

## برآوردگر ماکسیمم درستنمایی توزیع آلفا-پایدار

مهدی تیموری

گروه آمار، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه گنبد کاووس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۲/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۰۴

**چکیده:** خانواده توزیع‌های آلفا-پایدار از دو خاصیت چولگی و سنگینی دم برخوردار بوده و در نتیجه به‌طور گسترده‌ای در حوزه‌های مطالعاتی متعددی مورد استفاده قرار می‌گیرد. متأسفانه، برای تقریباً همه اعضای این خانواده، تابع چگالی با شکل تحلیلی وجود ندارد و در نتیجه یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای این توزیع به یک مسئله چالشی بدل شده است. در این مقاله، به‌منظور برطرف کردن این مشکل، نوعی الگوریتم EM پیشنهاد می‌شود. کارایی این الگوریتم به کمک شبیه‌سازی و همچنین تحلیل سه دسته از داده‌های واقعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. واژه‌های کلیدی: الگوریتم EM، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، توزیع آلفا-پایدار.

## ۱ مقدمه

ساختار فراوانی نسبی مشاهدات بدست آمده از برخی حوزه‌های مطالعاتی، همزمان از چولگی<sup>۱</sup> و دم‌های سنگین<sup>۲</sup> برخوردار است. به همین دلیل، طی چند دهه اخیر، توزیع‌های آلفا-پایدار توجه ویژه‌ای را به خود جلب کرده‌اند. برای نمونه، اثبات شده که توزیع گاوسی برای تحلیل آماری بازار سهام<sup>۳</sup> مناسب نبوده (مندلبرت، ۱۹۶۳) و برای تحلیل آماری دقیق، از توزیع‌های آلفا-پایدار استفاده می‌شود. خانواده توزیع‌های آلفا-پایدار طی مطالعاتی برای بررسی حدی مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، کشف و معرفی

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: مهدی تیموری، teimouri@aut.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E10، 60E07

<sup>1</sup>Skewness

<sup>2</sup>Heavy tails

<sup>3</sup>Stock market

شدند (لوی، ۱۹۲۴). برای آشنایی با توزیع‌های آلفا-پایدار به جانسون (۲۰۰۴) و کلییانوف و همکاران (۲۰۰۶) مراجعه شود. علاوه بر اقتصاد (مندلبرت و هادسون، ۲۰۰۷؛ اورتوبلی و راجو، ۲۰۱۰)، خانواده توزیع‌های آلفا-پایدار در علوم دیگری مانند زیست و فیزیک (اوکایکین و زولاتاریو، ۱۹۹۹) و مهندسی مخابرات (جانیکی و ورون، ۱۹۹۴؛ نیکیاس و شاهو، ۱۹۹۵) نیز کاربرد دارند. تنها برای سه عضو این خانواده یعنی نرمال، کوشی و لوی، شکل تحلیلی برای تابع چگالی وجود دارد و در نتیجه استفاده از این توزیع‌ها در عمل با مشکل مواجه خواهد شد. علیرغم عدم وجود ساختار تحلیلی برای تابع چگالی توزیع آلفا-پایدار، تابع مشخصه این خانواده از ساختار تحلیلی برخوردار بوده و در پارامترگذاری‌های متعددی ارائه می‌شود (نولن، ۱۹۹۸؛ زولاتاریو، ۱۹۸۶). در ادامه، دو نوع مشهور از پارامترگذاری‌های موجود یعنی  $S_1$  و  $S_2$  معرفی خواهند شد. اگر متغیر تصادفی  $Y$  دارای توزیع آلفا-پایدار باشد، آنگاه تابع مشخصه آن در پارامترگذاری  $S_1$  به صورت

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \exp\{-|\sigma t|^\alpha [1 - j\beta \operatorname{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{4})] + jt\mu_0 - jt\beta\sigma \tan(\frac{\pi\alpha}{4})\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\{-|\sigma t| [1 + j\beta \operatorname{sgn}(t) \frac{1}{\pi} \log |t|] + jt\mu_0 - j \frac{1}{\pi} t\beta\sigma \log \sigma\}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (1)$$

ارائه می‌شود به طوری که  $j^2 = -1$  و  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  تابع علامت است. پارامترهای این خانواده عبارتند از شاخص دم  $\alpha \in (0, 2]$ ، چولگی  $\beta \in [-1, 1]$ ، مقیاس  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ، و مکان  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ . در پارامترگذاری فوق، پارامتر  $\alpha$  اطلاعاتی درباره سنگینی دم توزیع ارائه می‌دهد. به عبارتی، هرچه  $\alpha$  کوچک‌تر شود سنگینی دم توزیع آلفا-پایدار بیشتر خواهد شد. در حالت  $\alpha = 2$ ، عضو از خانواده با بیشترین سنگینی دم که همان توزیع نرمال است تولید خواهد شد. پارامتر  $\beta$  درباره میزان انحراف از تقارن توزیع، حول میانه اطلاع می‌دهد. مثلاً، به ازای  $\beta = 0$ ،  $\beta = 1$  و  $\beta = -1$ ، توزیع آلفا-پایدار متقارن، کاملاً چوله به راست، و کاملاً چوله به چپ خواهد بود. لازم به ذکر است  $\mu_0$  پارامتر مکان است و هنگامی نقش میانگین را ایفا می‌کند که رابطه  $\alpha > 1$  برقرار باشد.  $\alpha \leq 1$ ، آنگاه میانگین وجود ندارد و میانه توزیع به‌عنوان شاخص تقارن فرض خواهد شد. توجه شود که  $\sigma$  پارامتر مقیاس است و نقش انحراف معیار را ایفا نمی‌کند، زیرا واریانس توزیع آلفا-پایدار برای  $\alpha < 2$  نامتناهی است. تابع مشخصه این خانواده در پارامترگذاری  $S_1$

به صورت

$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \exp \{ - |\sigma t|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \tan(\frac{\pi\alpha}{4})] + it\mu_1 \}, & \alpha \neq 1, \\ \exp \{ - |\sigma t| [1 + i\beta \operatorname{sgn}(t) \frac{\gamma}{\pi} \log |t|] + it\mu_1 \}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (2)$$

ارائه می‌شود به طوری که  $\mu_1 \in \mathbb{R}$  پارامتر مکان است. در این پارامترگذاری اگر  $\beta = 1$  و  $\alpha < 1$ ، آنگاه تکیه‌گاه<sup>۴</sup> متغیر تصادفی آلفا-پایدار، نیمه مثبت اعداد حقیقی خواهد بود. اگرچه تابع مشخصه و چگالی توزیع آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$ ، برحسب همه پارامترها پیوسته هستند، اما در پارامترگذاری  $S_1$  تابع مشخصه و چگالی توزیع آلفا-پایدار در نقطه  $\alpha = 1$  ناپیوسته هستند. همچنین، بین پارامترهای مکان دو پارامترگذاری فوق ارتباط

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu_0 - \beta\sigma \tan(\frac{\pi\alpha}{4}), & \alpha \neq 1, \\ \mu_0 - \beta\frac{\gamma}{\pi}\sigma \log \sigma, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (3)$$

برقرار است (نولن، ۱۹۹۸). همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اگر  $\beta = 0$ ، آنگاه دو پارامترگذاری یاد شده با یکدیگر هم ارز هستند. زین پس از نماد  $S_0(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0)$  و  $S_1(\alpha, \beta, \sigma, \mu_1)$  به ترتیب، برای نمایش توزیع‌های آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$  و  $S_1$  استفاده خواهد شد. از نماد  $\mathcal{N}(a, b)$  برای نمایش یک توزیع نرمال با میانگین  $a$  و واریانس  $b$  استفاده کرده و تابع چگالی مربوطه را با نماد  $\phi(\cdot, a, b)$  نشان داده می‌شود. همچنین، نماد  $\mathcal{E}(\lambda)$  نمایانگر یک توزیع نمایی با پارامتر نرخ  $\lambda > 0$  و  $\mathcal{W}(a, b)$  نشانگر یک توزیع ویبول با تابع چگالی  $f_W(w) = ab^{-a}w^{a-1} \exp\{- (w/b)^a\}$  است. همچنین،  $f_Y(\cdot | \alpha, \beta, \sigma, \mu_0)$ ،  $g(\cdot | \alpha)$  و  $h(\cdot | \alpha)$  به ترتیب، توابع چگالی توزیع‌های  $S_0(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0)$ ،  $S_1(\frac{\alpha}{4}, 1, (\cos(\pi\alpha/4))^{2/\alpha}, 0)$  و  $S_1(\alpha, 1, 1, 0)$  هستند. ساختار این مقاله به شرح زیر خواهد بود. در بخش ۲، یک نمایش تصادفی جدید از متغیر تصادفی آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$  ارائه خواهد شد. سپس به بیان برخی از خواص خانواده آلفا-پایدار و تعاریفی در ارتباط با الگوریتم EM<sup>۵</sup> و گسترش‌های آن اشاره خواهد شد. در بخش ۳، الگوریتم EM پیشنهادی ارائه و در بخش ۴، کارایی آن از طریق مطالعه شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی بررسی خواهد شد.

<sup>4</sup>Support

<sup>5</sup>Expectation maximization (EM)

## ۲ نمایش تصادفی متغیر تصادفی آلفا-پایدار

در این بخش یک نمایش تصادفی جدید برای متغیر تصادفی آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$  ارائه می‌شود.

قضیه ۱: فرض کنید متغیرهای تصادفی  $N, P$  و  $V$  همزمان مستقل هستند و  $Y \sim S_0(\alpha, \beta, \sigma, \mu_0)$  و  $V \sim S_1(\alpha, 1, 1, 0)$  و  $P \sim S_1(\alpha/2, 1, (\cos(\pi\alpha/4))^{2/\alpha}, 0)$  برای  $\alpha \neq 1$  داریم

$$Y \stackrel{d}{=} \eta \sqrt{2PN} + \theta V + \mu_0 - \lambda, \quad (4)$$

که در آن  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\lambda = \sigma\beta \tan(\pi\alpha/2)$ ,  $\theta = \sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}}$ ,  $\eta = \sigma(1 - |\beta|)^{\frac{1}{\alpha}}$  و نماد  $\stackrel{d}{=}$  بر یکسانی در توزیع دلالت دارد.

برهان: فرض کنید  $U \sim S_1(\alpha, 0, 1, 0)$  و  $V \sim S_1(\alpha, 1, 1, 0)$  از یکدیگر مستقل باشند. همچنین تعریف کنید  $Y = \sigma(1 - |\beta|)^{\frac{1}{\alpha}} U + \sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}} V + \mu_0 - \beta\sigma \tan(\frac{\pi\alpha}{4})$  در این صورت می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= E \exp \left\{ jt \left[ \sigma(1 - |\beta|)^{\frac{1}{\alpha}} U + \sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}} V + \mu_0 - \beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right] \right\} \\ &= E \exp \left\{ jt\sigma(1 - |\beta|)^{\frac{1}{\alpha}} U \right\} E \exp \left\{ jt\sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}} V + jt\mu_0 \right. \\ &\quad \left. - jt\beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - (1 - |\beta|) |\sigma t|^\alpha \right\} \exp \left\{ - |\beta| |\sigma t|^\alpha \left[ 1 - j \operatorname{sgn}(t\beta) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + jt\mu_0 - jt\beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - |\sigma t|^\alpha \left[ 1 - j \operatorname{sgn}(t) \beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right] + jt\mu_0 - jt\beta\sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right) \right\}, \end{aligned}$$

برای دستیابی به عبارت بعد از تساوی سوم از این واقعیت استفاده شده که اگر  $V \sim S_1(\alpha, 1, 1, 0)$  آنگاه  $\sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}} V \sim S_1(\alpha, \operatorname{sgn}(\beta), \sigma |\beta|^{\frac{1}{\alpha}}, 0)$  (نولن، ۱۹۹۸). عبارت بعد از تساوی آخر نیز تابع مشخصه متغیر تصادفی آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$  بوده که در رابطه (۱) داده شده است. اکنون به این حقیقت توجه شود که اگر  $U \sim S_1(\alpha, 0, 1, 0)$ ، آنگاه می‌توان  $U$  را به صورت مدل مقیاس نرمال

$$U \stackrel{d}{=} \sqrt{2PN}, \quad (5)$$

نمایش داد، به طوری که  $P \sim S_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}, 1, (\cos(\pi\alpha/4))^{2/\alpha}, 0\right)$  (سامورادینسکی و تاکو، ۱۹۹۴). عبارت (۵) را مدل مقیاس نرمال نامند، زیرا متغیر تصادفی  $U|P = p$  دارای توزیع نرمال  $N(0, 2p)$  است. سرانجام، با جایگزاری  $\sqrt{2PN}$  به جای  $U$  در عبارت زیر برهان کامل می‌شود.

$$Y = \sigma(1 - |\beta|)^{\frac{1}{\alpha}} U + \sigma \operatorname{sgn}(\beta) |\beta|^{\frac{1}{\alpha}} V + \mu_0 - \beta \sigma \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right),$$

لم ۱: (تیموری و همکاران، ۲۰۱۷) فرض کنید  $S \sim S_1(\alpha, 0, 1, 0)$  و  $E \sim \mathcal{E}(1)$  از یکدیگر مستقل باشند. آنگاه رابطه  $\frac{S}{\sqrt{2E}} \stackrel{d}{=} \frac{N}{W}$  برقرار است، به طوری که  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  و  $W \sim \mathcal{W}(\alpha, 1)$ .

## ۱۰۲ الگوریتم EM و گسترش های آن

وقتی با داده‌های گمشده<sup>۶</sup> یا پنهان<sup>۷</sup> روبرو هستیم، الگوریتم EM مرسوم‌ترین روش برای محاسبه برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای یک توزیع یا مدل آماری به‌شمار می‌رود (دمپستر و همکاران، ۱۹۷۷). فرض کنید که  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  به بردار داده‌های کامل با تابع چگالی  $d(\underline{x}|\theta)$  اشاره دارد که در آن  $\underline{x}_i = (y_i, \xi_i)^T$  به ترتیب شامل مقادیر مشاهده شده و گمشده است. همچنین،  $L_c(\theta) = \prod_{i=1}^n d(\underline{x}_i|\theta)$  نیز به لگاریتم تابع درست‌نمایی داده‌های کامل اشاره دارد به طوری که  $\theta$  بردار پارامتر است. اصولاً، به ازای یک حدس اولیه از  $\theta$  مانند  $\theta^{(t)}$ ، الگوریتم EM معمولی، مقداری از  $\theta$  را به‌عنوان برآوردگر ارائه می‌دهد که امید ریاضی لگاریتم تابع درست‌نمایی داده‌های کامل به ازای آن مقدار از  $\theta$  ماکسیمم شود. این فرآیند با قرار دادن  $\ell_c(\theta) = \log L_c(\theta)$  طی دو گام زیر تا همگرایی بردار  $\theta^{(t)}$  انجام می‌شود (مک کلان و کریشنان، ۲۰۰۷).

الف- گام امیدگیری: به ازای  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$  و  $\Theta^{(t)}$ ، امید ریاضی لگاریتم تابع درست‌نمایی داده‌های کامل یعنی  $Q(\theta|\Theta^{(t)}) = E(\ell_c(\theta)|\underline{y}, \Theta^{(t)})$  محاسبه شود، که در آن  $\ell_c(\theta) = \log L_c(\theta)$ .  
 ب- گام ماکسیمم‌سازی: مقداری از  $\theta$  که  $Q(\theta|\Theta^{(t)})$  را ماکسیمم می‌سازد به‌دست آورده شود.

### ۲.۱.۱ الگوریتم ECM

اگر پیاده‌سازی گام ماکسیمم‌سازی از الگوریتم EM به لحاظ ریاضی سخت باشد، علاوه بر دو گام امیدگیری و ماکسیمم‌سازی، یک گام دیگر به آن اضافه خواهد شد. با داشتن بخشی از فضای پارامتر، الگوریتم EM

<sup>6</sup>Missing

<sup>7</sup>Latent

روی بخش نامعلوم از فضای پارامتر پیاده خواهد شد. این کار با ماکسیم کردن لگاریتم تابع چگالی شرطی داده‌های کامل به شرط داشتن داده‌های مشاهده شده، معلوم دانستن بخشی از فضای پارامتر، و حدس اولیه از بخش نامعلوم فضای پارامتر انجام می‌شود (لیو و روبین، ۱۹۹۴؛ منگ، ۱۹۹۳).

### ۲.۱.۲ الگوریتم EM تصادفی

برای داده‌های کامل با اندازه  $n$ ، با فرض آنکه الگوریتم در تکرار  $t$  ام قرار دارد، پیاده‌سازی الگوریتم طی مراحل زیر انجام می‌شود.

- ۱- به ازای مقادیر  $\theta^{(t)}$  و  $y_i$ ، یک دنباله از مقادیر گمشده یعنی  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  از توزیع پسین  $\xi_i$  به شرط  $\theta^{(t)}$  و  $y_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  شبیه‌سازی خواهد شد.
- ۲- مشاهدات شبیه‌سازی شده در تابع لگاریتم داده‌های کامل جایگزین می‌شود.
- ۳- الگوریتم EM روی داده‌های کامل  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$  پیاده‌سازی خواهد شد.
- ۴- مقدار به‌روز شده به‌صورت  $\theta^{(t+1)}$  جهت شبیه‌سازی از چگالی پسین  $\xi_i$  به شرط  $\theta^{(t)}$  و  $y_i$  برای  $i = 1, \dots, n$  مورد استفاده قرار می‌گیرد.

با تکرار مراحل بالا، دنباله  $\{\theta^{(t+1)}\}_{t \geq 1}$  یک زنجیر مارکوف ارگودیک را تشکیل داده که به یک توزیع مانا همگرا خواهد شد (آی پی و همکاران، ۱۹۹۴؛ مک لکلان و کریشنان، ۲۰۰۷). توجه شود که در الگوریتم EM معمولی، همگرایی به‌صورت نقطه‌ای صورت می‌پذیرد در حالی که در الگوریتم EM تصادفی، همگرایی در توزیع رخ می‌دهد. لذا، بررسی شرط همگرایی الگوریتم EM تصادفی، غالباً به‌صورت تجربی انجام می‌پذیرد. اکنون فرض شود که  $M_0$  به طول دوره داغیدن<sup>۸</sup> اشاره داشته و  $M$  نیز مقداری به اندازه کافی بزرگ باشد. برآورد الگوریتم EM تصادفی از بردار پارامتر  $\theta$  به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{\theta} = \frac{1}{M - M_0} \sum_{t=M_0+1}^M \theta^{(t)}.$$

### ۳ الگوریتم EM پیشنهادی

اگر  $y_1, \dots, y_n$  مشاهدات تصادفی از توزیع آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S$  باشند، بردار داده‌های کامل مدل (۴) به‌صورت  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) = ((y_1, p_1, v_1), \dots, (y_n, p_n, v_n))$  نشان داده می‌شود،

<sup>۸</sup>Burn-in period

که در آن  $\underline{p}$  و  $\underline{v}$ ، به ترتیب بردار تحقق‌های متغیرهای پنهان  $P$  و  $V$  هستند. نمایش (۴) از رابطه سلسله مراتبی

$$\begin{aligned} Y|P = p, V = v &\sim \mathcal{N}(\mu_0 - \lambda + \theta v, \frac{1}{\nu} p \eta^2), \\ P &\sim S_1\left(\frac{\alpha}{\nu}, 1, (\cos(\pi\alpha/\nu))^{\frac{1}{\alpha}}, 0\right), \quad V \sim S_1(\alpha, 1, 1, 0), \end{aligned} \quad (۶)$$

پیروی می‌کند، به طوری که  $\theta$ ،  $\eta$  و  $\lambda$  بعد از رابطه (۴) تعریف شده‌اند. با استفاده از (۶)، لگاریتم تابع درست‌نمایی داده‌های کامل به صورت

$$\begin{aligned} \ell_c(\boldsymbol{\theta}) = & C - n \log \eta - \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - \mu_0 + \lambda - \theta v_i}{\sqrt{\frac{1}{\nu} p_i \eta}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \log f_{P_i}(p_i | \alpha) \\ & + \sum_{i=1}^n \log f_{V_i}(v_i | \alpha), \end{aligned}$$

است، که در آن  $C$  مقداری ثابت و مستقل از بردار پارامتر  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta, \sigma, \mu_0)^T$  است. برای محاسبه  $Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(t)}) = E(\ell_c(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{p}, \mathbf{v}) | \mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}^{(t)})$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta}^{(t)}) = & C - n \log \eta - \frac{\theta^2}{\nu \eta^2} \sum_{i=1}^n E_{v_i}^{(t)} + \frac{\theta}{\nu \eta^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_0 + \lambda) E_{v_i}^{(t)} \\ & - \frac{1}{\nu \eta^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_0 + \lambda)^2 E_{v_i}^{(t)} + \sum_{i=1}^n E(\log f_{P_i}(p_i | \alpha)) \\ & + \sum_{i=1}^n E(\log f_{V_i}(v_i | \alpha)). \end{aligned}$$

برای گام امیدگیری، کمیت  $E_{r_i}^{(t)} = E(P_i^{-1} V_i^r | y_i, \boldsymbol{\theta}^{(t)})$  به ازای  $r = 0, 1, 2$  به صورت

$$\begin{aligned} E_{r_i}^{(t)} = & \frac{1}{\nu \eta^{(t)} \sqrt{\pi} f_Y(y_i | \alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \sigma^{(t)}, \mu_0^{(t)})} \\ & \times \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p^{-1/\nu} v^r \exp \left\{ -\frac{1}{\nu} \left( \frac{y_i - \mu_0^{(t)} + \lambda^{(t)} - \theta^{(t)} v}{\sqrt{\frac{1}{\nu} p \eta}} \right)^2 \right\} h(v | \alpha^{(t)}) g(p | \alpha^{(t)}) dv dp, \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود، که در آن  $\theta^{(t)} = \sigma^{(t)} \text{sgn}(\beta^{(t)}) |\beta^{(t)}| \alpha^{(t)^{-1}}$ ،  $\eta^{(t)} = \sigma^{(t)} (1 - |\beta^{(t)}|) \alpha^{(t)^{-1}}$  و  $\lambda^{(t)} = \beta^{(t)} \sigma^{(t)} \tan\left(\frac{\pi \alpha^{(t)}}{\nu}\right)$  در پیوست ۳ داده شده است.

در ادامه، با فرض آنکه الگوریتم EM در  $t$  امین تکرار قرار دارد، گام های امیدگیری، ماکسیم سازی، و شرطی سازی به صورت زیر خواهند بود:

**گام امیدگیری:** به ازای حدس اولیه مانند  $\theta^{(t)}$ ، کمیت  $E_{r_i}^{(t)}$  برای  $i = 1, \dots, n$  محاسبه می شوند.  
**گام ماکسیم سازی:** به ازای حدس اولیه  $\theta^{(t)}$ ، مقداری از  $\theta$  که عبارت  $Q(\theta|\theta^{(t)})$  را ماکسیم می کند مشخص شده و  $\theta^{(t+1)}$  نامیده خواهد شد. در گام ماکسیم سازی، مقدار پارامتر مکان به صورت زیر به روز می شود.

$$\mu_{\circ}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i + \lambda^{(t)}) E_{\circ_i}^{(t)} + \theta^{(t)} \sum_{i=1}^n E_{\backslash_i}^{(t)}}{\sum_{i=1}^n E_{\circ_i}^{(t)}}$$

همچنین، با لحاظ کردن

$$b = \frac{\operatorname{sgn}(\beta^{(t)}) |\beta^{(t)}|^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_{\circ}^{(t+1)}) E_{\backslash_i}^{(t)}}{\sqrt[n]{n(1 - |\beta^{(t)}|)^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}}}}$$

$$- \frac{\beta^{(t)} \tan\left(\frac{\pi\alpha^{(t)}}{\sqrt[n]{n}}\right) \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_{\circ}^{(t+1)}) E_{\circ_i}^{(t)}}{\sqrt[n]{n(1 - |\beta^{(t)}|)^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}}}},$$

$$c = - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu_{\circ}^{(t+1)})^2 E_{\circ_i}^{(t)}}{\sqrt[n]{n(1 - |\beta^{(t)}|)^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}}}},$$

پارامتر مقیاس از طریق یکی از جواب های معادله درجه دو  $\mathcal{G}(\sigma) = \sigma^2 + b\sigma + c$  به صورت  $\sigma^{(t+1)}$  به روز می شود. توجه شود که تفاوت چندانی بین دو جواب معادله  $\mathcal{G}(\sigma)$  وجود نداشته و استفاده از هر یک از جواب ها مجاز است.

**گام شرطی سازی:** در این مرحله، پارامتر شاخص دم با ماکسیم کردن لگاریتم تابع چگالی حاشیه ای نسبت به  $\alpha$  به صورت

$$\alpha^{(t+1)} = \operatorname{argmax}_{\alpha} \sum_{i=1}^n \log f(y_i | \alpha, \beta^{(t+1)}, \sigma^{(t+1)}, \mu_{\circ}^{(t+1)})$$

به روز می شود. به همین منظور، در  $t$  امین تکرار از الگوریتم EM پیشنهادی، از یک الگوریتم EM تصادفی با مراحل سه گانه زیر استفاده خواهد شد.



۱- فرض کنید  $\{e_1, \dots, e_n\}$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $\mathcal{E}(1)$  باشد. تبدیل  $y_i^{**} = y_i^*/\sqrt{2e_i}$  را به ازای  $i = 1, \dots, n$  در نظر بگیرید که در آن

$$y_i^* = \frac{y_i - \theta^{(t+1)}v_i - \mu_o^{(t+1)} - \lambda^{(t+1)}}{\delta^{(t+1)}},$$

با  $\delta^{(t+1)} = \sigma^{(t+1)}(1 + |\beta^{(t+1)}|)^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}}$  و  $\lambda^{(t+1)} = \beta^{(t+1)}\sigma^{(t+1)} \tan\left(\frac{\pi\alpha^{(t)}}{4}\right)$  اکنون، با اندکی دقت می‌توان دریافت که  $Y_i^{**} \sim S_1(\alpha, \circ, \sigma, \circ)$  (نولن، ۱۹۹۸). پس به کمک لم ۱، رابطه سلسله مراتبی

$$Y_i^{**} | W_i = w_i \sim \mathcal{N}(\circ, w_i^{-2}), \quad W_i \sim \mathcal{W}(\alpha, 1),$$

برقرار است. بنابراین لگاریتم تابع درستنمایی داده‌های کامل عبارت است از

$$\ell_c(\alpha | y_i^{**}) = C + n \log \alpha - \sum_{i=1}^n w_i^\alpha + \alpha \sum_{i=1}^n \log w_i. \quad (7)$$

۲- با در نظر داشتن  $W$  به‌عنوان متغیر پنهان، بردار یافته‌های تصادفی  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n)$  را از توزیع پسین  $W_i$  به شرط  $Y_i^{**}$  و  $\alpha^{(t)}$ ، به ازای  $i = 1, \dots, n$  به کمک الگوریتمی پیشنهاد شده توسط تیموری و همکاران (۲۰۱۸) شبیه‌سازی می‌شود.

۳- پس از جایگزینی بردار یافته‌های  $\underline{w}$  در سمت راست عبارت (۷)، مقداری از  $\alpha$  که این عبارت را ماکسیمم می‌کند، مقدار به‌روز شده از این پارامتر یا  $\alpha^{(t+1)}$  معرفی خواهد شد. با در دست داشتن  $\alpha^{(t+1)}$ ، به گام اول الگوریتم EM تصادفی برگشته و سه گام بالا را برای  $M$  دفعه تکرار کنید. در این صورت، یک دنباله از مقادیر به‌روز شده از پارامتر شاخص دم به‌صورت  $\alpha^{(t+1,1)}, \dots, \alpha^{(t+1,M)}$  به‌دست خواهد آمد. در نهایت، مقدار به‌روز شده از پارامتر شاخص دم به‌صورت

$$\alpha^{(t+1)} = \frac{1}{M - M_o} \sum_{j=M_o+1}^M \alpha^{(t+1,j)},$$

ارائه می‌شود، که در آن  $M_o$  طول دوره داغیدن و  $\alpha^{(t,j)}$  مقدار به‌روز شده از پارامتر شاخص دم در  $j$ امین

تکرار از گام شرطی سازی و تکرار  $t$  از الگوریتم EM است. اکنون، با در دست داشتن  $\alpha^{(t+1)}$ ، و برگشت به گام امیدگیری، الگوریتم EM دوباره از گام امیدگیری برای تعداد کافی بزرگ، مثلا  $N$  مرتبه تکرار خواهد شد. به روز کردن پارامتر چولگی طی مراحل بالا معمولا به نتایج خوبی منجر نخواهد شد. به همین دلیل، با در دست داشتن مقادیر به روز شده از پارامترهای شاخص دم، مقیاس، و مکان، پارامتر چولگی از طریق ماکسیم سازی لگاریتم تابع چگالی حاشیه ای به صورت

$$\beta^{(t+1)} = \operatorname{argmax}_{\beta} \sum_{i=1}^n \log f_Y(y_i | \alpha^{(t+1)}, \beta, \sigma^{(t+1)}, \mu_{\circ}^{(t+1)}),$$

به روز خواهد شد. ب توجه شود که از  $N$  تکرار الگوریتم EM پیشنهادی، تنها تعدادی اندک از تکرارهای پایانی برای محاسبه برآوردگر مبتنی بر الگوریتم EM استفاده می شود. با در نظر گرفتن  $N$  به عنوان طول دوره داغیدن، برآوردگر مبتنی بر الگوریتم EM، از معدل گیری  $1 + N - N$  تکرار پایانی به دست می آید.

#### ۴ ارزیابی الگوریتم: شبیه سازی و مدل سازی داده های واقعی

در این فصل ابتدا به مقایسه کارایی الگوریتم EM پیشنهادی و برآوردگر ماکسیم درستنمایی از طریق شبیه سازی پرداخته و سپس کارایی آنها به وسیله مدل سازی داده های واقعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. قبل از پرداختن به نتایج شبیه سازی، توجه خواننده به نکاتی که در ادامه آمده جلب می شود.

الف- روش هایی مانند روش رگرسیونی (کوتروولیس ، ۱۹۸۰)، تابع مشخصه تجربی (کوگون و همکاران، ۱۹۹۸) و چندکی (مک کولا، ۱۹۸۶)، برای برآورد پارامترهای توزیع آلفا-پایدار وجود دارند. با دو دفعه لگاریتم گیری از طرفین رابطه (۲)، یک رابطه رگرسیونی تولید خواهد شد. بر اساس این خاصیت، روش های رگرسیونی و تابع مشخصه تجربی به برآورد پارامترهای توزیع آلفا-پایدار خواهند پرداخت. همچنین، فرض کنید  $x_{\circ.۲۵}$ ،  $x_{\circ.۵۰}$ ،  $x_{\circ.۷۵}$  و  $x_{\circ.۹۵}$  به ترتیب به چندک های ۱۵، ۵۰، ۷۵، ۹۵، ۱۲۵، ۱۵۰، ۱۷۵، ۱۹۵ توزیع آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_1$  اشاره دارند. روش چندکی با جدول بندی دو تابع

$$v_{\alpha} = \frac{x_{\circ.۹۵} - x_{\circ.۰۵}}{x_{\circ.۷۵} - x_{\circ.۲۵}} \quad v_{\beta} = \frac{x_{\circ.۹۵} + x_{\circ.۰۵} - 2x_{\circ.۵۰}}{x_{\circ.۹۵} - x_{\circ.۰۵}}$$

به ازای مقادیر ۲، ۱۸، ۰/۶، ۰/۵، ۱ و  $\alpha = ۰/۵$ ،  $\beta = ۰$ ،  $۰/۲۵$ ،  $۰/۵۰$ ،  $۰/۷۵$ ،  $۱$  و مقایسه مقادیر به دست آمده

با همتهای نمونه‌ای یعنی

$$\hat{v}_\alpha = \frac{\hat{x}_{\cdot 0.85} - \hat{x}_{\cdot 0.5}}{\hat{x}_{\cdot 0.75} - \hat{x}_{\cdot 0.25}} \quad \hat{v}_\beta = \frac{\hat{x}_{\cdot 0.85} + \hat{x}_{\cdot 0.5} - 2\hat{x}_{\cdot 0.5}}{\hat{x}_{\cdot 0.85} - \hat{x}_{\cdot 0.5}}$$

به برآورد پارامترهای این توزیع می‌پردازد. همان‌طور که معلوم است، روش چندکی تنها به ازای  $\alpha \geq 0.5$  قابل استفاده است. همچنین، بعد از برآورد همه پارامترها در پارامترگذاری  $S_1$ ، با استفاده از رابطه (۳)، می‌توان برآورد چندکی پارامتر مکان در پارامترگذاری  $S_0$  را نیز به‌دست آورد.

ب- برای شبیه‌سازی متغیر تصادفی آلفا-پایدار، از روش مرسوم استفاده شده است (چمپرز و همکاران، ۱۹۷۶؛ ورون، ۱۹۹۶). از بیان جزئیات مربوط به نحوه تولید متغیر تصادفی آلفا-پایدار خودداری کرده و صرفاً به بیان رابطه تولید متغیر تصادفی آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_0$ ، برای حالت  $\alpha \neq 1$  پرداخته می‌شود. فرض شود  $U$  و  $E$  دو متغیر تصادفی مستقل به‌ترتیب دارای توزیع یکنواخت روی بازه  $(-\pi/2, \pi/2)$  و نمایی با میانگین یک باشند. در این صورت رابطه

$$Y \stackrel{d}{=} \sigma \frac{\sin \alpha(\theta_0 + U)}{(\cos \theta_0 \cos U)^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(\alpha\theta_0 + (\alpha - 1)U)}{E} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} + \mu_0 - \beta \sigma \tan(\pi\alpha/2)$$

برقرار است، به‌طوری‌که  $\theta_0 = \arctan(\beta \tan(\pi\alpha/2))/\alpha$ .

ج- در این مطالعه، تمامی برنامه‌ها برای پیاده‌سازی الگوریتم EM در نرم افزار آماری R نوشته شده است (آر، ۲۰۱۸). این نرم افزار رایگان بوده و از سامانه <https://cran.um.ac.ir/> قابل دریافت است.

د- در هنگام شبیه‌سازی، برای برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی، رگرسیونی، و چندکی از نرم افزار STABLE که در سامانه <http://www.robustanalysis.com> موجود است استفاده شده است.

ه- ملاک کارایی، جذر میانگین توان دوم خطای<sup>۹</sup> (RMSE) برآوردگرها بوده و طی شبیه‌سازی، پارامترهای مورد نیاز برای پیاده‌سازی الگوریتم EM به‌صورت  $M_0 = 20$ ،  $M = 40$ ،  $N_0 = 100$ ، و  $N = 140$  تعریف شده‌اند. در شبیه‌سازی مشخص شد کارایی الگوریتم EM پیشنهادی اغلب از روش‌های رگرسیونی و چندکی بیشتر است. بنابراین دو روش رگرسیونی و چندکی از گردونه رقابت حذف شده‌اند.

<sup>9</sup>Root Mean Squared Error

#### ۱.۴ ارزیابی بر اساس شبیه‌سازی

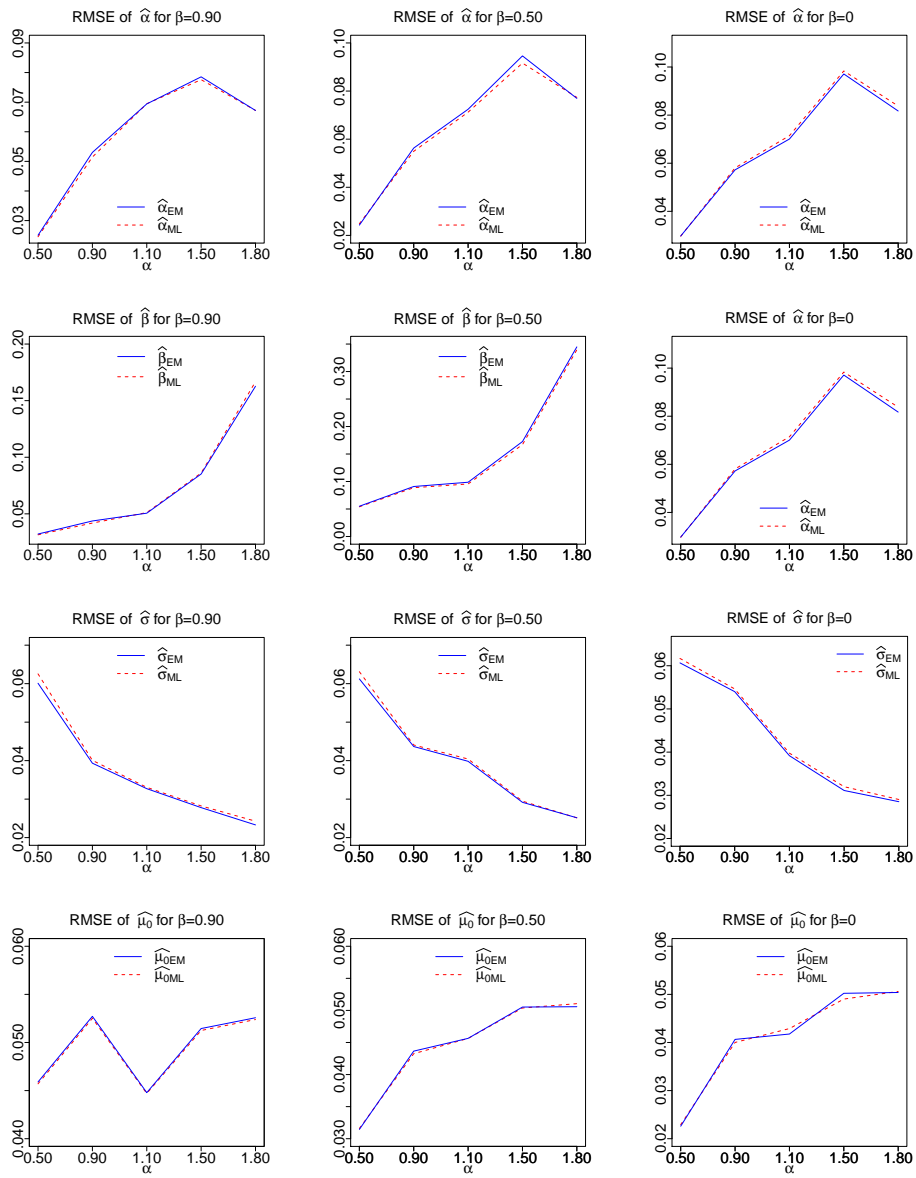
برای مقایسه کارایی دو روش الگوریتم EM و ماکسیمم درست‌نمایی، به تعداد ۳۰۰ نمونه تصادفی با اندازه‌های  $n = ۳۰۰$  و  $n = ۶۰۰$  از متغیرهای تصادفی آلفا-پایدار به ازای سطوح  $\alpha = ۰, ۰,۵, ۰,۸$ ،  $\beta = ۰, ۰,۵, ۰,۸, ۱,۲, ۱,۵$  و  $\sigma = ۰,۵, ۵$  شبیه‌سازی شده است. همچنین در همه حالات، پارامتر مکان برابر با صفر منظور شده است. نتایج شبیه‌سازی در شکل ۱ ( $n = ۳۰۰$  و  $\sigma = ۰,۵$ )، شکل ۲ ( $n = ۳۰۰$  و  $\sigma = ۵$ )، شکل ۳ ( $n = ۶۰۰$  و  $\sigma = ۰,۵$ )، و شکل ۴ ( $n = ۶۰۰$  و  $\sigma = ۵$ ) نمایش داده شده است. برآوردگرهای پارامترهای  $\alpha, \beta, \sigma$  و  $\mu_0$  که از طریق الگوریتم EM به دست آمده‌اند در هر شکل، به ترتیب با نمادهای  $\hat{\alpha}_{EM}, \hat{\beta}_{EM}, \hat{\sigma}_{EM}$  و  $\hat{\mu}_{EM}$  نمایش داده شده‌اند. این علائم برای برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی به ترتیب با نمادهای  $\hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{ML}, \hat{\sigma}_{ML}$  و  $\hat{\mu}_{ML}$  نشان داده شده‌اند. بر اساس این شکل‌ها می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

- ۱- برای سطح پایین از اندازه نمونه ( $n = ۳۰۰$ ) و سطح پایین از پارامتر مقیاس ( $\sigma = ۰,۵$ )، کارایی  $\hat{\sigma}_{EM}$  از  $\hat{\sigma}_{ML}$  بیشتر است.
- ۲- برای سطح پایین از اندازه نمونه ( $n = ۳۰۰$ ) و سطح بالا از پارامتر مقیاس ( $\sigma = ۵$ )، کارایی  $\hat{\alpha}_{EM}$  از  $\hat{\alpha}_{ML}$  بیشتر است. کارایی  $\hat{\beta}_{EM}$  از  $\hat{\beta}_{ML}$  است. همچنین، کارایی  $\hat{\sigma}_{EM}$  از  $\hat{\sigma}_{ML}$  بیشتر است.
- ۳- با افزایش اندازه نمونه از ۳۰۰ به ۶۰۰، جذر میانگین توان دوم خطای دو برآوردگر کاهش یافته که می‌تواند دلیلی بر سازگار<sup>۱۰</sup> بودن برآوردگرهای به دست آمده از دو روش باشد.
- ۴- به ازای هر سطح از اندازه نمونه و پارامتر چولگی، کارایی برآوردگرهای  $\hat{\sigma}_{EM}$  و  $\hat{\sigma}_{ML}$  با افزایش  $\alpha$  افزایش می‌یابد.
- ۵- به طور کلی، به ازای هر سطح از اندازه نمونه و پارامتر چولگی، کارایی برآوردگرهای  $\hat{\alpha}_{EM}, \hat{\alpha}_{ML}, \hat{\beta}_{EM}$  و  $\hat{\beta}_{ML}$  با افزایش  $\alpha$  کاهش می‌یابد.
- ۶- بر اساس این نتایج، در مجموع می‌توان کارایی روش الگوریتم EM را در مقایسه با روش ماکسیمم درست‌نمایی خوب فرض کرد.

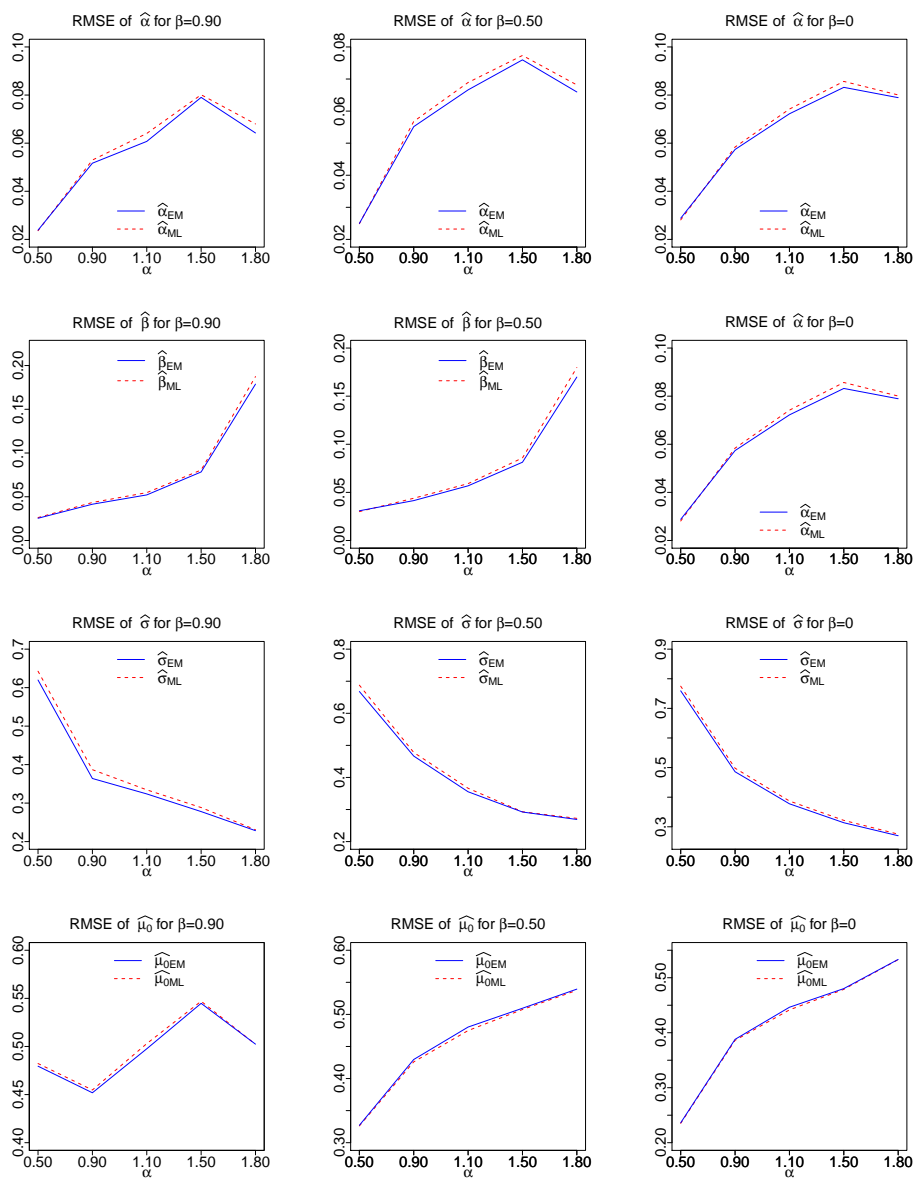
#### ۲.۴ ارزیابی برآوردگرها بر اساس داده‌های واقعی

توزیع‌های آلفا-پایدار از کاربرد فراوانی در مدیریت ریسک اقتصادی و بهینه‌سازی سبد سهام برخوردارند (مندلبرت، ۱۹۶۳؛ مک کولا، ۱۹۹۶؛ نولن، ۲۰۰۳؛ میتنیک، ۲۰۰۳). به همین دلیل، در ادامه به تحلیل

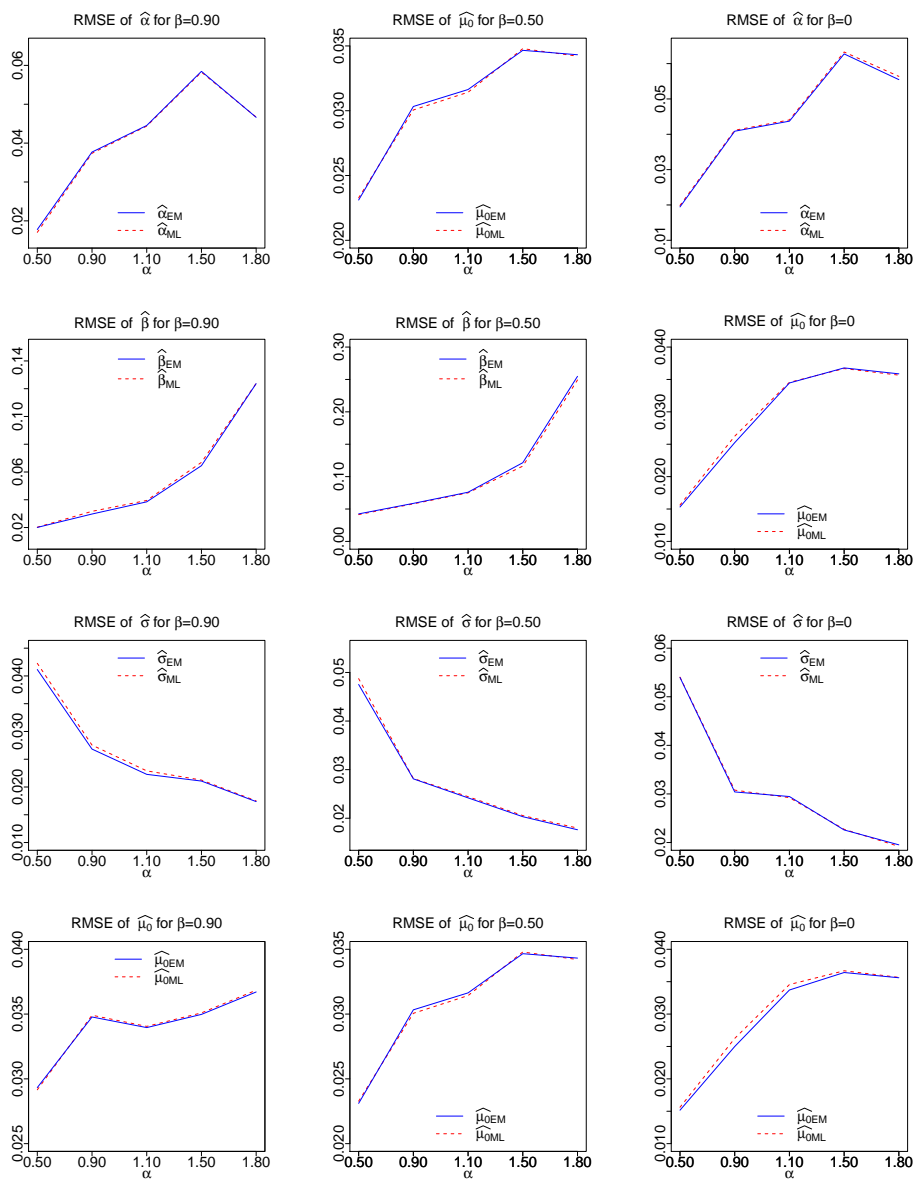
<sup>10</sup>Consistent



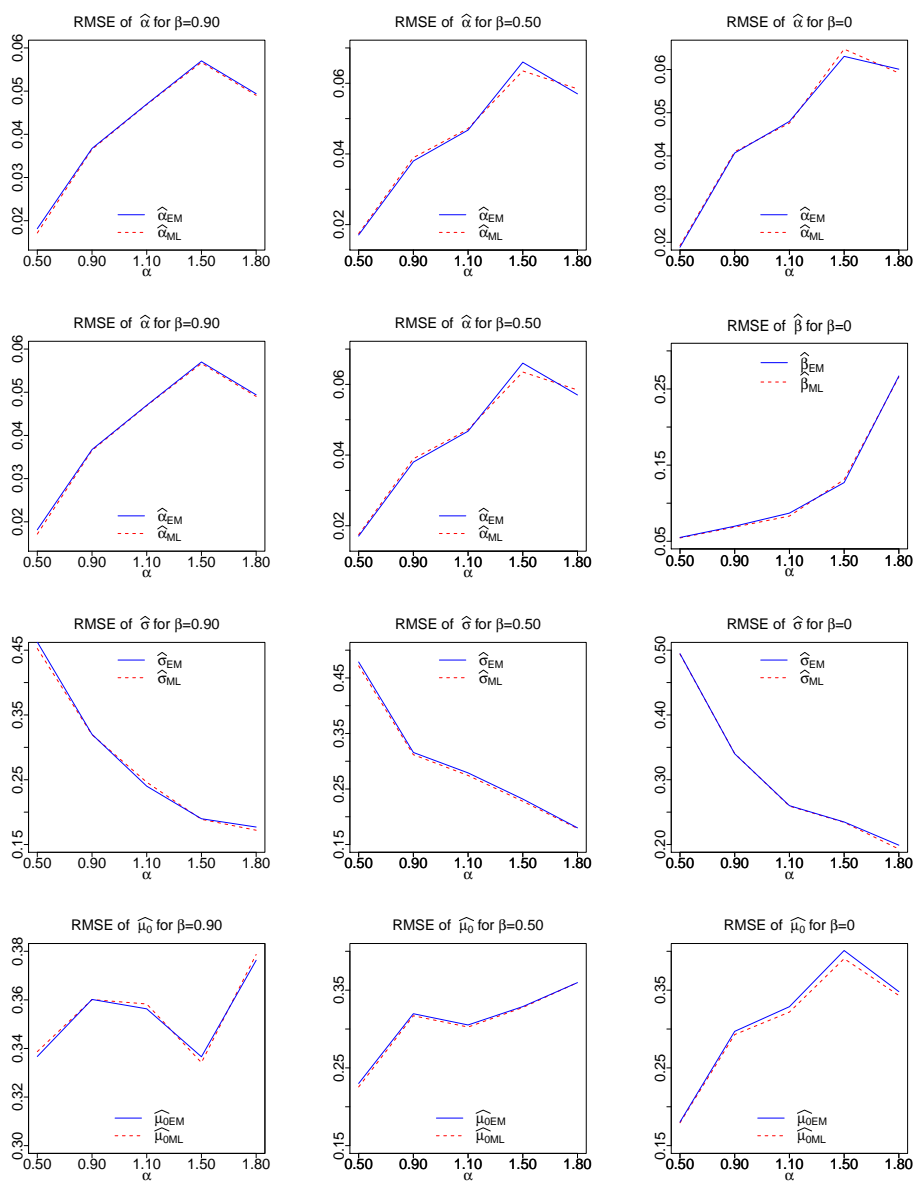
شکل ۱: جذر میانگین توان دوم خطای الگوریتم EM (خط ممتد) و روش ماکسیمم درستنمایی (خط چین) به ازای  $n = 300$ ,  $\sigma = 0.5$  و  $\mu_0 = 0$ .



شکل ۲: جذر میانگین توان دوم خطای الگوریتم EM (خط ممتد) و روش ماکسیمم درستنمایی (خط چین) به ازای  $n = 300$ ،  $\sigma = 5$  و  $\mu_0 = 0$ .



شکل ۳: جذر میانگین توان دوم خطای الگوریتم EM (خط ممتد) و روش ماکسیمم درستنمایی (خط چین) به ازای  $n = 600$ ,  $\sigma = 0.5$  و  $\mu_0 = 0$ .



شکل ۴: جذر میانگین توان دوم خطای الگوریتم EM (خط ممتد) و روش ماکسیمم درستنمایی (خط چین) به ازای  $n = 600$ ،  $\sigma = 5$  و  $\mu_0 = 0$ .



داده‌های واقعی از قیمت روزانه سود سهام مربوط به سه شاخص معروف France SMI، Switzerland CAC، و FTSE UK خواهیم پرداخت. این داده‌ها از درون متغیر بازار سهام اروپا از بسته داده که در نرم افزار R توسعه داده شده استخراج شده‌اند. برای هر شاخص ۱۸۶۰ مشاهده ثبت شده که نمایانگر قیمت روزانه سهام مربوط به این شاخص‌ها طی سال‌های ۱۹۹۱ تا ۱۹۹۸ است. اکنون مدل آلفا-پایدار به این داده‌ها برازش داده شده و برای برآورد پارامترهای آن از دو روش الگوریتم EM و ماکسیمم درست‌نمایی استفاده خواهیم شد. نتایج حاصل از برازش مدل آلفا-پایدار به این مجموعه از داده‌ها در جدول ۱ آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود الگوریتم EM پیشنهادی نسبت به روش ماکسیمم درست‌نمایی، بر حسب

جدول ۱: پارامترهای برآورد شده برای قیمت روزانه سهام سه شاخص معروف.

KS	log lik.	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	روش	نام داده
۰/۰۳۳۳۵	۶۱۶۸/۸۴۵	-۰/۰۰۱۰۶	۰/۰۰۵۴۱	۰/۱۵۱۸۹	۱/۷۶۴۶۰	الگوریتم EM	Switzerland SMI
۰/۰۲۵۳۱	۶۱۶۸/۵۲۸	-۰/۰۰۱۲۶	۰/۰۰۵۴۳	۰/۱۹۶۰۳	۱/۷۴۷۰۷	ماکسیمم درست‌نمایی	
۰/۰۰۳۰۱	۵۷۸۰/۲۴۸	-۰/۰۰۵۴۰	۰/۰۰۷۰۷	۰/۰۴۴۲۳	۱/۸۴۷۱۲	الگوریتم EM	France CAC
۰/۰۳۲۵۶	۵۷۸۰/۴۱۵	-۰/۰۰۰۶۲	۰/۰۰۷۱۳	۰/۰۸۸۶۳	۱/۸۶۷۱۴	ماکسیمم درست‌نمایی	
۰/۰۲۰۹۷	۶۳۹۶/۴۸۸	-۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۵۱۴	۰/۰۳۹۲۷	۱/۸۶۸۷۱	الگوریتم EM	UK FTSE
۰/۰۲۲۳۷	۶۳۹۶/۵۷۲	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۰۵۱۰	۰/۰۷۵۷۵	۱/۸۶۶۴۰	ماکسیمم درست‌نمایی	

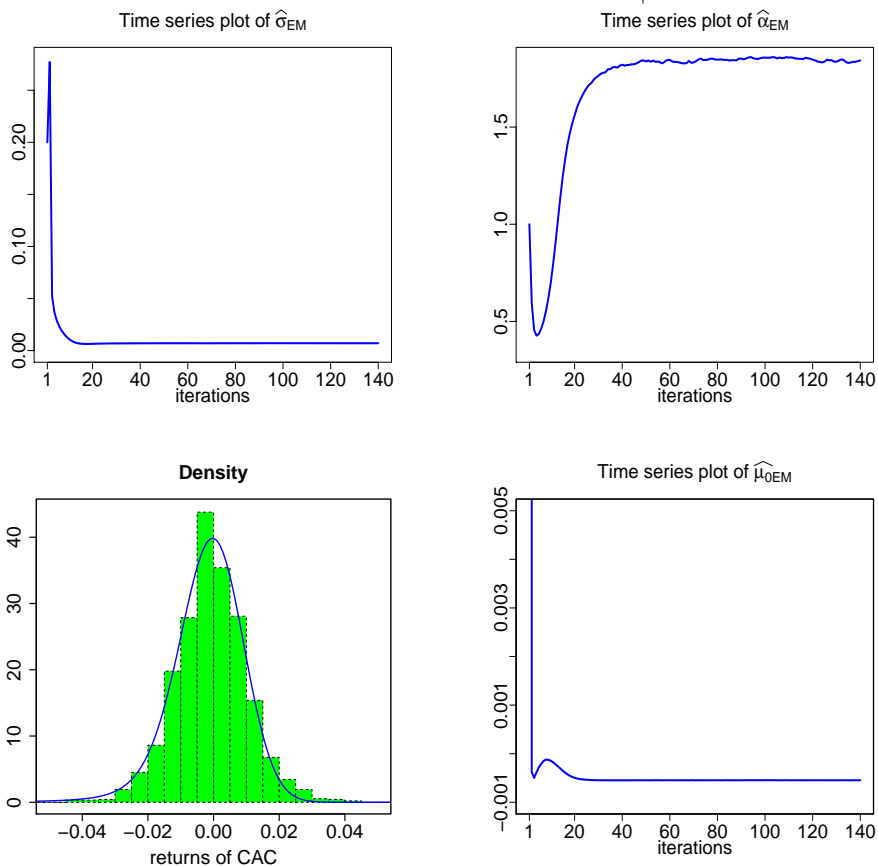
آماره‌های لگاریتم درست‌نمایی (log lik.) و کولموگروف-اسمیرنوف<sup>۱۱</sup> (KS) از کارایی بیشتری برخوردار است. آماره کولموگروف-اسمیرنوف به صورت

$$KS = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{F_Y(y|\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}, \hat{\mu}_0) - F_n(y)\},$$

تعریف می‌شود، که در آن  $F_Y(y|\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}, \hat{\mu}_0)$  تابع توزیع متغیر تصادفی آلفا-پایدار  $Y$  و  $F_n(y)$  تابع توزیع تجربی است. اکنون،  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$ ،  $\hat{\sigma}$ ، و  $\hat{\mu}_0$  به مقادیر برآورد شده از طریق الگوریتم EM یا ماکسیمم درست‌نمایی اشاره دارند. شکل ۵ نمودار سری زمانی مربوط به مقادیر به روز شده زنجیر مارکوف وقتی که الگوریتم EM روی داده‌های شاخص France CAC پیاده‌سازی شده است را نشان می‌دهد. مقادیر اولیه جهت شروع الگوریتم EM برای  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\sigma$ ، و  $\mu_0$ ، به ترتیب عبارتند از ۰/۸، ۰، ۰/۲۵، و ۰/۲۵. تابع چگالی برازش شده آلفا-پایدار به ازای پارامترهایی که از روش الگوریتم EM برآورد شده‌اند، به طور مناسبی به بافت‌نگار مشاهدات مربوط به قیمت سهام CAC برازش شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود

<sup>11</sup>Kolmogorov-Smirnov

زنجیر تقریباً بعد از تکرار ۱۳۰ام تمایل به همگرا شدن دارد.



شکل ۵: نمودار سری زمانی مقادیر به روز شده زنجیر مارکوف با الگوریتم EM.

## بحث و نتیجه‌گیری

توزیع‌های آلفا-پایدار از کاربرد وسیعی در حوزه‌های مختلف علمی برخوردارند. اما، به دلیل عدم وجود شکل تحلیلی برای تابع چگالی آنها، برآورد پارامترهای این خانواده با روش ماکسیمم درست‌نمایی فرآیند پیچیده‌ای دارد. در این مقاله، نوعی الگوریتم EM برای برآورد پارامترهای توزیع آلفا-پایدار در پارامترگذاری  $S_t$  ارائه شده است که نه تنها به آسانی در نرم افزار R قابل پیاده‌سازی است، بلکه کارایی آن در مقایسه با

روش ماکسیمم درستنمایی با شبیه‌سازی و مدل‌سازی داده‌های واقعی نشان داده شده است. هرچند زمان پیاده‌سازی الگوریتم EM پیشنهادی در مقایسه با روش‌های موجود زیاد است اما از دقت بیشتری برخوردار است. علاوه بر دقت بالا، به‌عنوان مزیت دیگر بر همه روش‌های معرفی شده در این مطالعه، می‌توان از قابلیت آن برای برآورد پارامترهای مدل‌های آلفا-پایدار چند متغیره و مدل‌های آلفا-پایدار آمیخته که با استقبال فراوانی از طرف محققین روبرو شده‌اند، اشاره کرد. در مطالعات آینده، سعی بر آن خواهد بود تا به این دو موضوع پرداخته شود. تمامی محاسبات انجام شده در این مطالعه، در نرم افزار R صورت گرفته و برنامه‌های رایانه‌ای بنا به درخواست فرستاده خواهد شد.

### پیوست ۱: محاسبه $E_{ri}^{(t)}$

در  $t$  امین تکرار الگوریتم EM پیشنهادی، برای  $i$  امین مقدار مشاهده شده مانند  $y_i$ ، سه ماتریس مربع با بعد  $K$  با نام‌های  $A$ ،  $B$ ، و  $C$  تعریف کنید. تصور کنید  $A_{rc}$  و  $B_{rc}$  به ترتیب نمایانگر درایه سطر  $r$  ام و ستون  $c$  ام به ازای  $r = 1, \dots, K$  و  $c = 1, \dots, K$  باشند. با این فرض که اعضای ماتریس  $A$  یافته‌های تصادفی از توزیع  $(\cdot, \circ, \frac{1}{2}, 1, (\cos(\pi\alpha^{(t)}/4))^{\frac{1}{\alpha^{(t)}}})$  و اعضای ماتریس  $B$  یافته‌های تصادفی از توزیع  $(\cdot, \circ, 1, 1, \alpha^{(t)})$  هستند، درایه سطر  $r$  ام و ستون  $c$  ام ماتریس  $C$  به صورت

$$\phi(y_i | \mu_{\circ}^{(t)} - \lambda^{(t)} + \eta^{(t)} B_{rc}, \frac{1}{2} A_{rc} (\theta^{(t)})^2),$$

خواهند بود، که در آن  $\phi(\cdot | \mu, \sigma^2)$  چگالی نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2$  است. حال می‌توان نوشت:

$$E_{\circ i}^{(t)} \approx \sum_{r=1}^K \sum_{c=1}^K \frac{C_{rc}}{B_{rc} K^2}, \quad E_{\backslash i}^{(t)} \approx \sum_{r=1}^K \sum_{c=1}^K \frac{A_{rc} C_{rc}}{B_{rc} K^2}, \quad E_{\vee i}^{(t)} \approx \sum_{r=1}^K \sum_{c=1}^K \frac{A_{rc}^2 C_{rc}}{B_{rc} K^2}.$$

همچنین،  $f_Y(y_i | \alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \sigma^{(t)}, \mu_{\circ}^{(t)})$  را می‌توان به صورت تقریب

$$f_Y(y_i | \alpha^{(t)}, \beta^{(t)}, \sigma^{(t)}, \mu_{\circ}^{(t)}) \approx \sum_{r=1}^K \sum_{c=1}^K \frac{C_{rc}}{K^2}.$$

به دست آورد. باید توجه شود که  $K$  باید مقداری به اندازه کافی بزرگ باشد. در این مقاله مقدار آن برابر با ۱۰۰ در نظر گرفته شده است.

## مراجع

- Chambers, J. M., Mallows, C. L., and Stuck, B. W. (1976), A Method for Simulating Stable Random Variables, *Journal of the American Statistical Association*, **71**, 340-344.
- Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)*, **39**, 1-38.
- Ip, E. H. S. (1994), A Stochastic EM Estimator for Handling Missing Data, Unpublished Doctoral Dissertation, Department of Statistics, Stanford University.
- Janicki, A. and Weron, A. (1994), *Simulation and Chaotic Behavior of  $\alpha$ -Stable Stochastic Processes*, Marcel Dekker, New York.
- Johnson, O. (2004), *Information Theory and the Central Limit Theorem*, Imperial College Press, London.
- Klebanov, L. B., Kozubowski, T. J., and Rachev, S. T. (2006), *Ill-posed Problems in Probability and Stability of Random Sums*, Nova Science Publishers, New York.
- Kogon, S. M. and Williams, D. B. (1998), Characteristic Function Based Estimation of Stable Parameters, In: Adler R, Feldman R, Taqqu M, Eds., *A Practical Guide to Heavy Tailed Data*, Boston: Birkhäuser, 311-338.
- Koutrouvelis, I. A. (1980), Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 918-928.
- Lévy, P. (1924), Théorie des Erreurs la Loi de Gauss et Les Lois Exceptionnelles, *Bullettin de la Société Mathématiques de France*, **52**, 49-85.
- Liu, C. and Rubin, D. B. (1994), The ECME Algorithm: A Simple Extension of EM and ECM with Faster Monotone Convergence, *Biometrika*, **81**, 633-648.
- Mandelbrot, B. B. (1963), The Variation of Certain Speculative Prices, *Journal of Business*, **36**, 394-419.
- Mandelbrot, B. B. and Hudson, R. L. (2007), *The Misbehavior of Markets: A Fractal View of Financial Turbulence*, Basic Books, Annotated Edition.

- McCulloch, J. H. (1986), Simple Consistent Estimators of Stable Distribution Parameters, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **5**, 1109-1136.
- McCulloch, J. H. (1996), 13 Financial Applications of Stable Distributions. *Handbook of statistics*, **14**, 393-425.
- McLachlan, G. J. and Krishnan, T. (2007), The EM Algorithm and Extensions, Second edition, John Wiley.
- Meng, X. L. and Rubin, D. B. (1993), Maximum Likelihood Estimation via the ECM Algorithm: A General Framework, *Biometrika*, **80**, 267-278.
- Menn, C. and Rachev, S. T. (2009), *Smoothly Truncated Stable Distributions, GARCH-Models, and Option Pricing*, *Math Methods Oper Res*, **69**, 411-438.
- Mittnik, S., Paoletta, M. S., and Rachev, S. T. (2002), Stationarity of Stable Power-GARCH Processes, *Journal of Econometrics*, **106**, 97-107.
- Mittnik, S. and Paoletta, M. S. (2003), Prediction of Financial Downside-Risk with Heavy-Tailed Conditional Distributions, In: Rachev, S.T. (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier Science, Amsterdam.
- Nikias, C. L. and Shao, M. (1995), *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*, Wiley, New York.
- Nolan, J. P. (1997), Numerical Calculation of Stable Densities and Distribution Functions, *Communications in Statistics. Stochastic Models*, **13**, 759-774.
- Nolan, J. P. (1998), Parameterizations and Modes of Stable Distributions, *Statistics and Probability Letters*, **38**, 187-195.
- Nolan, J. P. (2001), Maximum Likelihood Estimation of Stable Parameters, In Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T., and Resnick, I. (Eds.), *Lévy Processes: Theory and Applications*, 379-400, Birkhäuser, Boston.
- Nolan, J. P. (2003), Modeling Financial Data with Stable Distributions, Volume 1 of *Handbooks in Finance*, Chapter 3, pp. 105-130, Amsterdam: Elsevier.
- Ortobelli, S., Rachev, S. T., and Fabozzi, F. J. (2010), Risk Management and Dynamic Portfolio Selection with Stable Paretian Distributions, *Journal of Empirical Finance*, **17**, 195-211.

- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2018. URL <http://www.R-project.org>.
- Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994), *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models and Infinite Variance*, Chapman and Hall, London.
- Tang, X., Ma, M., Ostry, D. I., Jiao, B., and Guo, Y. J. (2009), Characterizing Impulsive Network Traffic using Truncated Alpha-Stable Processes, *IEEE Communications Letters*, **13**, 980-982.
- Teimouri, M., Rezakhah, S., and Mohammadpour, A. (2017), EM Algorithm for Symmetric Stable Mixture Model, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **47**, 582-604.
- Teimouri, M., Rezakhah, S., and Mohammadpour, A. (2018), Parameter Estimation using the EM Algorithm for Symmetric Stable Random Variables and Sub-Gaussian Random Vectors. *Journal of Statistical Theory and Applications*, *17*(3), 439-461.
- Uchaikin, V. V. and Zolotarev, V. M. (1999), *Chance and Stability: Stable Distributions and Their Applications*, VSP, Utrecht.
- Weron, R. (1996), On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables. *Statistics and Probability Letters*, **28**, 165-171.
- Zolotarev, V. M. (1986), *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.