازی محاسبه می‌کنیم. مقادیر بزرگ K_{mn} منجر به رد فرضیه نمایی بودن می‌شود.
فرض کنید

$$D_i = (n-i)\{X_{(i+۱)} - X_{(i)}\} \qquad ; ۱ \leq i \leq n$$

برای آزمون نمایی بودن تیکو (۱۹۸۱) آماره

$$Z = \frac{۲\sum\limits_{i=۱}^{n-۱}(n-i-۱)D_i}{(n-۲)\sum\limits_{i=۱}^{n-۱} D_i}$$

را پیشنهاد کرده است، که مقادیر کوچک و بزرگ آن منجر به رد فرضیه صفر می‌شود. این آزمون به عنوان پرتوانترین آزمون برای نمایی بودن شناخته شده است. (برای مثال بالاکریشنان، (۱۹۸۳) و دیر و هاربین، (۱۹۸۱) را ببینید). مقادیر توان آزمون‌های K_{mn} و Z برای ۱۲ توزیع به عنوان فرضیه‌های جانشین با استفاده از شبیه‌سازی محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است. مقادیر m در K_{mn} همان مقادیر پیشنهاد شده در ابراهیمی و همکاران، (۱۹۹۲) می‌باشند. همانطور که ملاحظه می‌شود آزمون Z بطور قابل ملاحظه‌ای پرتوانتر از آزمون K_{mn} است.

جدول ۱: توان آزمون‌های نرمال بودن K_{mn} و W در سطح ۰/۱

فرضیه جانشین	$n=۱۰$		$n=۲۰$	
	$K(m=۲)$	W	$K(m=۳)$	W
$Normal$	۰/۰۹۹	۰/۰۹۸	۰/۰۹۸	۰/۱۰۲
$Exponential$	۰/۵۶	۰/۵۷	۰/۹۱	۰/۹۰
$Gamma(۲)$	۰/۲۹	۰/۳۳	۰/٦۰	۰/٦۴
$Weibull(۲)$	۰/۱۴	۰/۱۵	۰/۲۳	۰/۲۷
$Weibull(۰/۵)$	۰/۹٦	۰/۹۴	۱/۰۰	۱/۰۰
$Beta(۲,۱)$	۰/۲۹	۰/۲۳	۰/۵۷	۰/۴٦
$t(۲)$	۰/۲۲	۰/۳۷	۰/۳۸	۰/۵۸
$t(۴)$	۰/۱۳	۰/۲۰	۰/۱٦	۰/۳۳
$Cauchy$	۰/۵۱	۰/٦۵	۰/۷۹	۰/۹۰
$Logistic$	۰/۰۸	۰/۱۳	۰/۱۰	۰/۱۹
$Log-Normal$	۰/٦۸	۰/۷۰	۰/۹۵	۰/۹٦
$Tukey(۰/۵۸۵)$	۰/۱۸	۰/۱۱	۰/۳۲	۰/۱۹

جدول ۲: توان آزمون‌های نمایی بودن K_{mn} و Z در سطح ۰/۱

فرضیه جانشین	$n=۱۰$		$n=۲۰$	
	$K(m=۳)$	Z	$K(m=۴)$	Z
$Exponential$	۰/۱۰۱	۰/۰۹۸	۰/۰۹۹	۰/۱۰۱
$Chisq(۱)$	۰/۱۴	۰/۳۲	۰/۳۰	۰/۵٦
$Chisq(۳)$	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۱۴	۰/۱۹
$Chisq(۴)$	۰/۱۵	۰/۱۸	۰/۱۹	۰/۳۴
$Weibull(۰/۵)$	۰/۳۲	۰/٦۳	۰/۷۰	۰/۹۱
$Weibull(۲)$	۰/۲۹	۰/۳۷	۰/۵٦	۰/۷۵
$Weibull(۳)$	۰/۴۷	۰/۵٦	۰/۸۴	۰/۹۲
$Weibull(٦)$	۰/٦۸	۰/۷۲	۰/۹٦	۰/۹۸
$Beta(۲,۱)$	۰/۸۳	۰/۷۸	۱/۰۰	۰/۹۹
$Half-Normal$	۰/۱۵	۰/۱۷	۰/۲۰	۰/۳۱
$Half-Cauchy$	۰/۲۴	۰/۴۸	۰/۴۵	۰/۷۳
$Half-Tukey$ $(l=۰/۵۸۵)$	۰/۳۵	۰/۳۴	۰/۷۰	۰/٦٦

۴ آزمون یکنواختی

آماره آزمون برای فرضیه $H_\circ : f(x) = ۱ \;\; ; \;\; \circ \leq x \leq ۱$ با استفاده از اطلاع کولبک-لیبلر بصورت زیر است. (دادیویچ و وندرمولن، ۱۹۸۱)

$$K_{mn} = H_{mn}$$

از آنجا که توزیع آماره K_{mn} تحت فرضیه صفر براحتی بدست نمی‌آید نقاط بحرانی را به کمک شبیه سازی بدست می‌آوریم. مقادیر کوچک K_{mn} منجر به رد فرضیه یکنواختی می‌شود. برای محاسبه توان آزمون K_{mn}، مقدار m به گونه‌ای انتخاب می‌شود که توان ماکزیمم شود.
حال آماره آزمون (اسمیت و بین، ۱۹۷۶ و فیلیبن، ۱۹۷۵)

$$R = ۱ - \hat{\rho}^{۲}(x_{(i)}, k_i) \quad ; \;\; k_i = \frac{i}{n+۱}$$

را در نظر بگیرید، که در آن $\hat{\rho}$ ضریب همبستگی x_i و k_i می‌باشد. مقادیر کوچک و بزرگ R منجر به رد فرضیه یکنواختی می‌شود. آزمون R پرتوانترین آزمون یکنواختی در مقابل فرضیه‌های مقابل متقارن است (تیکو، ۱۹۸۰ و ۱۹۸۱ را ببینید). تحت فرضیه صفر توزیع R معلوم نیست و مشابه آماره K_{mn} نقاط بحرانی را با شبیه‌سازی تعیین می‌کنیم. توان آزمون‌های K_{mn} و R برای ۱۲ فرضیه مقابل (که برای اولین بار در دادیویچ و وندرمولن، ۱۹۸۱ در نظر گرفته شده است) شبیه‌سازی و نتایج در جدول ۳ آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در اکثر موارد آزمون R پرتوانتر از آزمون K_{mn} می‌باشد. فرم‌های تابعی توزیع‌های در نظر گرفته شده در جدول ۳ در پیوست ۱ آورده شده است. این توزیع‌ها در مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش برای یکنواختی اغلب استفاده می‌شوند.

۵ آزمون تقارن

همانطور که در بخش‌های قبلی دیدیم توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی برای نرمال بودن، نمایی بودن و یکنواختی در مقایسه با آزمون‌های مقایسه

شده پایین‌تر بودند. با این وجود، این نتیجه را برای آزمون‌های نیکویی برازش دیگری که در آینده برای توزیع‌های مختلف مانند وایبل، گاما و غیره یا آزمون‌های ناپارامتری دیگری بر مبنای آنتروپی بدست آیند، نمی‌توان گفت.
در این بخش به عنوان یک مثال که مطلب بالا را نشان دهد یک آزمون تقارن بر مبنای آنتروپی معرفی می‌کنیم. آزمون را بصورت

$$T = |H_{mn}(x \leq \tilde{x}) - H_{mn}(x \geq \tilde{x})|$$

بیان می‌کنیم، که در آن $H_{mn}(x \leq \tilde{x})$ مقدار برآوردگر آنتروپی واسیچک برای داده‌های کوچکتر یا مساوی $\tilde{x}$ و $H_{mn}(x \geq \tilde{x})$ مقدار برآوردگر آنتروپی واسیچک برای داده‌های بزرگتر یا مساوی $\tilde{x}$ می‌باشد و $\tilde{x}$ میانه داده‌ها است. دلیل انتخاب این آماره به شرح زیر است.
واضح است که اگر f متقارن باشد $f \log f$ نیز متقارن است بنابراین داریم

$$\int_{-\infty}^{\tilde{x}} f(x)\log(f(x))dx = \int_{\tilde{x}}^{+\infty} f(x)\log(f(x))dx$$

که $\tilde{x}$ میانه توزیع f می‌باشد. حال انتگرال‌های سمت چپ و راست رابطه بالا را به ترتیب با $H_{mn}(x \leq \tilde{x})$ و $H_{mn}(x \geq \tilde{x})$ تقریب می‌زنیم، داریم

$$H_{mn}(x \leq \tilde{x}) = H_{mn}(x \geq \tilde{x})$$

این آزمون را با آزمون تقارن معرفی شده توسط کابیلیو و ماساره (۱۹۹۶) دارای آماره

$$Q = \frac{\mu - \tilde{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

مقایسه می‌کنیم، که در آن μ، $\tilde{x}$ و σ به ترتیب میانگین، میانه و انحراف معیار توزیع می‌باشد.
توان این دو آزمون با شبیه‌سازی محاسبه و در جدول ۴ آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود در اکثر موارد آزمون جدید، یعنی T پرتوانتر از آزمون Q می‌باشد. همچنین با افزایش حجم نمونه میزان برتری توان آزمون T نسبت به آزمون Q افزایش می‌یابد.

جدول ۳: توان آزمون‌های یکنواختی K_{mn} و R در سطح ۰/۱

فرضیه جانشین	$n = ۱۰$		$n = ۲۰$	
	$K(m = ۳)$	R	$K(m = ۷)$	R
$Uniform$	۰/۰۹۶	۰/۰۹۹	۰/۱۰۳	۰/۱۰۱
$A_{۱/۵}$	۰/۱۵	۰/۱۴	۰/۲۷	۰/۲۴
$A_۲$	۰/۲۳	۰/۲۲	۰/۴۹	۰/۴۰
$B_{۱/۵}$	۰/۰۸۴	۰/۱۰	۰/۰۹۲	۰/۱۴
$B_۲$	۰/۱۰	۰/۱۳	۰/۱۵	۰/۲۴
$B_۳$	۰/۱۳	۰/۱۹	۰/۱۸	۰/۳۰
$C_{۱/۵}$	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۱۹	۰/۲۸
$C_۲$	۰/۱۹	۰/۳۴	۰/۲۳	۰/۵۷
$Tukey(l = ۰/۵۸۵)$	۰/۰۸۸	۰/۱۰	۰/۰۹۰	۰/۱۲
$Tukey(l = ۲/۸۲)$	۰/۰۸۶	۰/۰۹۵	۰/۰۹۶	۰/۱۳
$(۱ + u)^k,\ k = ۲$	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۲۰	۰/۱۷
$(۱ + u)^k + (۲ - u)^k$ $(k = -۲)$	۰/۳۳	۰/۴۰	۰/۶۵	۰/۷۰

جدول ۴: توان آزمون‌های تقارن T و Q در سطح ۰/۰۵

فرضیه جانشین	$n = ۱۰$		$n = ۲۰$	
	Q	T	Q	T
$Normal$	۰/۰۴۸	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱
$Chisq(۱)$	۰/۶۵۳	۰/۷۷۰	۰/۸۷۸	۰/۹۸۴
$Chisq(۳)$	۰/۲۸۹	۰/۲۸۱	۰/۴۷۶	۰/۶۳۵
$Chisq(۵)$	۰/۲۱۰	۰/۱۷۸	۰/۳۲۱	۰/۳۸۶
$Exponential$	۰/۳۹۷	۰/۴۴۹	۰/۶۲۱	۰/۸۳۰
$Gamma(۲)$	۰/۲۳۴	۰/۲۱۶	۰/۳۸۰	۰/۴۹۶
$Gamma(۳)$	۰/۱۷۷	۰/۱۵۰	۰/۲۸۰	۰/۳۲۷
$Weibull(۲)$	۰/۱۱۹	۰/۰۸۶	۰/۱۵۹	۰/۱۴۶
$Beta(۲, ۱)$	۰/۰۲۱	۰/۱۴۵	۰/۰۷۳	۰/۳۲۰
$Beta(۳, ۱)$	۰/۰۱۴	۰/۲۲۳	۰/۰۳۴	۰/۴۹۳
$Beta(۲, ۳)$	۰/۰۹۷	۰/۰۵۸	۰/۱۱۶	۰/۰۷۳
$Beta(۴, ۲)$	۰/۰۲۶	۰/۰۷۲	۰/۰۳۵	۰/۱۲۸

۶ بحث و نتیجه‌گیری

توان آزمون‌های نیکویی برازش برای سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت بر مبنای آنتروپی با آزمون‌های دیگر مقایسه و نشان داده شد که این آزمون‌ها دارای توان کمتری نسبت به آزمون‌های مقایسه شده هستند. در واقع این نتیجه در مقایسه با آزمون‌های مطرح در این مقاله درست است و اگر آزمون‌های بر مبنای آنتروپی را با آزمون‌های دیگر همچون کلموگروف-اسمیرنوف[۶]، کوپر[۷]، ون-سوست[۸]، فینکلستین-اسچفر[۹]، اندرسون-دارلینگ[۱۰]، کرامر-وانمیس[۱۱] و واتسون[۱۲] مقایسه کنیم خواهیم دید که آزمون‌های بر مبنای آنتروپی دارای توان بهتری هستند و بر این آزمون‌ها برتری دارند، همانطوری که نویسندگان مقالات آزمون‌های بر مبنای آنتروپی اینکار را انجام داده‌اند. (برای مثال ابراهیمی و همکاران، ۱۹۹۲ و دادویچ و وندرمولن، ۱۹۸۱ را ببینید). مثال پایانی نشان دهنده آن است که نتیجه بالا تنها برای سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت درست می‌باشد و برای آزمون‌های دیگر بر مبنای آنتروپی ممکن است برقرار نباشد.

پیوست الف.

$$Normal(\mu,\sigma^2);\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\qquad -\infty<x<+\infty$$

$Skew\ Distriutions:$

$$Exp(\sigma);\quad f(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\{-\frac{x}{\sigma}\}\qquad 0\le x<\infty$$

$$Gamma(\alpha,\beta);\quad f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\exp\{-\frac{x}{\beta}\}\qquad 0\le x<\infty$$

$$Beta(\alpha,\beta);\ f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},\ 0\le x\le 1,\ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$Weibull(\alpha,\beta);\quad f(x)=\frac{\alpha}{\beta^\alpha}x^{\alpha-1}\exp\{-(\frac{x}{\beta})^\alpha\}\qquad 0\le x<\infty$$

---

۶ Kolmogorov-Smirnov

۷ Kuiper

۸ Van-Soest

۹ Finkelstein-Schafer

۱۰ Anderson-Darling

۱۱ Cramer von Mises

۱۲ Watson

$$Chi-Square;\quad f(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{v}{2})2^{v/2}})x^{(\frac{v}{2})-1}\exp\{-\frac{x}{2}\}\qquad 0\le x<\infty$$
$$Lognormal;\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\qquad 0\le x<\infty$$
$$Half-Normal;\quad f(x)=(\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma})\exp\{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}\qquad 0\le x<\infty$$
$$Half-Cauchy;\quad f(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}\qquad 0\le x<\infty$$
$$Long-tailed\ Symmetric\ Distributions\ (Kurtosis>3):$$
$$Logistic;\quad f(x)=(\frac{1}{\sigma})\frac{\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}}{(1+\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\})^2}\qquad -\infty<x<+\infty$$
$$Cauchy;\quad f(x)=\frac{1}{\pi\sigma}.\frac{1}{1+(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\qquad -\infty<x<+\infty$$
$$Student\ t;\quad f(x)=\frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)}.\frac{1}{\sqrt{\pi v}}(1+(\frac{x^2}{v}))^{-(v+1)/2}\qquad -\infty<x<+\infty$$
$$Short-tailed\ Symmetric\ Distributions\ (Kurtosis<3):$$
$$Uniform;\quad f(x)=\frac{1}{b-a}\qquad a\le x\le b$$
$$A_k;\quad f(x)=k(1-x)^{k-1}\qquad 0\le x\le 1$$
$$B_k;\quad f(x)=\begin{cases}2^{k-1}kx^{k-1} & 0\le x\le 0.5\\ 2^{k-1}k(1-x)^{k-1} & 0.5\le x\le 1\end{cases}$$
$$C_k;\quad f(x)=\begin{cases}2^{k-1}k(0.5-x)^{k-1} & 0\le x\le 0.5\\ 2^{k-1}k(x-0.5)^{k-1} & 0.5\le x\le 1\end{cases}$$
$$Tukey;\ Generated\ as\ [u^l-(1-u)^l]/l,\ u\,is\,uniform(0,1)$$
$$(1+u)^k+(2-u)^k;\quad u\,is\,Uniform(0,1)$$
$$(1+u)^k;\quad u\,is\,Uniform(0,1)$$

پیوست ب.

برای توزیع‌های آماری معروف مانند نرمال، نمایی، وایبل و غیره از دستورات نرم‌افزار آماری R استفاده می‌کنیم. بطور مثال دستورات $rnorm$ و $rweibull$ به ترتیب برای تولید داده از توزیع نرمال و وایبل بکار می‌رود. اما برای توزیع‌هایی مانند A_k، B_k، C_k و $Tukey$ که در پیوست الف آمده است باید از قضیه تبدیل وارون استفاده کرده و سپس برنامه تولید داده از توزیع مورد نظر را بنویسیم.(برای توضیحات بیشتر راس، ۲۰۰۲ ببینید). به عنوان مثال در اینجا چگونگی تولید داده از

توزیع B_k را شرح می‌دهیم. ابتدا تابع توزیع B_k را بدست می‌آوریم. داریم

$$F_{B_k}(x) = \begin{cases} 2^{k-1}x^k & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - 2^{k-1}(1-x)^k & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

با استفاده از قضیه تبدیل وارون داریم.

$$u = 2^{k-1}x^k \Rightarrow x = \sqrt[k]{\frac{u}{2^{k-1}}}$$

$$u = 1 - 2^{k-1}(1-x)^k \Rightarrow x = 1 - \sqrt[k]{\frac{1-u}{2^{k-1}}}$$

حال به کمک برنامه زیر می‌توان به تعداد دلخواه‌ی n، داده از توزیع B_k تولید کرد.

BB=function(n,k){

x=c()

for(i in 1:n){

u=runif(1)

if(u ¡ 0.5) $x[i] = (u/2^{k-1})^{1/k}$

else $x[i] = 1 - ((1-u)/2^{k-1})^{1/k}$

}

return(x)

}

برای محاسبه توان آزمون نمایی بودن ابتدا برای مثال برنامه اول نقاط بحرانی آزمون را محاسبه نموده، سپس توسط برنامه دوم توان آزمون محاسبه می‌شود.

برنامه اول:

```
alpha=0.10;n=20;B=10000;kc=c();m=4
for(b in 1:B){
x=sort(rexp(n));h1=log(mean(x))+1;h2=vasicek(n,m,x)
kmn=-h2+h1
kc=c(kc,kmn)
```

```
}
qc=quantile(kc,1-alpha)
qc
```

برنامه دوم:

```
alpha=0.10;n=20;B=10000;kc=c();m=4
for(b in 1:B){
x=sort(rweibull(n,2));h1=log(mean(x))+1;h2=vasicek(n,m,x)
kmn=-h2+h1
kc=c(kc,kmn)
}
pow=length(kc[kc > qc])/B
pow
```

که در آن

```
vasicek=function(n,m,x){
hv=c();x=sort(x)
for(i in 1:n){i1=i-m;i2=i+m
if(i1 <= 0){i1=1};if(i2 >= n){i2=n}
v=(x[i2]-x[i1])*n/2/m
if(v==0)hv[i]=0} else {hv[i]=log(v)}
}
return(mean(hv))
}
```

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از حمایت مالی قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد تقدیر و تشکر می‌کنند.

مراجع

Balakrishnan, N. (1983), Emprical Power Study of Multisample Test of Exponentiality Based on Spacings, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **18**, 265-271.

Cabilio, P. and Masaro, J. (1996), A Simole Test of Symmetry About an Unknown Median, *Canadian Journal of Statistics*, **24**, 349-361.

Correa, J. S. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.

Dudewicz, E. and Van der Meulen E. (1981), Entropy Based Tests of Uniformity, *Journal of the American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Dyer, D. and Harbin M. S. (1981), An Emprical Power Study of Multisample for Exponentiality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **12**, 277-291.

Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leiber Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **54**, 739-748.

Esteban, M. D., Castellanos, M. E. Morales D. and Vajda, I. (2001), Monte Carlo Comparison of Four Normality Tests Using Different Entropy Estimates, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **30**, 761-785.

Filliben, J. J. (1975), The Probability Plot Correltion Coefficient Test for Normality, *Technometrics*, **17**, 111-117.

Glen, A. G., Leemis, L. M. and Barr, D. R. (2001), Order Statistics in Goodness-of-Fit Testing, *IEEE Transaction on Reliablity*, **50**, 209-213.

Grzegorzewski, P. and Wieczorkowski, R. (1999), Entropy Based Goodness-of-Fit Test for Exponentiality, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **28**, 1183-1202.

Hall, P. and Morton, S. C. (1993), On the Estimation of Entropy, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **45**, 69-88.

Joe, H. (1989), Estimation of Entropy and Other Functionals of a Multivariate Density, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **41**, 683-697.

Pearson, E. S. and Hartley, H. O. (1972), *Biometrica Tables for Statisticians, Volumn 2*, Cambridge University Press.

Ross, S. M. (2002), Simulation, 3rd ed, *Academic Press.*

Senoglu, B. and Surucu, B. (2004), Goodness-of-Fit Tests Based on Kullback-Leibler Information, *IEEE Transaction on Reliablity*, **53**, 357-361.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal, Biometrica*, **27**, 379-423.

Shipiro, S. S. and Wilk, M. B. (1965), An Analysis of Variance Test for Normality, *Biometrica*, **52**, 591-611.

Smith, R. M. and Bain L. J. (1976), Correlation Type Goodness-of-Fit Statistics With Censored Sampling, *Communications in Statistics*, **A5** , 119-132.

Taufer, E. (2002), On Entropy Based Tests for Exponentiality,*Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **32**, 189-200.

Tiku, M. L. (1974), A New Statistic for Testing for Normality, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **3**, 223-232.

Tiku, M. L. (1980), Goodnes-of-Fit Statistics Based on the Spaing of Complete or Censored Samples, *Australian Journal of Statistics*, **22**, 260-275.

Tiku, M. L. (1981), A Goodness-of -Fit statistic Based on the Sample Spacings for Testing a Symmetrics Distribution Against Symmetric Alternatives, *Australian Journal of Statistics*, **23**, 149-158.

Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by a Class of Statistics Based on Spacings, *Scandinavian Journal of Statistics* , **19**, 61-72.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **38**, 54-59.

Yazici, B., and Yolacan, S. (2007), A Comparison of Various Tests of Normality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **77**, 175-183.

Zhao, L. C. and Zhang, H. (2001), A Centeral Limit Theorem for Testing Exponentiality, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **30**, 1163-1170.