مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۱، ص ۱۹۳ – ۲۱۸
DOI: 10.29252/jss.15.1.193
مقاله پژوهشی

مقایسه برآوردها و پیش‌گویی‌های بیز تجربی بر اساس طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و طرح نمونه‌گیری معکوس

احسان گل‌زاده گروی[1]، پرویز نصیری [1]، سیدمهدی صالحی [2]

[1]گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران
[2]گروه آمار، دانشگاه نیشابور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۱۲/۱۵

چکیده: در این مقاله برآورد بیز تجربی پارامتر توزیع نمایی تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس وقتی داده‌ها با طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی جمع‌آوری شده باشند، مورد بررسی قرار گرفته است. سپس پیش‌گویی نقطه‌ای و بازه‌ای مقادیر رکوردی حاصل از دنباله آینده مطالعه و نتایج به‌دست آمده از طرح نمونه‌گیری مذکور با نتایج حاصل از طرح نمونه‌گیری معکوس مقایسه شده‌اند. برای مقایسه برآوردگرها، از دو معیار مخاطره بیزی و مخاطره پسین و برای مقایسه پیش‌گویی‌های نقطه‌ای، از معیار میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی استفاده شده است. برای ارزیابی بازه‌های پیش‌گویی، متوسط طول بازه و احتمال پوشش ارائه شده‌اند. در ادامه دو روش برای برآورد ابرپارامترها ارائه و در یک مطالعه شبیه‌سازی و ارائه مثال واقعی، دو روش برآورد با هم مقایسه و عملکرد طرح‌های معرفی شده ارزیابی خواهند شد.

واژه‌های کلیدی: برآورد، پیش‌گویی، رکورد، بیز تجربی، نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: پرویز نصیری، pnasiri45@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62C12 62G25 62G30 .

۱ مقدمه

در یک طرح نمونه‌گیری با رهیافت بیزی برخلاف رهیافت کلاسیک، پارامتر مورد بررسی تحققی از یک متغیر تصادفی است که تغییرات آن توسط یک توزیع احتمال، تحت عنوان توزیع پیشین توصیف می‌شود. این توزیع پیشین به عنوان برآیند اطلاعات پژوهش‌گر درباره پارامتر، ممکن است به یک یا چند ابرپارامتر بستگی داشته باشد. ابرپارامترها می‌توانند ثابت یا متغیری تصادفی با یک توزیع خاص باشند. اگر متغیری تصادفی با یک توزیع خاص باشد، مبحث بیز سلسله مراتبی مطرح می‌شود. اگر ابرپارامتر ثابت قابل برآورد باشد، رهیافت بیز تجربی مطرح می‌شود. به عبارت دیگر، از دیدگاه آمار بیز تجربی توزیع پیشین به رده مشخصی از توزیع‌های آماری با پارامترهای نامعلوم اما ثابت تعلق دارد. برای جزئیات بیشتر از روش‌های بیز تجربی، به ماریتز و لووین (۱۹۸۹)، ایتچیسن و دنسمور (۱۹۷۵) و کارلین و لوییس (۲۰۰۰) مراجعه شود. هدف این مقاله، مقایسه برآوردها و پیش‌گویی‌های حاصل از طرح‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و نمونه‌گیری معکوس با رویکرد بیز تجربی است. منظور از برآورد، یافتن برآوردگر یا تابعی از نمونه تصادفی است که مقدار مشاهده شده آن به مقدار واقعی پارامتر جامعه نزدیک‌تر باشد. پیش‌گویی[1] به معنی پیدا کردن مقادیر متغیرهای تصادفی آینده یا توابعی از متغیرهای تصادفی با استفاده از مشاهدات است. در این مطالعه، پیش‌گویی از نوع نقطه‌ای و بازه‌ای بر اساس طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و طرح نمونه‌گیری معکوس مورد بررسی قرار گرفته است. پژوهش‌های بسیاری در زمینه پیش‌گویی انجام شده است. از آن جمله می‌توان به گیسر (۱۹۹۳)، لاولس (۱۹۷۷)، رقب و بالاکریشنان (۲۰۰۸)، احمدی و بالاکریشنان (۲۰۱۰)، میرمصطفائی و احمدی (۲۰۱۱)، صالحی و همکاران (۲۰۱۵) اشاره کرد. در بسیاری از آزمایش‌های کاربردی و بررسی دنباله‌ای از پدیده‌ها مانند ثبت مشاهدات هیدرولوژی، تعداد تصادفات در ماه‌های متوالی، زلزله، سیل و غیره، فقط تعداد محدودی مشاهدات در دسترس هستند که مقادیر آن‌ها از تمام مشاهدات ماقبل خود بزرگتر یا کوچکتر هستند. همین سبب می‌شود که آزمایش‌گر به تمامی مشاهدات دسترسی نداشته باشد، بنابراین ناچار است در چنین وضعیتی برای پیش‌گویی مقادیر آینده از همان تعداد محدود مشاهدات به عنوان مقادیر نمونه‌ای مشاهده شده استفاده کند که به مقادیر رکوردی معروفند. در اینجا مقادیر رکوردی به اختصار توضیح داده می‌شود. فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی مشترک $F(x;\theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد. در این صورت مشاهده X_j را یک رکورد بالا (پایین) گوییم، هرگاه با احتمال یک، برای همه مقادیر i که $X_j(<) > X_i,\ j > i$ برقرار باشد. در سراسر مقاله منظور از رکورد، رکورد بالا

[1] Prediction

است و $\{X_i, i \geq 1\}$ دنباله‌ای نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع دارای توزیع نمایی یک پارامتری است به‌طوری که

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0, \ \theta > 0. \tag{1}$$

برای اطلاعات بیشتر درباره رکوردها به، احسن‌اله (۱۹۹۵) ، آرنولد و همکاران (۱۹۹۸)، نوزوروف (۲۰۰۱) ، گولاتی و پادگت (۲۰۰۳) و رزمخواه و همکاران (۱۳۹۸) مراجعه شود. روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن مشاهدات وجود دارد. آنچه حائز اهمیت است، توانایی انتخاب یک روش مناسب نمونه‌گیری بر اساس طرح‌های مختلف است که موجب به حداکثر رساندن دقت خصیصه‌های جامعه و کاهش هزینه‌ها می‌شود. در این مطالعه، طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی[1] (RRSS) که ترکیبی از نمونه مجموعه رتبه‌دار و آماره‌های رکوردی است در نظر گرفته می‌شود. این طرح نخستین بار توسط صالحی و احمدی (۲۰۱۴) به عنوان جایگزین مناسبی برای طرح با رکوردهای معمولی معرفی شده است. ایده این طرح بر مبنای ساختار نمونه مجموعه رتبه‌دار است که توسط مک اینتایر (۱۹۵۲) پیشنهاد شد. طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی در سال‌های اخیر نگاه محققان را به خود معطوف نموده است. در این میان صالحی و احمدی (۲۰۱۵) مساله برآورد مدل تنش –مقاومت را در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی برای توزیع نمایی مطالعه کردند. هم‌چنین مساله نظریه اطلاع توسط اسکندرزاده و همکاران (۲۰۱۶) در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی مورد بررسی قرار گرفته است. پاوول و توماس (۲۰۱۷) نیز پیشنهاد کردند که به جای رتبه‌بندی کردن متغیر اصلی، رکوردهای متغیر همراه آن را به‌صورت چشمی مشخص کنند و سپس رکوردهای متناظر با آن‌ها را از نمونه متغیرهای اصلی استخراج کنند. اخیرا صفریان و همکاران (۲۰۱۹) نیز برآوردگرهای بهبود یافته‌ای برای مدل تنش–مقاومت در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی به‌دست آورده‌اند. به‌علاوه صالحی و همکاران (۲۰۱۶) مقایسه طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و طرح نمونه‌گیری معکوس را با مقایسه برخی از برآوردگرها تحت توزیع نمایی تک پارامتری به عنوان حالت خاصی از خانواده با نرخ خطر متناسب انجام داده‌اند. طرح‌های مزبور بر اساس میزان اطلاع فیشر نهفته در آن‌ها و معیارهای میانگین توان دوم خطا و پیتمن نزدیکی برای برخی پارامترهای مشخص شده مقایسه شده‌اند. دیده می‌شود با یک نمونه به اندازه به مراتب کم تر، در نتیجه با صرف هزینه بسیار کم‌تر در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی، به اطلاعاتی معادل با یک نمونه از طرح نمونه‌گیری معکوس دست پیدا می‌شود. این می‌تواند اولین مزیت طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار

[1] Record Ranked Set Sampling

رکوردی نسبت به طرح نمونه‌گیری معکوس باشد . به عنوان مزیت دوم می‌توان گفت ، میزان اطلاعات مفید و بسنده‌ای که در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی وجود دارد، خیلی بیشتر از اطلاعات نهفته شده در یک طرح نمونه‌گیری معکوس است. مزیت سوم این است که، به دلیل مستقل بودن واحدهای طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی، محاسبات ریاضی با رکوردهای به‌دست آمده از این طرح نسبت به رکوردهای نمونه گیری معکوس که به هم وابسته هستند، راحت‌تر است. اکنون قصد داریم مقایسه را از دیدگاه بیز تجربی مورد مطالعه قرار دهیم، به‌طوری‌که اگر نگرش‌مان را به حالت بیز تجربی تغییر دهیم، آیا هم‌چنان طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی نسبت به رقیب خود بهتر عمل می‌کند یا خیر. در بخش ۲ ابتدا طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی به اختصار معرفی می‌شود. سپس برآورد پارامتر توزیع نمایی با استفاده از روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس بر اساس داده‌های حاصل از نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی مورد مطالعه قرار می‌گیرد . در بخش ۳ ابرپارامترها با روش‌های گشتاورها و ماکسیمم درستنمایی برآورد می‌شوند. در ادامه، بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و نمونه‌گیری معکوس، برآوردگرهای بیز تجربی پارامتر توزیع، ارائه می‌شوند. در بخش ۵ به مساله یافتن پیش‌گویی‌های نقطه‌ای و بازه‌ای برای مقادیر رکورد حاصل از دنباله آینده بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و نمونه‌گیری معکوس با رهیافت بیز تجربی پرداخته و معیاری برای مقایسه کارایی پیشگویی‌های نقطه‌ای آورده می‌شود. سرانجام در بخش‌های ۶ و ۷ با استفاده از شبیه‌سازی و مجموعه داده‌های واقعی عملکرد طرح‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و نمونه‌گیری معکوس تحت دو روش برآورد ابرپارامترها با رهیافت بیز تجربی ارزیابی شده است.

۲ طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی

فرض کنید n دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی در اختیار است و نمونه‌گیری در هر دنباله به نحوی است که تنها رکوردها ثبت می‌شوند. هم‌چنین iامین نمونه‌گیری دنباله‌ای زمانی متوقف می‌شود که iامین رکورد ثبت شود. برای تحلیل آماری در دنباله iام، تنها مقدار رکورد iام حفظ می‌شود. به این طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی یا طرح B گفته می‌شود. مراحل استخراج نمونه‌ای با حجم n به روش نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی به کمک دیاگرام

$$\begin{array}{llllll}
1: \underline{R_{(1)1}} & & & & \rightarrow R_{1,1} = R_{(1)1} \\
2: R_{(1)2} & \underline{R_{(2)2}} & & & \rightarrow R_{2,2} = R_{(2)2} \\
\quad\vdots & \quad\vdots & & & \quad\vdots \quad\quad \vdots \\
n: R_{(1)n} & R_{(2)n} & \cdots & \underline{R_{(n)n}} & \rightarrow R_{n,n} = R_{(n)n}
\end{array}$$

نشان داده می‌شود، که در آن متغیر $R_{(i)j}$ نشان‌دهنده iامین رکورد در دنباله jام است. در واقع نمونه حاصل از طرح مذکور بردار n-بعدی، $R_B = (R_{1,1}, \cdots, R_{n,n})'$ است. باید توجه داشت، مشاهدات حاصل از این طرح مستقل هستند و این امکان وجود دارد که مرتب نباشند. صالحی و احمدی (۲۰۱۴) نشان دادند که آن‌ها با احتمال بیش از ۰/۵ دارای ترتیب صعودی هستند. فرض کنید $R_{i,i}$ها رکورد باشند، آن‌گاه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای iامین رکورد و تابع چگالی احتمال توام n رکورد به‌ترتیب به صورت

$$f_{i,i}(x) = \frac{\{-\log \bar{F}(x)\}^{i-1}}{(i-1)!} f(x), \tag{2}$$

$$f_{R_B}(r_B;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\{-\log \bar{F}(r_{i,i};\theta)\}^{i-1}}{(i-1)!} f(r_{i,i};\theta), \quad \theta \in \Theta, \tag{3}$$

هستند، که در آن‌ها $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$، $r_B = (r_{1,1}, r_{2,2}, \cdots, r_{n,n})'$ مقدار مشاهده شده R_B و Θ فضای پارامتر است (آرنولد و همکاران ، ۱۹۹۸).

۲.۱ برآوردگر بر اساس نمونه‌گیری از طرح B

اگر $L(\theta|r_B)$ تابع درستنمایی نمونه‌های استخراج شده بر اساس نمونه‌گیری از طرح B باشد، با استفاده از روابط (۱) و (۳) می‌توان نوشت

$$L(\theta|r_B) \quad \propto \quad \theta^N e^{-\theta t}, \tag{4}$$

که در آن $N=\frac{n(n+1)}{2}$ و $t=\sum_{i=1}^{n} r_{i,i}$ مقدار مشاهده شده $T=\sum_{i=1}^{n} R_{i,i}$ است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ به صورت

$$\hat{\theta}_{MLE}(B) \equiv U = \frac{N}{T} \ , \tag{۵}$$

است که تابعی از آماره بسنده مینیمال کامل T است. با توجه به روابط (۱) و (۲)، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای iامین رکورد، $R_{i,i}$، گاما با پارامترهای i و θ است. لذا متغیر تصادفی T دارای توزیع گاما با پارامترهای N و θ است. می‌توان نشان داد، $U|\theta$ دارای توزیع گامای معکوس با پارامترهای N و $N\theta$ است که تابع چگالی احتمال آن عبارت است از

$$f(u|\theta) = \frac{(N\theta)^N}{\Gamma(N)} u^{-N-1} e^{-\frac{N\theta}{u}}, \ \ u > 0. \tag{۶}$$

برای برآورد بیزی θ تابع زیان توان دوم خطای $L_1(\theta,\hat{\theta}) = (\hat{\theta}-\theta)^2$ و تابع زیان لاینکس به صورت $L_2(\theta,\hat{\theta}) = b[e^{a(\hat{\theta}-\theta)} - a(\hat{\theta}-\theta) - 1]$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن $a \neq 0$ و $b > 0$ ثابت، a شکل تابع زیان را مشخص می‌سازد و b برای مقیاس به کار برده می‌شود. بدون از دست دادن کلیت مساله $b=1$ در نظر گرفته شده است. برآوردگر بیزی θ تحت تابع زیان توان دوم خطا و مخاطره پسین متناظرش به ترتیب $E(\theta|r_B)$ و $V(\theta|r_B)$ است که معیار مخاطره پسین به صورت $r(\hat{\theta}) = E(L(\theta,\hat{\theta})|r_B)$ تعریف می‌شود. تحت تابع زیان لاینکس، برآوردگر بیزی θ و مخاطره پسین متناظرش به ترتیب به صورت $-\frac{1}{a}\ln[E(e^{-a\theta} \mid r_B)]$ و $a(E(\theta|r_B) - \hat{\theta}_{(BL)}(B))$ است. نمادهای $\hat{\theta}$ و $\hat{\theta}_{(BL)}(B)$ به ترتیب نشان‌دهنده برآوردگر پارامتر θ و برآوردگر بیزی θ تحت تابع زیان لاینکس بر اساس نمونه‌گیری از طرح B است. فرض کنید $\pi(\theta)$ یک توزیع پیشین مزدوج گاما، به صورت

$$\pi(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \qquad \theta > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \tag{۷}$$

باشد که در آن α و β پارامترهای توزیع پیشین هستند و $\Gamma(\cdot)$ تابع گامای کامل است. با استفاده از روابط (۴) و (۷) تابع چگالی پسین θ به صورت

$$\Pi(\theta|r_B) \propto \theta^{N+\alpha-1} e^{-\theta(\beta+t)}, \tag{۸}$$

خواهد شد، به عبارت دیگر $\theta|R_B \sim Gamma(N+\alpha, \beta+T)$. با استفاده از رابطه (۸) برآوردگرهای بیزی θ و مخاطره پسین متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B محاسبه و در جدول ۱ آورده شده‌اند.

جدول ۱. برآوردگر بیزی θ و مخاطره پسین متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B

تابع زیان	برآوردگر بیزی	مخاطره پسین
توان دوم خطا	$\frac{N+\alpha}{\beta+T}$	$\frac{N+\alpha}{(\beta+T)^{۲}}$
لاینکس	$\frac{N+\alpha}{a}\ln(۱+\frac{a}{\beta+T})$	$(N+\alpha)(\frac{a}{\beta+T}-\ln(۱+\frac{a}{\beta+T}))$

۳ برآوردگر بیز تجربی بر اساس نمونه‌گیری از طرح B

در این بخش، با این فرض که پارامترهای توزیع پیشین نامعلوم اما ثابت هستند با استفاده از دو روش گشتاورها و ماکسیمم درستنمایی به برآورد آن‌ها پرداخته می‌شود.

الف– روش گشتاورها (MM) :

فرض کنید پارامترهای توزیع پیشین $\alpha = g_۱(\mu'_۱, \dots, \mu'_k)$, $\beta = g_۲(\mu'_۱, \dots, \mu'_k)$ نامعلوم اما ثابت باشند به‌طوری که در آن‌ها $g_۱$ و $g_۲$ توابع عددی مشخص و μ'_r، rامین گشتاور مرکزی جامعه حول مبدا برای $r = ۱, \dots, k$ است. برای برآورد α و β به روش گشتاورها، به کمک روابط (۵)، (۶) و (۷)، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای U به صورت

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_{۰}^{\infty} f(u|\theta)\pi(\theta)d\theta \\ &= \frac{۱}{B(N,\alpha)u} q(u)^N (۱-q(u))^{\alpha}, \qquad u > ۰, \end{aligned} \tag{۹}$$

حاصل می‌شود، که در آن $q(u) = \frac{N}{N+\beta u}$ و $B(\cdot,\cdot)$ تابع بتای کامل است. با توجه به رابطه (۹) نتیجه می‌شود $\mu'_r = \frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(N-r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(N)}(\frac{N}{\beta})^r$ که در آن $\mu'_r = E(U^r)$ است . بر اساس نمونه‌گیری از طرح B ، برآوردهای α و β به روش گشتاورها به صورت

$$\widetilde{\alpha}_{\mathrm{B}} = \frac{(N-۱)q_۱^{۲}}{(N-۲)q_۲-(N-۱)q_۱^{۲}}\ , \quad \widetilde{\beta}_{\mathrm{B}} = \frac{Nq_۱}{(N-۲)q_۲-(N-۱)q_۱^{۲}}, \tag{۱۰}$$

محاسبه می‌شوند به‌طوری که $N \neq ۱, ۲$ ، $q_۱ = \bar{U}$ و $q_۲ = \bar{U}^۲$. با جایگزین کردن رابطه (۱۰) به جای α و β در جدول ۱ ، برآوردگرهای بیز تجربی به روش MM حاصل می‌شوند.

ب- روش ماکسیمم درستنمایی (ML) :
بر اساس نمونه‌گیری از طرح B ، با به‌کارگیری رابطه (۹) می‌توان نوشت

$$L(\alpha,\beta|u_j) = \prod_{j=۱}^{m} \frac{۱}{B(N,\alpha)u_j}(\frac{N}{N+\beta u_j})^N(\frac{\beta u_j}{N+\beta u_j})^\alpha, \quad u_j > ۰.$$

به دنبال آن معادلات درستنمایی زیر به شکل توابع غیرخطی که فرم بسته‌ای ندارند حاصل می‌شود

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = m(\Psi(N+\alpha) - \Psi(\alpha)) + \sum_{j=۱}^{m} \log \frac{\beta u_j}{N+\beta u_j}, \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \frac{m\alpha}{\beta} - (N+\alpha)\sum_{j=۱}^{m} \frac{u_j}{N+\beta u_j}, \qquad (۱۲)$$

که در آن $\Psi(x) = \frac{\partial \log \Gamma(x)}{\partial x}$. در اینجا برای به‌دست آوردن ریشه معادلات درستنمایی، بایستی از روش عددی مناسبی بهره گرفت. با قرار دادن $\hat{\alpha_{\mathrm{B}}}$ و $\hat{\beta_{\mathrm{B}}}$ به جای α و β در جدول ۱، برآوردگرهای بیز تجربی به روش ML به‌دست می‌آیند به طوری که $\hat{\alpha_{\mathrm{B}}}$ و $\hat{\beta_{\mathrm{B}}}$ ریشه معادلات درستنمایی و نشان‌دهنده برآورد α و β به روش ML و نمونه‌گیری از طرح B است.

۴ برآوردگر بیز تجربی بر اساس طرح نمونه‌گیری معکوس

فرض کنید آزمایش‌ها به صورت دنباله‌ای انجام شده و نمونه‌گیری زمانی خاتمه می‌یابد که رکورد nام مشاهده شود. در مباحث آماره‌های رکوردی به این طرح نمونه‌گیری معکوس[1] یا طرح A گفته می‌شود. در این طرح تعداد رکوردها ثابت است، در حالی که تعداد آزمایش‌ها تصادفی است. در واقع نمونه حاصل از این طرح، بردار n-بعدی $R_A = (R_۱, \cdots, R_n)'$، است که R_i بیانگر iامین رکورد مشاهده شده است. مشاهدات حاصل از این طرح برخلاف طرح B به هم وابسته‌اند. تابع چگالی احتمال توام نخستین n

[1] Inverse Sampling Scheme

رکورد اول به صورت

$$f_{R_A}(r_A;\theta)=f(r_n;\theta)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{f(r_i;\theta)}{\bar{F}(r_i;\theta)},\qquad r_1<\cdots<r_n, \tag{۱۳}$$

حاصل می‌شود که در آن $r_A=(r_1\cdots,r_n)'$ مقدار مشاهده شده R_A است (آرنولد و همکاران ، ۱۹۹۸). فرض کنید $L(\theta|r_A)$ تابع درستنمایی نمونه‌های استخراج شده بر اساس نمونه‌گیری از طرح A باشد. با استفاده از رابطه (۱) و جایگزینی آن در رابطه (۱۳) داریم

$$L(\theta|r_A)=\theta^n e^{-\theta r_n}. \tag{۱۴}$$

توزیع پسین براساس نمونه‌گیری از طرح A بر اساس روابط (۷) و (۱۴) به صورت زیر حاصل خواهد شد

$$\Pi(\theta|r_A)=\frac{(\beta+r_n)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}e^{-\theta(\beta+r_n)}. \tag{۱۵}$$

فرع ۱. با کمی دقت می‌توان دید ، اگر در نتایج طرح B به جای $(T،N)$ به ترتیب از $(R_n،n)$ استفاده شود، نتایج مرتبط با طرح A به‌دست می‌آیند. به عنوان مثال داریم

$$\begin{aligned}&\hat{\theta}_{MLE}(A)\equiv U'=\frac{n}{R_n},\\ &\widetilde{\alpha_{\text{A}}}=\frac{(n-1){q'_1}^2}{(n-2)q'_2-(n-1){q'_1}^2},\quad \widetilde{\beta_{\text{A}}}=\frac{nq'_1}{(n-2)q'_2-(n-1){q'_1}^2},\end{aligned} \tag{۱۶}$$

که در آن‌ها $n\neq 1,2$ ، $q'_1=\bar{U'}$ و $q'_2=\bar{U'^2}$ با $f(u')=\frac{1}{B(n,\alpha)u'}(\frac{n}{n+\beta u'})^n(\frac{\beta u'}{n+\beta u'})^\alpha$. به‌علاوه $\widetilde{\alpha_{\text{A}}}$ و $\widetilde{\beta_{\text{A}}}$ نشان‌دهنده برآورد α و β به روش MM و نمونه‌گیری از طرح A هستند.

۵ پیش‌گویی بیز تجربی مقادیر رکورد حاصل از دنباله آینده

در این بخش به مساله پیش‌گویی بیز تجربی مقادیر رکورد حاصل از دنباله آینده پرداخته می‌شود. ابتدا بر روی پیش‌گویی بیز تجربی نقطه‌ای با استفاده از داده‌های نمونه‌گیری حاصل از طرح B متمرکز می‌شویم.

۵.۱ پیش‌گویی بیز تجربی نقطه‌ای براساس نمونه‌گیری از طرح B

فرض کنید Y_s ، sامین رکورد حاصل از یک دنباله آینده باشد. تابع چگالی بیزی پیش‌گوی Y_s به شرط r_B عبارت خواهد بود از

$$f^*_{Y_s}(y|r_B) = \int_\theta f_{Y_s}(y|\theta)\Pi(\theta|r_B)d\theta.$$

با توجه به $Y_s \sim Gamma(s,\theta)$ و رابطه (۸) خواهیم داشت

$$f^*_{Y_s}(y|r_B) = \frac{1}{B(s,N+\alpha)y}p(y)^s(1-p(y))^{N+\alpha} \quad y>0, \quad s \geq 1, \tag{۱۷}$$

که در آن $p(y) = \frac{y}{\beta+t+y}$. ویژگی وابسته نبودن تابع چگالی بیزی پیش‌گوی به پارامتر θ، آن را به یک معیار مناسب برای پیش‌گویی مقادیر آینده بر اساس نمونه مشاهده شده تبدیل کرده است.

لم ۱. فرض کنید $r_B = (r_{1,1},\cdots,r_{n,n})'$ یک بردار به اندازه n از مشاهدات رکوردی استخراج شده تحت مدل نمایی بر اساس نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی باشد. علاوه بر این، Y_s، sامین رکورد حاصل از یک دنباله آینده باشد. در این صورت به ازای $s \geq 1$ ، متغیر تصادفی $Y_s|r_B$ با تابع چگالی پیش‌گوی بیزی $f^*_{Y_s}(y|r_B)$ و متغیر تصادفی $(\beta+T)\frac{W}{1-W}$ هم‌توزیع هستند به‌طوری که $W \sim Beta(s,N+\alpha)$ و مستقل از T است.

برهان: می‌دانیم W یک متغیر تصادفی پیوسته دارای توزیع بتا با تابع چگالی

$$f(w) = \frac{1}{B(s,N+\alpha)}w^{s-1}(1-w)^{N+\alpha-1}, \quad 0<w<1,$$

است. فرض کنید $Z = (\beta+T)\frac{W}{1-W}$ ، لذا $w = \frac{z}{\beta+t+z}$. چون مشتق w نسبت به z پیوسته و به ازای هر z ناصفر است، در نتیجه z تبدیلی یک به یک از w است. بنابراین Z دارای تابع چگالی

$$\begin{aligned} g(z) &= f(\frac{z}{\beta+t+z})\frac{\beta+t}{(\beta+t+z)^2} \\ &= \frac{1}{B(s,N+\alpha)z}p(z)^s(1-p(z))^{N+\alpha}, \quad z>0. \end{aligned}$$

خواهد بود که همان رابطه (۱۷) است. در نتیجه لم فوق ثابت می‌شود.

فرع ۲. می‌دانیم، اگر $X \sim Beta(c_1, c_2)$ آنگاه $\frac{c_2}{c_1}\frac{X}{1-X} \sim F_{2c_1,2c_2}$. بنابراین

$$\frac{N+\alpha}{s(\beta+T)}Y_s|r_B \sim F_{2s,2(N+\alpha)}.$$

پیش‌گوی بیزی نقطه‌ای Y_s تحت تابع زیان توان دوم خطا، میانگین توزیع پیش‌گو، یعنی

$$\hat{Y}_s^{(BS)} = E(Y_s|r_B) = \frac{s}{N+\alpha-1}(\beta+T), \tag{18}$$

است. میانگین توان دوم خطای این پیش‌گو نیز به صورت

$$E\big(\hat{Y}_s^{(BS)}-Y_s\big)^2 = \frac{s^2}{(N+\alpha-1)^2}\big(\frac{N}{\theta^2}+(\beta+\frac{N}{\theta})^2\big)-\frac{2s^2}{\theta(N+\alpha-1)}(\beta+\frac{N}{\theta})+\frac{s}{\theta^2}+\frac{s^2}{\theta^2}.$$

به دست می‌آید. پیش‌گویی بیزی نقطه‌ای Y_s تحت تابع زیان لاینکس نیز به صورت

$$\begin{aligned}\hat{Y}_s^{(BL)} &= -\frac{1}{a}\ln E_{f^*}(e^{-aY_s}|r_B)\\ &= -\frac{1}{a}\ln\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+s)}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma(N+\alpha-k)}{\Gamma(N+\alpha)}\frac{(-a(\beta+T))^k}{k!},\end{aligned} \tag{19}$$

است. میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی تحت تابع زیان لاینکس فرم بسته‌ای ندارد، لذا برای حل آن باید به سراغ روش عددی رفت. با به‌کارگیری رابطه (۱۰) به‌جای α و β در روابط (۱۸) و (۱۹)، پیش‌گویی‌های بیزی تجربی نقطه‌ای به روش MM حاصل می‌شوند. به طور مشابه می‌توان با استفاده از $\hat{\alpha}_{\mathrm{B}}$ و $\hat{\beta}_{\mathrm{B}}$ به پیش‌گویی‌های بیزی تجربی به روش ML و نمونه‌گیری از طرح B دست یافت.

۵.۲ پیش‌گویی بیز تجربی بازه‌ای براساس نمونه‌گیری از طرح B

برای ساختن بازه پیش‌گویی بیزی برای sامین رکورد از دنباله آینده به کمک تابع بقا، از رابطه (۱۷)، تابع بقای پیش‌گوی بیزی sامین رکورد حاصل از یک دنباله آینده به صورت

$$\bar{F}^*_{Y_s}(y|r_B) = \int_y^\infty \frac{1}{B(s, N+\alpha)z} p(z)^s (1-p(z))^{N+\alpha} dz, \tag{۲۰}$$

است. برای یافتن بازه پیش‌گویی بیزی $100(1-\gamma)$ درصدی، باید دو معادله

$$\bar{F}^*_{Y_s}(L(r_B)) = 1 - \frac{\gamma}{2}, \quad \bar{F}^*_{Y_s}(U(r_B)) = \frac{\gamma}{2}, \tag{۲۱}$$

حل شوند، که در آن‌ها $L(r_B)$ و $U(r_B)$ به ترتیب کران‌های پائین و بالای بازه هستند. از روابط (۲۰) و (۲۱) داریم

$$\int_0^{L(r_B)} \frac{1}{B(s, N+\alpha)z} p(z)^s (1-p(z))^{N+\alpha} dz = \frac{\gamma}{2},$$

با تغییر متغیر $p(z) = v$ نتیجه می‌شود

$$\int_0^{(1+\frac{\beta+t}{L(r_B)})^{-1}} \frac{1}{B(s, N+\alpha)} v^{s-1} (1-v)^{N+\alpha-1} dv = \frac{\gamma}{2}, \tag{۲۲}$$

با استفاده از رابطه (۲۲) به‌سادگی خواهیم داشت $L(r_B) = \frac{B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)}{1-B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)}(\beta+t)$. به‌طور مشابه $U(r_B) = \frac{B_{\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)}{1-B_{\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)}(\beta+t)$. که در آن $B_\gamma(s, N+\alpha)$ چندک مرتبه γام توزیع بتا با پارامترهای s و $N+\alpha$ است. بنابراین یک بازه پیش‌گویی بیزی برای Y_s به صورت

$$\left(\frac{B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s, N+\alpha)}{1 - B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s, N+\alpha)} (\beta+T), \frac{B_{\frac{\gamma}{2}}(s, N+\alpha)}{1 - B_{\frac{\gamma}{2}}(s, N+\alpha)} (\beta+T) \right), \tag{۲۳}$$

حاصل می‌شود. این یک بازه تصادفی است. لذا

$$\text{متوسط طول بازه پیش‌گویی} = (\frac{N}{\theta}+\beta)\Big\{\frac{B_{\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)-B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha)}{(1-B_{\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha))(1-B_{1-\frac{\gamma}{2}}(s,N+\alpha))}\Big\}.$$

با جایگزینی رابطه (۱۰) به‌جای α و β در رابطه (۲۳)، بازه پیش‌گویی بیز تجربی به روش MM و نمونه‌گیری از طرح B به‌دست می‌آید. به طور مشابه می‌توان با قرار دادن $\hat{\alpha_{\text{B}}}$ و $\hat{\beta}_{\text{B}}$ به‌جای α و β ، به بازه پیش‌گویی بیزی تجربی به روش ML و نمونه‌گیری از طرح B دست یافت.

۵.۳ پیش‌گویی بیز تجربی نقطه‌ای براساس نمونه‌گیری از طرح A

فرض کنید، $Y=R_s$ ، sامین رکورد حاصل از یک دنباله آینده براساس نمونه‌گیری از طرح A باشد. می‌خواهیم بر اساس مقادیر رکورد مشاهده شده، $r_A=(r_1,\cdots,r_n)'$ ، پیش‌گویی بیزی نقطه‌ای برای R_s، $s>n$ ، بیابیم. با کمک رابطه (۱) چگالی شرطی Y به شرط r_n را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} g(y|r_n) &= \frac{[\ln\frac{1-F(r_n)}{1-F(y)}]^{s-n-1}}{(s-n-1)!}\frac{f(y)}{\bar{F}(r_n)},\\ &= \frac{[y-r_n]^{s-n-1}}{(s-n-1)!}\theta^{s-n}e^{-\theta(y-r_n)}, \quad 0<r_n<y<\infty. \end{aligned} \tag{۲۴}$$

نوشت. از طرفی تابع چگالی بیزی پیش‌گوی Y به شرط r_A به صورت

$$g^*(y|r_A)=\int_\theta g(y|r_n)\Pi(\theta|r_A)d\theta,$$

تعریف می‌شود که با استفاده از روابط (۱۵) و (۲۴) به فرم

$$g^*(y|r_A)=\frac{(\beta+y)^{-(s+\alpha)}}{B(s-n,n+\alpha)}(\beta+r_n)^{n+\alpha}(y-r_n)^{s-n-1}, \quad 0<r_n<y, \tag{۲۵}$$

به‌دست می‌آید (احسن‌اله ، ۱۹۹۵). با استفاده از رابطه (۲۵) پیش‌گوی بیزی نقطه‌ای R_s تحت تابع زیان توان دوم خطا و نمونه‌گیری از طرح A به صورت

$$\hat{R}_s^{(AS)} = \int_{r_n}^{\infty} y g^*(y|r_A) dy = \frac{s+\alpha-۱}{n+\alpha-۱}(\beta+r_n)-\beta, \quad s>n, \qquad (۲۶)$$

است. معیار میانگین توان دوم خطای این پیش‌گو نیز به صورت

$$\begin{aligned} E\big(\hat{R}_s^{(AS)}-R_s\big)^۲ &= \beta^۲+\frac{۲s\beta}{\theta}+\big(\frac{s+\alpha-۱}{n+\alpha-۱}\big)^۲\big(\frac{n}{\theta^۲}+(\beta+\frac{n}{\theta})^۲\big) \\ &\quad -۲\beta\big(\frac{s+\alpha-۱}{n+\alpha-۱}\big)\big(\beta+\frac{n+s}{\theta}+\frac{n}{\beta\theta^۲}(s+۱)\big)+\frac{s}{\theta^۲}+\frac{s^۲}{\theta^۲}, \end{aligned}$$

است. هم‌چنین پیش‌گویی بیزی نقطه‌ای تحت تابع زیان لاینکس و نمونه‌گیری از طرح A به صورت

$$\hat{R}_s^{(AL)} = -\frac{۱}{a}\ln\int_{r_n}^{\infty} e^{-ay} g^*(y|r_A) dy, \qquad (۲۷)$$

خواهد بود که به‌روش عددی قابل محاسبه است. با جایگزینی رابطه (۱۶) به‌جای α و β در روابط (۲۶) و (۲۷)، پیش‌گویی‌های بیزی تجربی نقطه‌ای به روش MM و نمونه‌گیری از طرح A حاصل می شوند. برای مقایسه کارایی پیش‌گویی‌های نقطه‌ای به‌دست آمده از طرح‌های A و B ، معیار RE به صورت

$$RE = \frac{\text{برآورد میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی نقطه‌ای تجربی بر اساس نمونه‌گیری طرح B}}{\text{برآورد میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی نقطه‌ای تجربی بر اساس نمونه‌گیری طرح A}}, \qquad (۲۸)$$

تعریف می‌شود. اگر معیار RE کمتر از یک باشد، گواه محکمتری برای عملکرد بهتر طرح B است.

۵.۴ پیش‌گویی بیز تجربی بازه‌ای براساس نمونه‌گیری از طرح A

با توجه به رابطه (۲۵)، مشابه طرح B ، بازه پیش‌گویی بیزی بر اساس نمونه‌گیری از طرح A برای sامین رکورد حاصل از دنباله آینده به صورت

$$\left(\frac{\beta+R_n}{B_{\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)}-\beta, \frac{\beta+R_n}{B_{۱-\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)}-\beta\right), \qquad (۲۹)$$

ساده می‌شود. طول این بازه تصادفی تابعی از R_n است. خواهیم داشت

$$\text{متوسط طول بازه پیش‌گویی} = (\frac{n}{\theta}+\beta)\left\{\frac{B_{\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)-B_{۱-\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)}{B_{\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)B_{۱-\frac{\gamma}{۲}}(s-n,n+\alpha)}\right\}.$$

می‌توان با قرار دادن $\hat{\alpha_{\mathrm{A}}}$ و $\hat{\beta_{\mathrm{A}}}$ به‌جای α و β در رابطه (۲۹)، به بازه پیش‌گویی بیزی تجربی به روش ML در طرح A دست یافت . $\hat{\alpha_{\mathrm{A}}}$ و $\hat{\beta_{\mathrm{A}}}$ ریشه معادلات زیر و برآورد α و β به روش ML در طرح A است.

$$\frac{\partial \log L}{\partial\alpha}=m(\Psi(n+\alpha)-\Psi(\alpha))+\sum_{j=۱}^{m}\log\frac{\beta u'_j}{n+\beta u'_j},$$
$$\frac{\partial \log L}{\partial\beta}=\frac{m\alpha}{\beta}-(n+\alpha)\sum_{j=۱}^{m}\frac{u'_j}{n+\beta u'_j}.$$

۶ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش برای ارزیابی دو روش برآورد ابرپارامترها ، مقایسه عملکرد طرح‌های معرفی شده و محاسبه فرمول‌هایی که به صورت تحلیلی امکان‌پذیر نبود، از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده شده است. برای دستیابی به این هدف، برای پارامترهای توزیع پیشین (۷)، دو مورد (۱/۱ ,۳/۵) و (۰/۰۰۱ ,۰/۰۰۱) به ترتیب برای حالتهای آگاهی‌بخش و ناآگاهی‌بخش در نظر گرفته شده‌اند. مقدار واقعی پارامتر θ را ۱/۱۳۶ و اندازه‌های ۳، ۵ و ۸ را برای n در نظر گرفته شده است. هم‌چنین برای s مقادیر ۹ و ۱۱ و برای a مقادیر ۵ و ۱۰ اختیار شده است. توجه شود، از ویژگی‌های روش MM در برآورد ابرپارامترها (در این مطالعه) این است با توجه به رابطه (۱۰) ، اگر $m=۱$ (نمونه با اندازه تکی) باشد آن‌گاه $\widetilde{\alpha_{\mathrm{B}}}<۰$ و $\widetilde{\beta_{\mathrm{B}}}<۰$. در بسیاری از موارد برای mهای کوچک نیز، مقادیری منفی برای ابرپارامترها به دست می‌آید. به نظر می‌رسد روش MM برای استفاده، به اندازه نمونه بزرگ نیاز دارد. ابرپارامترها را به روش ML نیز برآورد کرده‌ایم. در روش MM برای هر n از $m=۱۵,۲۰$ و در روش ML برای هر n از $m=۲,۳,۱۵,۲۰$ استفاده شده است . الگوریتم ۱ بر اساس طرح B طراحی شده است. الگوریتم به شیوه نمونه‌گیری طرح A مشابه طرح B است.

الگوریتم ۱. بر اساس طرح B :

گام ۱- برای مقدار داده شده α و β ، با استفاده از توزیع پیشین (۷)، θ تولید می‌شود.
گام ۲- با θ تولید شده و با استفاده از رابطه (۱) و ساختار نمونه‌گیری در رابطه (۲) و دیاگرام طرح B، بردار مشاهدات رکوردی با اندازه مشخص n به صورت $r_B = (r_{1,1}, \cdots, r_{n,n})'$ استخراج می‌شود.
گام ۳- برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، برآوردگرهای بیزی θ و مخاطره پسین متناظرش بر اساس بردار r_B حاصل از گام ۲، با استفاده از رابطه (۵) و جدول ۱ محاسبه می‌شوند، هم‌چنین پیش‌گویی‌های بیزی نقطه‌ای تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹) به دست می‌آیند.
گام ۴- برای مقادیر مشخص α، β و θ از رابطه (۹) نمونه تصادفی $U_1, \ldots, U_m$ تولید می‌شود.
گام ۵- با استفاده از نمونه‌های تولید شده، در گام ۴، برآورد ابرپارامترهای α و β با کمک رابطه (۱۰) و روابط (۱۱) و (۱۲) به ترتیب تحت روش های MM و ML حاصل می‌شوند. با قرار دادن برآورد ابرپارامترهای α و β به دست آمده در روابط گام ۳، برآوردگرها و پیش‌گویی‌های بیز تجربی تحت روش‌های MM و ML حاصل می‌شوند.
گام۶- عبارت‌های $(\hat{\theta}_i - \theta)^2$ و $e^{a(\hat{\theta}_i - \theta)} - a(\hat{\theta}_i - \theta) - 1$ محاسبه می‌شوند که در آن $\hat{\theta}_i$ یکی از برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، بیزی، بیز تجربی است.
گام ۷- برآورد مخاطره بیزی تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس در ۱۰۰۰ بار تکرار به صورت

$$ER_1(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L_1(\theta, \hat{\theta}_i), \quad ER_2(\hat{\theta}_i) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L_2(\theta, \hat{\theta}_i)$$

محاسبه می‌شوند. مقادیر کوچکتر این معیار حاکی از دقت بیشتر و عملکرد بهتر است.
گام ۸- عبارت‌های $(\hat{Y}_i - Y_i)^2$ و $e^{a(\hat{Y}_i - Y_i)} - a(\hat{Y}_i - Y_i) - 1$ محاسبه می‌شوند، که در آن $\hat{Y}_i$ یکی از پیش‌گویی‌های بیز تجربی نقطه‌ای به دست آمده در این مطالعه است.
گام ۹- برآورد میانگین توان دوم خطای پیش‌گو، تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس در ۱۰۰۰ بار تکرار به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$MSPE_1(\hat{Y}_i, Y_i) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L_1(Y_i, \hat{Y}_i), \quad MSPE_2(\hat{Y}_i, Y_i) = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} L_2(Y_i, \hat{Y}_i)$$

گام ۱۰- مقادیر احتمال پوشش CP و میانگین طول بازه EL ، در ۱۰۰۰ بار تکرار به صورت

$$EL = \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000}(L_r - U_r), \quad CP = \frac{1}{1000}\sum_{r=1}^{1000} I(L_r \leq Y_i \leq U_r)$$

محاسبه می‌شوند، که در آن $I(A)$ تابع نشانگر مجموعه A است. جدول ۲ برآوردگرهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی θ ، ER و PR متناظرش بر اساس نمونه‌گیری طرح B را در حالت پیشین آگاهی‌بخش نمایش می‌دهد. $\hat{\theta}_{BS}(B)$ ، برآوردگر بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا ، $\hat{\theta}_{BL}(B)$ برآوردگر بیزی تحت تابع زیان لاینکس و $\hat{\theta}_{MLE}(B)$ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی بر اساس طرح B است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود ، با افزایش مقدار n مقادیر برآورد شده θ نزدیک به مقدار واقعی ۱/۱۳۶ می‌شوند. با افزایش n مقادیر ER و PR کاهش می‌یابند. به علاوه برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان لاینکس کمترین مخاطره بیزی را دارند. از نظر معیار مخاطره بیزی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی بهتر از برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا هستند. هم‌چنین از نظر معیار مخاطره پسین برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا بهتر از برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان لاینکس هستند. به عنوان مثال برای $n = 8$ و $a = 5$ داریم

$ER(\hat{\theta}_{BS}(B)) = 0/052$ ، $ER(\hat{\theta}_{BL}(B)) = 0/031$ و $ER(\hat{\theta}_{MLE}(B)) = 0/042$

اما بر اساس طرح A جدول ۱، جاهین (۲۰۰۴) را ببینید.

$ER(\hat{\theta}_{BS}(A)) = 0/1301$ ، $ER(\hat{\theta}_{BL}(A)) = 0/1310$ و $ER(\hat{\theta}_{MLE}(A)) = 0/1584$

مقایسه نتایج جاهین (۲۰۰۴) با نتایج جدول ۲ حاکی از آن است ، برآوردگرهای حاصل از طرح B مخاطره بیزی کمتری نسبت به برآوردگرهای حاصل از طرح A دارند. از جدول ۳ مشاهده می‌شود، نتایج حالت ناآگاهی‌بخش مشابه حالت آگاهی‌بخش است. به‌علاوه حالت ناآگاهی‌بخش منجر به تساوی مخاطره بیزی برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و برآوردگر بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا شده است.

جدول ۴ و جدول ۵ برآوردگرهای بیز تجربی پارامتر θ ، ER و PR متناظرش را به ترتیب برای روش‌های ML و MM و نمونه‌گیری از طرح B نشان می‌دهند. $\widetilde{\theta}_{EBL}(B)$ ، برآوردگر بیز تجربی θ به روش MM تحت تابع زیان لاینکس ،$\widetilde{\theta}_{EBS}(B)$ برآوردگر بیز تجربی θ به روش MM تحت تابع زیان توان دوم خطا ، $\hat{\theta}_{EBL}(B)$ ، برآوردگر بیز تجربی θ به روش ML تحت تابع زیان لاینکس ، $\hat{\theta}_{EBS}(B)$ ، برآوردگر بیز تجربی θ به روش ML تحت تابع زیان توان دوم خطا بر اساس طرح نمونه‌گیری B است. در هر دو روش برآورد برای هر n، با افزایش m مقادیر ER و PR کاهش می‌یابند. هم چنین به ازای

جدول ۲. برآوردگرهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی θ ، ER و PR متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B در حالت آگاهی‌بخش

LINEX						
$a=۱۰$			$a=۵$			
$ER(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$\hat{\theta}_{BL}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$\hat{\theta}_{BL}(B)$	n
۰/۰۸۰	۷/۲۳۱	۰/۹۳۸	۰/۰۹۱	۲/۴۶۰	۱/۱۶۹	۳
۰/۰۵۲	۳/۵۴۶	۱/۰۱۴	۰/۰۶۲	۱/۰۶۳	۱/۱۵۶	۵
۰/۰۲۸	۱/۶۳۲	۱/۰۷۱	۰/۰۳۱	۰/۴۴۷	۱/۱۴۵	۸

MLE			SEL			
	$ER(\hat{\theta}_{MLE}(B))$	$\hat{\theta}_{MLE}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{BS}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BS}(B))$	$\hat{\theta}_{BS}(B)$	n
	۰/۶۰۵	۱/۳۶۱	۰/۶۴۱	۰/۳۲۹	۱/۶۶۱	۳
	۰/۱۲۷	۱/۲۱۶	۰/۱۷۷	۰/۱۰۸	۱/۳۶۹	۵
	۰/۰۴۲	۱/۱۶۶	۰/۰۵۲	۰/۰۴۰	۱/۲۳۴	۸

جدول ۳. برآوردگرهای بیزی و ماکسیمم درستنمایی θ ، ER و PR متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B در حالت ناآگاهی‌بخش

LINEX						
$a=۱۰$			$a=۵$			
$ER(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$\hat{\theta}_{BL}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BL}(B))$	$\hat{\theta}_{BL}(B)$	n
۰/۲۳۹	۶/۸۰	۰/۶۸۱	۰/۱۴۶	۲/۴۳۷	۰/۸۷۳	۳
۰/۰۹۸	۳/۳۶۸	۰/۸۷۹	۰/۰۷۱	۱/۰۲۴	۱/۰۱۱	۵
۰/۰۳۹	۱/۵۹۱	۱/۰۰۷	۰/۰۳۳	۰/۴۳۷	۱/۰۷۸	۸

MLE			SEL			
	$ER(\hat{\theta}_{MLE}(B))$	$\hat{\theta}_{MLE}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{BS}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{BS}(B))$	$\hat{\theta}_{BS}(B)$	n
	۰/۶۰۵	۱/۳۶۱	۰/۶۰۵	۰/۴۰۱	۱/۳۶۱	۳
	۰/۱۲۷	۱/۲۱۶	۰/۱۲۷	۰/۱۰۷	۱/۲۱۶	۵
	۰/۰۴۲	۱/۱۶۶	۰/۰۴۲	۰/۰۳۹	۱/۱۶۶	۸

تمام ترکیبات مختلف n و m ، مشابه جدول ۲ دیده می‌شود که در حالت بیز تجربی نیز برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان لاینکس دارای مخاطره بیزی کمتری نسبت به برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا هستند و برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا مخاطره پسین کمتری نسبت به برآوردگرهای بیزی تحت تابع زیان لاینکس دارند. به عنوان مثال در جدول ۵ برای $n=۸$ و $a=۵$ داریم

$$ER(\widetilde{\theta}_{EBS}(B)) = \begin{cases} ۰/۰۵۳ & \text{m=۱۵} \\ ۰/۰۴۷ & \text{m=۲۰} \end{cases} ,ER(\widetilde{\theta}_{EBL}(B)) = \begin{cases} ۰/۰۳۲ & \text{m=۱۵} \\ ۰/۰۲۹ & \text{m=۲۰} \end{cases}$$

اما بر اساس طرح A (جدول ۱ ، جاهین (۲۰۰۴) را ببینید):

جدول ۴. برآوردگرهای بیز تجربی θ ، ER و PR متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B به روش ML

SEL			LINEX							
			$a=۱۰$			$a=۵$				
$ER(\hat{\theta}_{EBS}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{EBS}(B))$	$\hat{\theta}_{EBS}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{EBL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{EBL}(B))$	$\hat{\theta}_{EBL}(B)$	$ER(\hat{\theta}_{EBL}(B))$	$PR(\hat{\theta}_{EBL}(B))$	$\hat{\theta}_{EBL}(B)$	m	n
۰/۹۴۸	۰/۳۹۳	۱/۷۹۱	۰/۰۷۶	۸/۱۲۷	۰/۹۷۸	۰/۱۲۱	۲/۸۰۶	۱/۲۳۰	۲	۳
۰/۹۴۲	۰/۳۹۲	۱/۷۸۴	۰/۰۷۶	۸/۱۱۷	۰/۹۷۳	۰/۱۲۰	۲/۸۰۴	۱/۲۲۴	۳	
۰/۵۴۹	۰/۳۰۹	۱/۶۱۱	۰/۰۷۵	۶/۹۱۵	۰/۹۲۰	۰/۰۸۲	۲/۳۴۲	۱/۱۴۳	۱۵	
۰/۴۶۵	۰/۲۹۰	۱/۵۶۰	۰/۰۶۱	۶/۶۰۴	۰/۹۰۰	۰/۰۷۶	۲/۲۲۶	۱/۱۱۵	۲۰	
۰/۲۰۸	۰/۱۱۴	۱/۴۰۳	۰/۰۵۹	۳/۶۹۸	۱/۰۳۴	۰/۰۶۹	۱/۱۱۲	۱/۱۸۱	۲	۵
۰/۲۰۶	۰/۱۱۴	۱/۴۰۰	۰/۰۵۹	۳/۶۹۵	۱/۰۳۱	۰/۰۶۸	۱/۱۱۲	۱/۱۷۸	۳	
۰/۱۵۰	۰/۱۰۳	۱/۳۳۲	۰/۰۵۵	۳/۴۰۳	۰/۹۹۲	۰/۰۵۶	۱/۰۱۸	۱/۱۲۹	۱۵	
۰/۱۴۹	۰/۱۰۲	۱/۳۳۴	۰/۰۵۴	۳/۳۸۵	۰/۹۹۶	۰/۰۵۶	۱/۰۱۱	۱/۱۳۲	۲۰	
۰/۰۵۴	۰/۰۴۰	۱/۲۴۱	۰/۰۲۸	۱/۶۵۸	۱/۰۷۶	۰/۰۳۲	۰/۴۵۴	۱/۱۵۰	۲	۸
۰/۰۵۳	۰/۰۴۰	۱/۲۴۳	۰/۰۲۸	۱/۶۵۷	۱/۰۷۸	۰/۰۳۲	۰/۴۵۳	۱/۱۵۳	۳	
۰/۰۵۰	۰/۰۳۹	۱/۲۲۹	۰/۰۲۸	۱/۶۱۹	۱/۰۶۷	۰/۰۳۱	۰/۴۴۳	۱/۱۴۰	۱۵	
۰/۰۴۵	۰/۰۳۸	۱/۲۱۳	۰/۰۲۷	۱/۵۷۹	۱/۰۵۵	۰/۰۲۹	۰/۴۳۲	۱/۱۲۶	۲۰	

$$ER(\widetilde{\theta}_{EBS}(A))=\begin{cases} ۰/۱۴۸۳ & \text{m=۱۵} \\ ۰/۱۴۵۲ & \text{m=۲۰} \end{cases} ،ER(\widetilde{\theta}_{EBL}(A))=\begin{cases} ۰/۱۴۱۲ & \text{m=۱۵} \\ ۰/۱۴۰۵ & \text{m=۲۰} \end{cases}$$

مقایسه نتایج جاهین (۲۰۰۴) با نتایج جدول ۵ نشان می‌دهد ، برآوردگرهای بیز تجربی θ به روش MM حاصل از طرح B نسبت به برآوردگرهای بیز تجربی حاصل از طرح A مخاطره بیزی کمتری دارند.

جدول ۵. براوردگرهای بیز تجربی θ ، ER و PR متناظرش بر اساس نمونه‌گیری از طرح B به روش MM

SEL			LINEX							
			$a=۱۰$			$a=۵$				
$ER(\widetilde{\theta}_{EBS}(B))$	$PR(\widetilde{\theta}_{EBS}(B))$	$\widetilde{\theta}_{EBS}(B)$	$ER(\widetilde{\theta}_{EBL}(B))$	$PR(\widetilde{\theta}_{EBL}(B))$	$\widetilde{\theta}_{EBL}(B)$	$ER(\widetilde{\theta}_{EBL}(B))$	$PR(\widetilde{\theta}_{EBL}(B))$	$\widetilde{\theta}_{EBL}(B)$	m	n
۲/۵۳۴	۰/۱۸۳	۲/۶۸۷	۰/۸۸۳	۶/۳۶۴	۲/۰۵۰	۱/۴۵۷	۱/۸۷۱	۲/۳۱۲	۱۵	۳
۰/۳۴۳	۰/۱۴۶	۱/۶۴۹	۰/۰۵۵	۴/۶۵۳	۱/۱۸۴	۰/۰۹۲	۱/۴۱۳	۱/۳۶۶	۲۰	
۰/۲۶۵	۰/۱۱۳	۱/۴۹۹	۰/۰۴۲	۳/۷۶۰	۱/۱۲۳	۰/۰۸۸	۱/۱۲۰	۱/۲۷۴	۱۵	۵
۰/۱۲۸	۰/۰۷۸	۱/۳۸۸	۰/۰۳۷	۲/۸۴۷	۱/۱۰۴	۰/۰۴۷	۰/۸۲۰	۱/۲۲۴	۲۰	
۰/۰۵۳	۰/۰۴۰	۱/۲۳۴	۰/۰۲۹	۱/۶۴۰	۱/۰۷۱	۰/۰۳۲	۰/۴۴۹	۱/۱۴۵	۱۵	۸
۰/۰۴۷	۰/۰۳۸	۱/۲۲۳	۰/۰۲۸	۱/۵۸۳	۱/۰۶۴	۰/۰۲۹	۰/۴۳۳	۱/۱۳۶	۲۰	

جدول ۶ مقادیر پیش‌گویی بیز تجربی برای sامین رکورد آینده و MSPE متناظرش تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس را به ترتیب برای روش‌های ML و MM بر اساس طرح A نشان می‌دهد. اعداد داخل پرانتز مقدار MSPE است. در هر دو روش برآورد به نتیجه یکسان رسیدیم. ملاحظه می‌شود، مقادیر m روی مقادیر MSPE تاثیر داشته به طوری که با افزایش m مقادیر MSPE کاهش می‌یابند. در مورد طرح B نتایج گرفته شده مشابه طرح A است و MSPE های طرح B به کمک جدول ۶ و رابطه (۲۸) قابل استخراج است.

در جدول ۷ برای مقایسه کارایی پیش‌گویی‌های بیز تجربی نقطه‌ای بر اساس طرح‌های نمونه‌گیری A

جدول ۶. مقادیر پیش‌گویی بیز تجربی برای sامین رکورد حاصل از یک دنباله آینده و MSPE متناظرش تحت توابع زیان توان دوم خطا و لاینکس بر اساس نمونه‌گیری از طرح A به روش‌های ML و MM

روش	n	m	LINEX				SEL	
			$a = ۵$		$a = ۱۰$			
			$s = ۹$	$s = ۱۱$	$s = ۹$	$s = ۱۱$	$s = ۹$	$s = ۱۱$
ML	۳	۲	۴/۱۰۰(۱۸/۰۱۱)	۴/۵۰۲(۳۰/۶۰۲)	۳/۶۸۱(۲۰/۹۵۳)	۳/۹۷۲(۳۵/۸۵۱)	۶/۷۵۴(۱۱/۹۸۱)	۸/۱۰۳(۱۷/۱۳۱)
		۳	۴/۱۲۱(۱۷/۸۵۳)	۴/۵۲۳(۳۰/۳۳۴)	۳/۶۹۰(۲۰/۸۴۲)	۳/۹۸۲(۳۵/۶۷۱)	۶/۸۲۳(۱۱/۷۱۰)	۸/۲۰۳(۱۶/۶۷۱)
		۱۵	۴/۱۳۲(۱۷/۷۹۲)	۴/۵۳۱(۳۰/۲۳۱)	۳/۷۰۳(۲۰/۸۱۰)	۳/۹۹۰(۳۵/۶۰۳)	۶/۸۶۲(۱۱/۶۷۲)	۸/۲۶۱(۱۶/۵۹۴)
		۲۰	۴/۱۴۳(۱۷/۶۶۳)	۴/۵۵۲(۳۰/۰۱۳)	۳/۷۱۲(۲۰/۷۲۴)	۴/۰۰۱(۳۵/۴۵۲)	۶/۹۲۲(۱۱/۴۵۴)	۸/۳۴۲(۱۶/۲۱۲)
	۵	۲	۵/۴۹۱(۱۰/۴۸۴)	۵/۹۷۰(۱۸/۷۴۲)	۵/۱۷۲(۱۱/۸۲۲)	۵/۵۰۳(۲۱/۹۳۱)	۷/۳۵۲(۹/۲۴۱)	۸/۸۱۱(۱۳/۰۵۲)
		۳	۵/۵۰۴(۱۰/۴۱۱)	۵/۹۹۱(۱۸/۶۰۲)	۵/۱۷۰(۱۱/۷۸۲)	۵/۵۱۱(۲۱/۸۴۰)	۷/۴۰۱(۹/۱۸۴)	۸/۸۹۲(۱۲/۹۲۲)
		۱۵	۵/۵۰۲(۱۰/۳۸۲)	۵/۸۹۲(۱۸/۵۵۲)	۵/۱۷۱(۱۱/۷۵۱)	۵/۵۱۲(۲۱/۷۸۲)	۷/۴۰۳(۹/۱۶۱)	۸/۸۹۱(۱۲/۸۹۴)
		۲۰	۵/۵۲۱(۱۰/۳۴)	۶/۰۰۱(۱۸/۴۶۴)	۵/۱۸۱(۱۱/۷۴۱)	۵/۵۲۲(۲۱/۷۵۲)	۷/۴۷۲(۹/۱۶۴)	۸/۹۹۰(۱۲/۸۶۲)
	۸	۲	۷/۳۶۰(۶/۶۵۱)	۷/۹۳۲(۹/۸۶۳)	۷/۲۷۴(۶/۶۷۰)	۷/۶۶۱(۱۰/۵۸۲)	۷/۸۳۳(۷/۳۳۴)	۹/۳۸۰(۱۰/۱۹۱)
		۳	۷/۳۶۲(۶/۶۵۳)	۷/۹۴۴(۹/۸۴۰)	۷/۲۷۱(۶/۶۶۲)	۷/۶۷۳(۱۰/۵۶۴)	۷/۸۴۴(۷/۳۳۰)	۹/۳۹۱(۱۰/۱۵۲)
		۱۵	۷/۳۶۳(۶/۶۴۴)	۷/۹۴۰(۹/۸۳۱)	۷/۲۷۲(۶/۶۳۳)	۷/۶۷۴(۱۰/۵۴۰)	۷/۸۴۱(۷/۲۳۲)	۹/۴۰۳(۱۰/۱۱۴)
		۲۰	۷/۳۷۰(۶/۶۴۱)	۷/۹۵۲(۹/۸۰۳)	۷/۲۷۴(۶/۶۲۰)	۷/۶۷۱(۱۰/۵۴۲)	۷/۸۶۳(۷/۲۲۴)	۹/۴۵۴(۱۰/۱۰۰)
MM	۳	۱۵	۴/۱۶۰(۱۷/۷۲۱)	۴/۵۶۲(۳۰/۱۴۳)	۳/۷۱۴(۲۰/۷۸۰)	۴/۰۰۱(۳۵/۶۱۲)	۷/۶۰۳(۱۵/۰۵۴)	۹/۲۴۰(۲۱/۷۳۱)
		۲۰	۴/۱۶۲(۱۷/۶۷۳)	۴/۵۶۴(۳۰/۰۵۰)	۳/۷۱۱(۲۰/۷۴۲)	۴/۰۰۳(۳۵/۵۳۴)	۷/۳۷۰(۱۳/۵۳۱)	۸/۹۳۲(۱۹/۳۴۳)
	۵	۱۵	۵/۵۴۴(۱۰/۳۳۰)	۶/۰۴۱(۱۸/۴۰۲)	۵/۱۹۳(۱۱/۷۲۴)	۵/۵۴۰(۲۱/۷۲۱)	۷/۸۲۲(۱۰/۶۵۳)	۹/۵۲۴(۱۵/۴۱۰)
		۲۰	۵/۵۳۱(۹/۳۴۲)	۶/۰۲۳(۱۷/۴۳۴)	۵/۱۹۰(۱۰/۷۳۱)	۵/۵۳۲(۲۰/۷۳۳)	۷/۷۰۴(۱۰/۱۳۰)	۹/۳۵۱(۱۴/۵۰۲)
	۸	۱۵	۷/۳۷۳(۶/۶۵۴)	۷/۹۶۰(۹/۸۰۱)	۷/۲۸۲(۶/۶۶۳)	۷/۶۸۴(۱۰/۵۳۰)	۷/۹۰۱(۷/۵۰۲)	۹/۵۹۳(۱۰/۷۳۴)
		۲۰	۷/۳۷۰(۶/۴۴۱)	۷/۹۵۲(۹/۶۲۳)	۷/۲۷۴(۶/۴۶۰)	۷/۶۸۱(۱۰/۳۴۲)	۷/۸۹۳(۷/۴۴۴)	۹/۵۲۴(۱۰/۵۱۰)

و B، مقادیر معیار RE با استفاده از رابطه (۲۸) تحت توابع زیان لاینکس و توان دوم خطا به روش‌های ML و MM آورده شده‌اند. روشن است معیار RE در اکثر حالات تحت بررسی کمتر از یک است یعنی طرح B مقدار MSPE کمتری نسبت به طرح A دارد که نشان از عملکرد بهتر طرح B نسبت به رقیب خود طرح A است. با دقت بیشتر مشاهده می‌گردد، موقعیتهایی وجود دارند که در آن‌ها معیار RE بیشتر از یک شده است (مقادیر سیاه شده). اگر mهای کوچک و بزرگ جداگانه بررسی شوند، می‌توان دید که این مقادیر سیاه شده در mهای بزرگ رخ داده‌اند. هم‌چنین با در نظر گرفتن روش MM، نتایجی مشابه روش ML حاصل گردید که در ۲۶ موقعیت از ۳۶ موقعیت، مقدار RE کمتر از یک است که نشان از عملکرد بهتر طرح B است. جدول ۸ برآورد احتمال پوشش به همراه برآورد متوسط طول بازه پیش‌گویی بیز تجربی برای sامین رکورد آینده را نشان می‌دهد. اعداد داخل پرانتز مقدار احتمال پوشش است یعنی نسبت تعداد دفعاتی که در ۱۰۰۰ مرتبه تکرار، مقادیر واقعی رکورد آینده در بازه پیش‌گویی مربوطه قرار می‌گیرند. دیده می‌شود تحت روش ML تنها به ازای n برابر ۳ و mهای کوچک برابر ۲ و ۳ ،طرح A دارای متوسط طول بازه پیش‌گویی کوچکتر است. با توجه به این که ضریب پیش‌گویی ۰/۹۵ در نظر گرفته شده است، احتمال پوشش آن عملکرد خوبی از خود نشان نداده و با ۰/۹۵ اختلاف زیادی دارد. به تدریج با افزایش مقادیر m و n ، بازه پیش‌گویی بر اساس طرح B بهتر عمل می‌کند به‌طوری که در اکثر حالات، طول بازه پیش‌گویی کوتاه‌تری نسبت به طرح A داشته و از دیدگاه احتمال پوشش نیز خوب عمل کرده است یعنی

در ساختن بازه پیش‌گویی بیزی تجربی تحت روش ML ، افزایش مقادیر m و n به نفع طرح B بوده است. در روش MM نیز مشابه روش ML ، طرح B نسبت به رقیب خود طرح A با متوسط طول بازه پیش‌گویی کوتاه‌تر و احتمال پوشش بهتر ظاهر شده است.

جدول ۷. مقایسه پیش‌گویی‌های بیز تجربی نقطه‌ای بر اساس طرح‌های نمونه‌گیری A وB به کمک معیار RE تحت توابع زیان لاینکس و توان دوم خطا به روش‌های ML و MM

			LINEX				SEL	
			$a=۵$		$a=۱۰$			
روش	n	m	$s=۹$	$s=۱۱$	$s=۹$	$s=۱۱$	$s=۹$	$s=۱۱$
ML	۳	۲	۰/۹۸۶	۰/۹۴۸	۰/۹۵۴	۰/۹۴۹	۰/۹۵۵	۰/۹۴۵
		۳	۰/۹۳۳	۰/۹۳۶	۰/۹۲۴	۰/۹۲۴	۰/۸۹۱	۰/۹۱۵
		۱۵	۰/۹۲۱	۰/۹۳۴	۰/۹۲۳	۰/۹۱۰	۰/۸۸۱	۰/۹۰۲
		۲۰	۰/۸۵۵	۰/۹۱۶	۰/۹۰۴	۰/۸۸۲	۰/۸۲۷	۰/۸۳۵
	۵	۲	۰/۹۹۰	۰/۹۶۴	۰/۹۸۴	۰/۹۹۵	۰/۹۷۶	۰/۹۸۶
		۳	۰/۹۷۸	۰/۹۷۰	۰/۹۸۴	۰/۹۱۹	۰/۹۸۳	۰/۹۰۴
		۱۵	۱/۰۲۸	۰/۹۴۰	۰/۹۷۸	۰/۹۱۹	۰/۹۳۴	۰/۸۹۱
		۲۰	۱/۰۲۴	۰/۹۲۶	۰/۹۶۷	۰/۹۱۳	۰/۹۰۸	۰/۸۵۰
	۸	۲	۰/۹۹۸	۰/۹۷۱	۰/۹۹۴	۰/۹۷۹	۰/۹۸۹	۰/۹۷۰
		۳	۰/۹۹۸	۰/۹۵۰	۰/۹۸۰	۰/۹۶۶	۰/۹۸۵	۰/۹۶۹
		۱۵	۰/۹۹۸	۱/۰۶۰	۰/۹۷۴	۱/۰۵۸	۰/۹۹۴	۰/۹۷۱
		۲۰	۱/۰۰۲	۱/۰۳۷	۱/۰۱۸	۱/۰۰۹	۰/۹۹۰	۰/۹۵۱
MM	۳	۱۵	۰/۹۹۰	۰/۹۳۵	۰/۹۱۸	۰/۹۷۰	۰/۷۴۲	۰/۶۸۱
		۲۰	۰/۹۱۲	۰/۹۳۳	۰/۹۰۵	۰/۹۳۰	۰/۷۹۵	۰/۷۲۳
	۵	۱۵	۰/۹۰۴	۰/۹۴۷	۰/۸۸۱	۰/۸۵۰	۰/۹۹۳	۰/۸۷۲
		۲۰	۰/۹۵۶	۰/۹۹۱	۰/۸۵۳	۰/۸۸۸	۰/۹۸۸	۰/۸۳۵
	۸	۱۵	۱/۳۴۰	۱/۵۸۹	۱/۱۲۶	۱/۲۵۶	۱/۲۱۴	۰/۹۹۷
		۲۰	۱/۲۰۰	۱/۲۱۵	۰/۹۸۸	۱/۱۰۵	۱/۱۴۷	۱/۰۱۲

۷ مثال کاربردی

در این بخش، مباحث مطرح شده در بخش‌های قبل روی یک مجموعه داده واقعی به کار گرفته می‌شود. داده‌های مذکور درجه حرارت روزانه از ماه ژانویه در سال‌های ۲۰۰۹،۲۰۱۴ و۲۰۱۸ مربوط به استان نوا اسکوشیا[1] واقع در کانادا است که از پایگاه (www.climate.weather.gc.ca) به دست آمده‌اند. p – مقدار آزمون کولموگروف–اسمیرنوف برای بررسی نیکویی برازش توزیع نمایی برابر ۰/۶۹۴ است که گویای مناسب بودن توزیع نمایی روی داده‌ها است. بردارهای $r_A = (r_1 = ۰/۴۰, r_2 = ۰/۴۶, r_3 = ۰/۶۰)$ و $r_B = (r_{1,1} = ۰/۴۰, r_{2,2} = ۰/۲۹, r_{3,3} = ۰/۶۰)$ به‌ترتیب مشاهدات رکوردی به‌دست آمده بر اساس

[1] Nova Scotia

جدول ۸. متوسط احتمال پوشش و طول بازه‌های پیش‌گویی بیز تجربی برای sامین رکورد دنباله آینده بر اساس طرح‌های A وB به روش‌های ML و MM وقتی $\gamma = ۰٫۰۵$

روش	n	m	طرح نمونه‌گیریA		طرح نمونه‌گیریB	
			$s = ۹$	$s = ۱۱$	$s = ۹$	$s = ۱۱$
ML	۳	۲	(۰/۷۴۰)۱۰/۷۵۱	(۰/۷۳۲)۱۲/۶۷۳	(۰/۹۰۴)۱۱/۸۰۰	(۰/۷۲۱)۱۳/۸۰۲
		۳	(۰/۷۴۳)۱۰/۷۴۴	(۰/۷۲۰)۱۲/۶۰۱	(۰/۹۰۲)۱۱/۶۱۳	(۰/۸۸۴)۱۳/۵۷۰
		۱۵	(۰/۹۴۱)۱۳/۹۲۲	(۰/۹۳۳)۱۶/۴۳۴	(۰/۹۵۰)۱۳/۱۰۱	(۰/۹۵۲)۱۵/۳۱۳
		۲۰	(۰/۹۶۴)۱۴/۰۷۰	(۰/۹۴۱)۱۶/۶۱۲	(۰/۹۵۳)۱۳/۱۳۴	(۰/۹۵۰)۱۵/۳۵۱
	۵	۲	(۰/۸۷۲)۱۱/۵۶۳	(۰/۸۶۴)۱۳/۵۵۰	(۰/۹۸۱)۱۱/۵۷۲	(۰/۹۷۳)۱۳/۲۹۴
		۳	(۰/۸۶۰)۱۱/۳۸۱	(۰/۸۴۲)۱۳/۳۳۳	(۰/۹۸۴)۱۱/۴۹۰	(۰/۹۷۱)۱۳/۱۹۲
		۱۵	(۰/۹۵۳)۱۳/۴۷۴	(۰/۹۵۰)۱۵/۷۹۱	(۰/۹۹۲)۱۲/۰۴۳	(۰/۹۹۴)۱۳/۶۳۰
		۲۰	(۰/۹۶۱)۱۳/۸۰۲	(۰/۹۶۳)۱۶/۱۸۴	(۰/۹۹۰)۱۱/۹۲۱	(۰/۹۸۲)۱۳/۶۸۳
	۸	۲	(۰/۹۲۴)۱۱/۸۱۰	(۰/۹۱۱)۱۳/۷۳۲	(۰/۹۹۳)۱۰/۹۶۴	(۰/۹۹۰)۱۲/۳۹۱
		۳	(۰/۹۲۲)۱۱/۷۰۳	(۰/۹۱۴)۱۳/۶۰۰	(۰/۹۹۱)۱۰/۹۷۲	(۰/۹۹۳)۱۲/۴۰۴
		۱۵	(۰/۹۷۰)۱۲/۸۰۱	(۰/۹۷۲)۱۴/۸۷۳	(۰/۹۹۴)۱۱/۱۴۰	(۰/۹۹۱)۱۲/۶۰۲
		۲۰	(۰/۹۸۳)۱۳/۱۰۴	(۰/۹۷۰)۱۵/۲۳۱	(۰/۹۹۲)۱۱/۲۴۳	(۰/۹۹۴)۱۲/۷۰۰
MM	۳	۱۵	(۰/۹۵۱)۱۸/۳۱۲	(۰/۹۴۳)۲۱/۷۷۴	(۰/۹۵۴)۱۳/۰۰۰	(۰/۹۴۴)۱۵/۱۹۲
		۲۰	(۰/۹۵۲)۱۶/۷۹۴	(۰/۹۵۰)۱۹/۷۱۱	(۰/۹۵۳)۱۲/۶۹۳	(۰/۹۵۴)۱۴/۶۱۰
	۵	۱۵	(۰/۹۷۱)۱۶/۵۷۲	(۰/۹۶۳)۱۹/۵۳۴	(۰/۹۹۰)۱۲/۲۵۱	(۰/۹۹۲)۱۴/۰۷۳
		۲۰	(۰/۹۷۴)۱۵/۶۵۰	(۰/۹۶۱)۱۸/۴۲۲	(۰/۹۹۳)۱۱/۸۱۴	(۰/۹۸۰)۱۳/۵۵۱
	۸	۱۵	(۰/۹۸۲)۱۴/۲۷۳	(۰/۹۸۴)۱۶/۶۴۰	(۰/۹۹۱)۱۱/۲۷۲	(۰/۹۹۳)۱۲/۷۴۴
		۲۰	(۰/۹۸۰)۱۳/۷۴۱	(۰/۹۷۲)۱۶/۰۰۳	(۰/۹۹۴)۱۱/۱۱۰	(۰/۹۹۱)۱۲/۵۶۲

طرح‌های A وB هستند در نتیجه $T = ۱٫۲۹$، $R_۳ = ۰٫۶۰$ و ۳ $= n$. همان‌طور که در بخش ۲ نیز بیان شد می‌توان دید این امکان وجود دارد که واحدهای طرح B برخلاف واحدهای طرح A لزوما مرتب شده نیستند. اطلاعات مربوط به برآورد پارامترهای توزیع پیشین به روش‌های ML و MM با اندازه نمونه متفاوت در جدول ۹ خلاصه شده‌اند. مقادیر داخل پرانتز برآورد پارامترهای توزیع پیشین به روش MM است. همان‌طور که در بخش شبیه سازی بیان شد، در جدول ۹ نیز ملاحظه می‌شود در روش MM برای نمونه‌های کوچک، مقادیری منفی برای برآورد ابرپارامترها به دست آمده‌اند. در روش ML نیز شاهد مقادیری نامعقول برای برآورد ابرپارامترها بوده‌ایم که با خط تیره،–، نمایش داده شده‌اند. در ادامه با افزایش اندازه نمونه مقدار برآورد منطقی‌تر و به مقدار واقعی ابرپارامترها نزدیک شده است. این همان خاصیت بهینگی مجانبی روش بیز تجربی است که مطابق انتظار است.

جدول ۹. برآورد ابرپارامترها به روش‌های ML و MM برای داده‌های درجه حرارت

m	طرح A				طرح B			
	$\hat{\alpha}$	$\widetilde{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\widetilde{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\widetilde{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\widetilde{\beta}$
۲	–	(−۲/۹۰۳)	–	(−۱/۶۱۴)	–	(−۷/۴۲۰)	–	(−۱/۴۳۱)
۳	۱۴/۸۲۴	(−۲/۴۰۲)	۶/۰۹۱	(−۱/۱۲۴)	–	(۲۱/۵۳۳)	–	(۹/۴۴۰)
۱۵	۳/۵۰۳	(۲/۰۱۱)	۱/۱۲۲	(۰/۶۳۲)	۱۸/۴۵۴	(۸/۴۰۳)	۸/۳۱۱	(۳/۶۲۴)

برخی از نتایج به دست آمده بر اساس طرح‌های A وB به روش‌های ML و MM تحت داده‌های درجه حرارت در جداول زیر آمده‌اند:

جدول ۱۰. برآوردگرهای بیز تجربی θ و PR متناظرش به روش MM برای داده‌های درجه حرارت

طرح	m	LINEX $a=۵$: $\widetilde{\theta}_{BL}(B)$	LINEX $a=۵$: $PR(\widetilde{\theta}_{BL}(B))$	LINEX $a=۱۰$: $\widetilde{\theta}_{BL}(B)$	LINEX $a=۱۰$: $PR(\widetilde{\theta}_{BL}(B))$	SEL: $\widetilde{\theta}_{BS}(B)$	SEL: $PR(\widetilde{\theta}_{BS}(B))$
B	۱۵	۲/۰۲۱	۴/۵۲۳	۱/۵۹۲	۱۳/۲۴۲	۲/۹۲۴	۰/۵۹۱
A	۱۵	۱/۶۵۱	۱۲/۷۸۲	۱/۱۲۱	۳۰/۸۵۳	۴/۲۱۰	۳/۵۴۱

جدول ۱۱. مقادیر معیار RE به روش‌های ML و MM برای داده‌های درجه حرارت

روش	m	LINEX $a=۵$: $s=۹$	LINEX $a=۵$: $s=۱۱$	LINEX $a=۱۰$: $s=۹$	LINEX $a=۱۰$: $s=۱۱$	SEL: $s=۹$	SEL: $s=۱۱$
ML	۳	۰/۸۹۷	۰/۸۸۷	۰/۹۳۵	۰/۹۲۸	۰/۸۰۳	۰/۷۹۲
MM	۱۵	۰/۸۸۶	۰/۸۸۱	۰/۹۲۱	۰/۹۱۷	۰/۸۱۸	۰/۸۱۱

جدول ۱۲. مقادیر متوسط طول بازه پیش‌گویی به روش ML برای داده‌های درجه حرارت

m	طرح A: $s=۹$	طرح A: $s=۱۱$	طرح B: $s=۹$	طرح B: $s=۱۱$
۳	۵/۸۷۱	۶/۷۴۰	۵/۴۹۴	۶/۰۹۲

هم‌چنین متوسط طول بازه پیش‌گویی به روش MM برای $m=۱۵$ به صورت زیر است که نشان می‌دهد مشابه روش ML، طرح B دارای متوسط طول بازه پیش‌گویی کوتاه‌تری نسبت به طرح A است.

$$EL_s(A)=\begin{cases} ۶/۷۱۰ & \text{s=۹} \\ ۷/۹۱۱ & \text{s=۱۱} \end{cases} \quad \text{و} \quad EL_s(B)=\begin{cases} ۵/۷۱۴ & \text{s=۹} \\ ۶/۶۰۲ & \text{s=۱۱} \end{cases}$$

در این مثال کاربردی، بار دیگر نتایج حاصل از مطالعه شبیه‌سازی در بخش قبل، مورد تایید قرار می‌گیرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به موضوع برآورد و پیش‌گویی در طرح‌های نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی و نمونه‌گیری معکوس با رهیافت بیز تجربی پرداخته و در این خصوص نتایجی به‌دست آوردیم. با مقایسه نتایج به‌دست

آمده دیده شد، برآوردگرهای حاصل از شیوه نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی کاراتر از برآوردگرهای حاصل از شیوه نمونه‌گیری معکوس عمل می‌کنند. علاوه بر این، مقادیر میانگین توان دوم خطای پیش‌گویی به دست آمده در طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی در اغلب حالات نسبت به طرح نمونه‌گیری معکوس کمتر است. در مبحث بازه پیش‌گویی نیز طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی با متوسط طول بازه کوچک‌تر و احتمال پوشش مطلوب‌تر نسبت به طرح نمونه‌گیری معکوس ظاهر شده است. بنابراین توصیه می‌شود با رهیافت بیز تجربی، اگر شرایط برای انجام طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار رکوردی فراهم باشد، از این طرح نمونه‌گیری استفاده شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از زحمات سردبیر مجله و پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و زحمات ویراستار مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شدند کمال تشکر را دارند.

مراجع

رزمخواه، م.، احمدی، ج.، خطیب آستانه، ب. (۱۳۹۸)، مقایسه دو روش استخراج رکوردها از دیدگاه اطلاع فیشر ، مجله علوم آماری، **۱۳**، ۱۹-۴۴.

Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2010), Prediction of Order Statistics and Record Values From Two Independent Sequences, *Statistics*, **44**, 417-430.

Ahsanullah, M. (1995), *Record Statistics*, Nova Science Publishers Inc, Commack, New York.

Aitchison, J. and Dunsmore, I.R. (1975), *Statistical Prediction Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons, New York.

Carlin, B. P. and Louis, T. A. (2000), *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, 2nd ed. Chapman & Hall/CRC.

Eskandarzadeh, M., Tahmasebi, S. and Afshari, M. (2016), Information measures for Record ranked set samples, *Ciencia e Natura*, **38**, 554-563.

Geisser, S. (1993), *Predictive Inference: An Introduction*, Chapman and Hall.

Gulati, S. and Padgett, W.J. (2003), *Parametric and Non-Parametric Inference from Record-breaking Data*, Lecture Notes In Statistics, 172, Springer, New York.

Jaheen, Z. F. (2004), Empirical Bayes Analysis of Record Statistics Based on Linex and Quadratic Loss Functions, *Computers and Mathematics with Applications*, **47**, 947-954.

Lawless, J. F. (1977), Prediction Intervals for the Two Parameter Exponential Distribution, *Technometrics*, **19**, 469-472.

Maritz, J. L. and Lwin, T. (1989), *Empirical Bayes Methods*, Section Edition, Chapman and Hall, London.

McIntyer, GA.A. (1952), *Method for Unbiased Selective Sampling, Using Ranked Sets*, *Australian Journal of Agricultural Research*, **3**, 385-390.

Mirmostafaee, S. M. and Ahmadi, J. (2011), Point Prediction of Future order Statistics From an Exponential Distribution, *Statistics and Probability Letters*, **81**, 360-370.

Nevzorov, V. (2001), *Records*, Mathematical Theory, Translation of Mathematical Monographs No, 194, American Mathematical Society, Providence, RI.

Paul, J. and Thomas, P.Y. (2017), Concomitant Record ranked set sampling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9518-9540.

Raqab, M. and Balakrishnan, N. (2008), Prediction Interval for Future Records, *Statistics and Probability*, **78**, 1955-1963.

Safaryian, A., Arashi, M. and Arabi, R. (2019), Improved Estimators for Stress-strength Reliability Using Record Ranked Set Sampling Scheme, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, https://doi.org/10.1080/03610918.2018.1468451.

Salehi, M. and Ahmadi, J. (2014), Record Ranked Set Sampling Scheme, *Metron*, **72**, 351-365.

Salehi, M. and Ahmadi, J. (2015), Estimation of Stress-strength Reliability Using Record Ranked Set Sampling Scheme From the Exponential Distribution, *Filomat*, **29**, 1149-1162.

Salehi, M., Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2015), Prediction of Order Statistics and Record Values Based on Ordered Ranked Set Sampling, *Statistical Computation and Simulation*, **85**, 77-88.

Salehi, M., Ahmadi, J. and Dey, S. (2016), Comparison of Two Sampling Schemes for Generating Record-breaking Data from the Proportional Hazard Rate Models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 3721-3733.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2021
Vol. 15, No. 1, pp 193-218
DOI: 10.29252/jss.15.1.193

Comparison of Empirical Bayesian Estimations and Predictions Based on Record Ranked Set Sampling Scheme with Inverse Sampling Scheme

Golzade Gervi, E.[1] , Nasiri, P. [1] and Salehi, S. M. [2]
[1]Department of Statistics, Payame Noor University of Tehran, Tehran, Iran.
[2]Department of Mathematics and Statistics, Neyshabur University, Neyshabur, Iran.

Abstract: The empirical Bayes estimation of the exponential distribution parameter under squared error and LINEX loss functions is investigated when the data collect by the record ranked set sampling scheme method. Then, point and interval predictions for future record values are studied. The results of this sampling scheme are compared with the products of the inverse sampling scheme. To compare the accuracy of the estimators, Bayes risk and posterior risk criteria are used. These point predictors are compared in the sense of their mean squared prediction errors. The average interval length and coverage probability are computed and compared to evaluate the prediction intervals for both sampling schemes. In the present study, the hyperparameters are estimated in two methods. By studying the simulation and presenting real data, the estimation methods are compared, and the performance of the introduced schemes is evaluated.

Keywords: Estimation, Prediction, Record, Empirical Bayes, Record ranked set sampling.

Mathematics Subject Classification (2010): 62G30, 62G25, 62C12.