

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶

جلد ۱، شماره ۲، ص ۱۰۹-۱۲۰

آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی

آرزو حبیبی راد، ناصررضا ارقامی

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۸/۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۲/۲۷

چکیده: برآورد آنتروپی (آنتروپی نمونه‌ای) برای اولین بار توسط واسیکک (۱۹۷۶) معرفی شد. ما نیز در این مقاله ابتدا برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی را که گسترشی از برآورد آنتروپی است بیان می‌کنیم و سپس آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی را در مقابل تعدادی از توزیع‌های نامتقارن (چوله^۱) ارائه می‌دهیم و در ادامه توان آزمون پیشنهادی را با چند آزمون دیگر با کمک شبیه‌سازی مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش پیشنهادی نسبت به روش پارک (۱۹۹۹) از توان بیشتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی، برآورد آنتروپی، آزمون متقارن بودن توزیع.

^۰ آدرس الکترونیک مسئول مقاله: آرزو حبیبی راد، habibi@math.um.ac.ir

^۱ Skewed

آنتروپی تابع توزیع F با تابع چگالی احتمال f به صورت زیر تعریف می شود (شانون، ۱۹۴۸)

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx.$$

با تغییر متغیر $F(x) = p$ در رابطه فوق داریم

$$H(f) = \int_0^1 \log \left(\frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right) dp. \quad (1)$$

در سال ۱۹۷۶ برآوردی برای رابطه (۱) توسط واسیکک معرفی شد. برای این منظور فرض کنید $n \geq 3$ و x_1, x_2, \dots, x_n یک نمونه n تایی از توزیع F باشد و همچنین فرض کنید به جای تابع توزیع F از تابع توزیع تجربی F_n و به جای عملگر دیفرانسیل از عملگر تفاضل استفاده شود. در این صورت برآورد مشتق $F^{-1}(p)$ بوسیله $\frac{n}{2w}(x_{(i+w)} - x_{(i-w)})$ برای $(i-1)/n < p \leq i/n$ ، $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ که در آن $i = w+1, w+2, \dots, n-w$ و w یک عدد صحیح مثبت کوچکتر از $n/2$ می باشد. همچنین اگر $p \leq w/n$ یا $p > (n-w)/n$ در این صورت به ترتیب از تفاضل های یک طرفه $x_{(i+w)} - x_{(1)}$ یا $x_{(n)} - x_{(i-w)}$ به جای تفاضل $x_{(i+w)} - x_{(i-w)}$ استفاده می شود. این برآورد عبارت است از

$$H_{wn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{2w} (x_{(i+w)} - x_{(i-w)}) \right), \quad (2)$$

که در آن برای $i < 1$ ، $x_{(i)} = x_{(1)}$ و برای $i > n$ ، $x_{(i)} = x_{(n)}$.

برآورد آنتروپی (آنتروپی نمونه ای) در به دست آوردن آماره آزمون نیکویی-برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیکک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزونو و اوتا (۱۹۸۹)، برای توزیع یکنواخت بوسیله دادویچ و ون در مولن (۱۹۸۱) و برای توزیع نمایی بوسیله ابراهیمی و حبیب الله (۱۹۹۲) مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای

داده‌های سانسور شده نوع-دو (پارک، ۲۰۰۵) و داده‌های سانسور فزاینده نوع-دو (بالاکریشن و همکاران، ۲۰۰۷) نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

ابتدا در بخش دوم برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی را که گسترشی از برآورد آنتروپی است بیان می‌کنیم و سپس در بخش سوم، آزمون متقارن بودن توزیع براساس $k = 2$ آماره مرتب را ارائه و توان آزمون پیشنهادی با چند آزمون دیگر (جدول ۲) مقایسه می‌کنیم (پارک، ۱۹۹۹). در بخش چهارم، آزمون معرفی شده در بخش سوم را برای مقادیر مختلف k تعمیم داده و در انتها با کمک شبیه‌سازی (جدول ۳ تا ۶) نشان می‌دهیم که توان آزمون برای مقادیر مختلف k متفاوت است.

۲ برآورد آنتروپی از آماره‌های ترتیبی

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F(x)$ و تابع احتمال $f(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $X_{r:k}$ ، آماره ترتیبی r ام با تابع توزیع $F_{r:k}(x)$ از یک زیرنمونه k -تایی تصادفی $k = 1, 2, \dots$ باشد که با روش باجایگذاری از نمونه اصلی گرفته شده است.

لم ۱: اگر $E_{1:k}$ و $E_{k:k}$ به ترتیب آنتروپی اولین و k امین آماره ترتیبی از یک زیر نمونه k -تایی باشند، آنگاه

$$E_{1:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k - \int_{-\infty}^{\infty} \log f(x) dF_{1:k}(x),$$

$$E_{k:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k - \int_{-\infty}^{\infty} \log f(x) dF_{k:k}(x).$$

برهان با کمک تعریف آنتروپی، به آسانی ثابت می‌شود. □

برای محاسبه برآورد آنتروپی $E_{1:k}$ ، بنا به رابطه (۱) داریم

$$E_{1:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k + \int_0^1 \log \left(\frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right) k(1-p)^{k-1} dp,$$

^۲ Sub-sample

۱۱۲ آزمون مقارن بودن توزیع براساس آنتروپی

سپس بر اساس برآورد واسیکک، رابطه (۲)، برآورد آنتروپی $X_{1:k}$ براساس زیر نمونه k تایی از نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\hat{E}_{1:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{r w} (x_{i+w:n} - x_{i-w:n}) \right) k \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)^{k-1},$$

و بطور مشابه، برآورد آنتروپی $X_{k:k}$ براساس زیر نمونه k تایی از نمونه‌ای به اندازه n برابر است

$$\hat{E}_{k:k} = 1 - \frac{1}{k} - \log k + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{r w} (x_{i+w:n} - x_{i-w:n}) \right) k \left(\frac{i}{n+1} \right)^{k-1}.$$

فرع: برآورد آنتروپی اولین و k امین آماره ترتیبی را می‌توان به صورت

$$const. + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{r w} (x_{i+w:n} - x_{i-w:n}) \right) J_k(u_i), \quad (3)$$

نشان داد، که در آن $u_i = \frac{i}{n+1}$ و J تابعی یکنواخت از $\frac{i}{n+1}$ است.

۳ آزمون مقارن بودن توزیع

با کمک لم زیر آزمون مقارن بودن توزیع را براساس برآورد آنتروپی دنبال می‌کنیم.

لم ۲: (پارک، ۱۹۹۵) فرض کنید $D_k = E_{1:k} - E_{k:k}$. آنگاه برای $k = 1, 2, 3, \dots$ ، $D_k = 0$ ، اگر و تنها اگر تابع f مقارن باشد.

بنابراین مقدار D_k معیار خوبی برای تشخیص مقارن بودن توزیع داده‌ها است، از این رو برای آزمون مقارن بودن توزیع در مقابل توزیع‌های نامتقارن (چوله) می‌توان از D_k به عنوان آماره آزمون استفاده کرد. در ادامه آماره آزمون D_k را با کمک رابطه (۲)، به صورت

$$\hat{D}(J, n, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{r w} (x_{i+w:n} - x_{i-w:n}) \right) J_k(u_i), \quad (4)$$

برآورد می‌کنیم، که در آن $J_k(u_i)$ تابعی پیوسته و کراندار است و $J(u) = -J(1-u)$. پارک (۱۹۹۹) مقدار k را برابر ۲ اختیار کرده‌است، که در این

صورت $J(u) = 2(1 - 2u)$ و آماره آزمون، برآوردی از $(E_{1:2} - E_{2:2})$ خواهد بود. مقادیر بحرانی آزمون $|\hat{D}(2(1 - 2u), n, w)|$ ، بر اساس روش مونت-کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه توسط پارک (۱۹۹۹) شبیه‌سازی شده، و نتایج آن در جدول ۱ ارائه شده است.

۱.۳ مقایسه توان آزمون‌ها

با توجه به آنکه هدف محاسبه توان آزمون متقارن بودن توزیع، براساس آماره آزمون $\hat{D}(2(1 - 2u), n, w)$ می‌باشد، ابتدا پارک (۱۹۹۹) مقدار بهینه w را که به ازای آن توان آزمون ماکسیمم می‌شود را مشخص نموده است. از این رو شبیه‌سازی را برای اندازه‌های مختلف تحت فرضیه مقابل انجام داده و مقداری از w که توان بیشتری را نشان می‌دهد معین کرده است. مقادیر توصیه شده در جدول ۱ در صورتیکه توزیع فرضیه مقابل نامتقارن باشد مشخص شده‌اند.

جدول ۱: مقادیر w متناظر با بیشترین توان آماره $\hat{D}(2(1 - 2u), n, w)$

| n | w |
|--------|------|
| ۱۰-۲۰ | ۳، ۴ |
| ۲۰-۵۰ | ۴، ۵ |
| ۵۰-۱۰۰ | ۵، ۶ |

با فرض $n = 20$ ، توان آزمون در سطح $\alpha = 0.05$ ، در مقابل بعضی از توزیع‌های متقارن و نامتقارن، محاسبه و نتایج حاصل با توان آزمون‌های معروف مانند شاپیرو و ویلک (۱۹۶۵)، دیوید و جانسون (۱۹۵۶)، داکسون و همکاران (۱۹۷۶) و اندرسون و دارلینگ (۱۹۵۴) در جدول ۲ مقایسه شده‌اند.

با مقایسه مقادیر جدول ۲ معلوم می‌شود که آزمون پیشنهادی با آماره $\hat{D}(2(1 - 2u), n, w)$ زمانی که توزیع فرضیه مقابل نامتقارن است (مانند χ^2 -دو) با درجات آزادی ۱، ۲ و ۴ از بقیه آزمون‌ها بهتر عمل کرده است. اما در مورد توزیع‌های نظیر، χ^2 -دو با درجه آزادی ۱۰، توزیع یکنواخت و کوشی، آزمون پیشنهادی توان کمتری را تنها در مقایسه با آزمون‌های شاپیرو-ویلک و اندرسون و دارلینگ نشان می‌دهد.

جدول ۲: توان آزمون‌ها ($\times 100$) در سطح $\alpha = 0.05$ و $n = 20$

| کوشی | یکنواخت | $\chi^2(10)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(2)$ | $\chi^2(1)$ | آماره آزمون |
|------|---------|--------------|-------------|-------------|-------------|---------------------------|
| ۸۶/۷ | ۲۰/۲ | ۲۳/۹ | ۵۳/۱ | ۸۴/۵ | ۹۸/۶ | شاپیرو-ویلک |
| ۴۲/۶ | ۱/۳ | ۳۴/۳ | ۶۰/۴ | ۸۲/۶ | ۹۶/۰ | دیوید و جانسون |
| ۴۲/۶ | ۰/۷ | ۳۰/۸ | ۵۴/۱ | ۷۵/۲ | ۹۰/۹ | داکسوم و دیگران |
| ۸۷/۸ | ۱۷/۰ | ۲۰/۱ | ۴۶/۳ | ۷۸/۰ | ۹۷/۴ | اندرسون و دارلینگ |
| ۴۸/۳ | ۷/۲ | ۲۴/۲ | ۵۹/۳ | ۹۰/۴ | ۹۹/۵ | $\hat{D}(2(1-2u), 20, 3)$ |
| ۵۲/۰ | ۶/۵ | ۲۴/۸ | ۶۰/۱ | ۹۰/۰ | ۹۹/۴ | $\hat{D}(2(1-2u), 20, 4)$ |
| ۵۵/۲ | ۶/۱ | ۲۵/۶ | ۶۰/۲ | ۸۹/۵ | ۹۹/۳ | $\hat{D}(2(1-2u), 20, 5)$ |

۴ توسعه آزمون متقارن بودن توزیع

همانطور که در بخش ۳ به آن اشاره شد، مقدار آماره آزمون در رابطه (۴) فقط برای $k = 2$ محاسبه و بدنبال آن در بخش ۱.۳ توان آزمون مربوطه نیز تنها برای $k = 2$ محاسبه شده است. اما ما در این بخش بدنبال آن هستیم که توان آزمون را برای مقادیر مختلف k محاسبه نموده و مقداری از k را که توان آزمون را ماکسیمم می‌کند معرفی نماییم. به عنوان مثال در نمونه‌ای به اندازه $n = 10$ مقادیر k را برابر ۲، ۴ و در نمونه‌ای به اندازه $n = 20$ مقادیر k را برابر ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ فرض کرده و آماره آزمون پیشنهادی $(D_{k,r})$ را تفاضل آنتروپی مشاهدات ترتیبی که به یک فاصله از دو انتهای آماره‌های ترتیبی قرار دارند در نظر می‌گیریم، یعنی

$$D_{k,r} = E_{r:k} - E_{k-r+1:k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad r = 1, 2, \dots, k-1.$$

با اثباتی مشابه لم ۲ (پارک، ۱۹۹۵) برای آماره آزمون فوق، از آن نیز می‌توان به عنوان آزمون متقارن بودن توزیع استفاده نمود، با این تفاوت که می‌توان توان آزمون را برای مقادیر مختلف k و همچنین r محاسبه و بر روی آن بحث کرد. حال آماره آزمون فوق را با کمک برآورد آنتروپی، رابطه (۲)، و همچنین روش پیشنهادی پارک

(۱۹۹۹) که در رابطه (۴) مشاهده می شود به صورت زیر برآورد می کنیم

$$\hat{D}(J_{k,r}, n, w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{n}{rw} (x_{i+w:n} - x_{i-w:n}) \right) J_{k,r}(u_i), \quad (5)$$

که در آن $u = \frac{i}{n+1}$ و

$$J_{k,r}(u_i) = \frac{k!}{(k-r)!(r-1)!} \left[(1-u_i)^{k-r} u_i^{r-1} - u_i^{k-r} (1-u_i)^{r-1} \right].$$

در زیر با کمک رابطه (۵) مقادیر بحرانی آزمون $|\hat{D}(J_{k,r}, n, w)|$ را بر اساس روش مونت-کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه سازی کرده، سپس توان آزمون در سطح $\alpha = 0.05$ برای نمونه هایی به اندازه ۱۰ و ۲۰ برای مقادیر مختلف k, r و w در مقابل توزیع خن-دو (χ^2) با درجات آزادی ۱، ۴ و ۱۰، یکنواخت ($Unif.$)، گاما ($Gam.$) با پارامتر شکل: ۰/۵، وایبول ($Wei.$) با پارامتر شکل: ۰/۵ و تی (t) با درجات آزادی ۱، ۴ و ۱۰ محاسبه شده است. نتایج به ترتیب در جداول ۳ تا ۶ ارائه شده اند.

جدول ۳: توان آزمون ($\times 100$) برای $n = 10$ و مقادیر متفاوت k, r و w

| k | r | w | $\chi^2(1)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(10)$ | Unif. | Gam. | Wei. | t(1) | t(4) | t(10) |
|-----|-----|-----|-------------|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۲ | ۱ | ۱ | ۷۸/۹۷ | ۱۸/۶۲ | ۹/۹۹ | ۶/۹۸ | ۷۹/۹۶ | ۴۱/۵۹ | ۲۹/۲۲ | ۷/۳۵ | ۵/۷۶ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۸۰/۱۱۳ | ۲۴/۰۴ | ۱۱/۲۵ | ۷/۲۳ | ۸۰/۶۲ | ۴۹/۶۴ | ۳۸/۴۵ | ۹/۵۱ | ۵/۹۵ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۸۰/۸۸ | ۲۳/۵۹ | ۱۱/۰۲ | ۶/۹۸ | ۸۱/۰۰ | ۴۹/۷۴ | ۴۳/۲۹ | ۱۱/۰۶ | ۶/۸۸ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۷۷/۵۳ | ۲۴/۰۲ | ۱۱/۵۷ | ۵/۸۷ | ۷۷/۶۸ | ۴۹/۷۸ | ۴۷/۷۴ | ۱۱/۵۲ | ۶/۹۶ |
| ۴ | ۱ | ۱ | ۷۸/۰۶ | ۱۸/۱۹ | ۹/۵۷ | ۵/۸۴ | ۷۸/۱۶ | ۴۰/۵۳ | ۲۹/۱۷ | ۶/۸۴ | ۵/۸۲ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۸۲/۱۱ | ۲۴/۱۱ | ۱۱/۴۵ | ۶/۳۸ | ۸۱/۸۹ | ۴۸/۵۵ | ۳۸/۸۴ | ۹/۶۱ | ۶/۳۷ |
| ۴ | ۱ | ۳ | ۸۰/۸۲ | ۲۵/۰۵ | ۱۱/۵۴ | ۶/۳۴ | ۸۳/۱۰ | ۴۹/۶۴ | ۴۳/۶۰ | ۱۰/۵۲ | ۶/۸۱ |
| ۴ | ۱ | ۴ | ۷۷/۵۶ | ۲۵/۹۷ | ۱۱/۸۰ | ۵/۶۹ | ۷۷/۱۰ | ۴۸/۷۵ | ۴۷/۹۹ | ۱۱/۸۷ | ۶/۷۵ |
| ۴ | ۲ | ۱ | ۸۰/۵۸ | ۲۱/۵۴ | ۹/۹۹ | ۷/۴۴ | ۸۱/۸۱ | ۴۴/۰۶ | ۳۰/۲۶ | ۷/۵۸ | ۵/۶۲ |
| ۴ | ۲ | ۲ | ۸۱/۲۶ | ۲۳/۸۷ | ۱۱/۷۸ | ۷/۱۵ | ۸۲/۳۸ | ۴۹/۶۴ | ۳۹/۱۸ | ۹/۱۴ | ۵/۹۷ |
| ۴ | ۲ | ۳ | ۸۲/۱۳ | ۲۶/۱۸ | ۱۲/۹۲ | ۶/۶۴ | ۸۶/۳۸ | ۵۲/۱۲ | ۴۵/۴۵ | ۱۰/۹۱ | ۶/۲۶ |
| ۴ | ۲ | ۴ | ۷۶/۵۱ | ۲۷/۹۰ | ۱۲/۲۳ | ۴/۸۶ | ۷۷/۱۵ | ۴۹/۲۰ | ۴۹/۹۷ | ۱۲/۸۷ | ۷/۲۴ |

۵ بحث و نتیجه گیری

برای انجام آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی، می توان به طریق زیر عمل کرد، بطوریکه در این روش آزمون متقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی نسبت به روش پیشنهادی پارک (۱۹۹۹) از توان بیشتری برخوردار است.

جدول ۴: توان آزمون ($\times 100$) برای $n = 20$ و مقادیر متفاوت k , r و w .

| k | r | w | $\chi^2(1)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(10)$ | Unif. | Gam. | Wei. | t(1) | t(4) | t(10) |
|-----|-----|-----|-------------|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۲ | ۱ | ۱ | ۹۹/۲۲ | ۴۷/۹۶ | ۱۸/۵۸ | ۷/۱۸ | ۹۹/۲۷ | ۸۳/۶۴ | ۳۵/۶۰ | ۹/۲۶ | ۵/۸۸ |
| ۲ | ۱ | ۲ | ۹۹/۵۶ | ۵۵/۷۴ | ۲۲/۶۲ | ۷/۶۲ | ۹۹/۵۷ | ۸۸/۶۶ | ۴۳/۶۱ | ۱۰/۹۸ | ۶/۵۳ |
| ۲ | ۱ | ۳ | ۹۹/۵۸ | ۵۸/۴۶ | ۲۴/۱۸ | ۷/۶۰ | ۹۹/۵۷ | ۸۹/۱۷ | ۴۸/۲۴ | ۱۲/۳۳ | ۷/۱۸ |
| ۲ | ۱ | ۴ | ۹۹/۴۶ | ۶۰/۰۶ | ۲۵/۲۱ | ۷/۵۴ | ۹۹/۴۱ | ۸۸/۸۰ | ۵۱/۹۸ | ۱۳/۶۵ | ۷/۵۴ |
| ۲ | ۱ | ۵ | ۹۹/۳۶ | ۶۰/۰۲ | ۲۵/۶۶ | ۶/۸۸ | ۹۹/۲۹ | ۸۸/۶۶ | ۵۵/۲۹ | ۱۴/۸۹ | ۷/۵۲ |
| ۲ | ۱ | ۶ | ۹۹/۱۶ | ۵۹/۹۳ | ۲۵/۸۷ | ۵/۹۶ | ۹۹/۱۷ | ۸۸/۱۲ | ۵۸/۰۱ | ۱۶/۰۱ | ۸/۰۲ |
| ۲ | ۱ | ۷ | ۹۸/۹۳ | ۵۸/۸۱ | ۲۵/۸۸ | ۵/۲۰ | ۹۸/۹۰ | ۸۷/۴۶ | ۶۰/۱۰ | ۱۷/۰۲ | ۸/۳۹ |
| ۲ | ۱ | ۸ | ۹۸/۶۸ | ۵۰/۰۵ | ۲۶/۲۶ | ۴/۱۸ | ۹۸/۶۷ | ۸۶/۷۴ | ۶۲/۰۱ | ۱۸/۱۲ | ۸/۴۸ |
| ۲ | ۱ | ۹ | ۹۸/۲۹ | ۵۶/۶۸ | ۲۶/۴۶ | ۳/۱۴ | ۹۸/۱۶ | ۸۵/۵۴ | ۶۳/۹۲ | ۱۹/۰۷ | ۸/۷۱ |
| ۴ | ۱ | ۱ | ۹۹/۰۱ | ۴۸/۲۰ | ۱۷/۵۳ | ۷/۴۲ | ۹۸/۹۰ | ۸۳/۴۴ | ۳۵/۱۸ | ۹/۵۷ | ۶/۰۳ |
| ۴ | ۱ | ۲ | ۹۹/۳۷ | ۵۷/۴۵ | ۲۲/۴۶ | ۷/۴۶ | ۹۹/۴۲ | ۸۸/۳۳ | ۴۴/۰۴ | ۱۱/۸۱ | ۶/۸۱ |
| ۴ | ۱ | ۳ | ۹۹/۳۵ | ۵۹/۳۰ | ۲۴/۳۳ | ۷/۱۶ | ۹۹/۵۰ | ۸۹/۲۶ | ۴۸/۹۹ | ۱۳/۲۲ | ۷/۴۰ |
| ۴ | ۱ | ۴ | ۹۹/۲۸ | ۶۰/۸۱ | ۲۵/۳۸ | ۶/۸۵ | ۹۹/۳۵ | ۸۹/۲۰ | ۵۲/۶۵ | ۱۴/۶۹ | ۷/۶۳ |
| ۴ | ۱ | ۵ | ۹۹/۱۴ | ۶۰/۴۵ | ۲۶/۳۸ | ۶/۱۹ | ۹۹/۲۷ | ۸۸/۹۲ | ۵۵/۸۸ | ۱۵/۶۰ | ۷/۸۷ |
| ۴ | ۱ | ۶ | ۹۸/۹۲ | ۶۰/۱۵ | ۲۶/۸۶ | ۵/۶۰ | ۹۹/۰۸ | ۸۷/۸۹ | ۵۸/۰۴ | ۱۷/۲۶ | ۸/۱۳ |
| ۴ | ۱ | ۷ | ۹۸/۷۶ | ۵۹/۹۰ | ۲۶/۷۰ | ۵/۰۱ | ۹۸/۷۵ | ۸۶/۶۴ | ۶۰/۰۲ | ۱۷/۳۳ | ۸/۵۰ |
| ۴ | ۱ | ۸ | ۹۸/۵۸ | ۵۹/۴۳ | ۲۶/۵۲ | ۴/۲۱ | ۹۸/۴۱ | ۸۵/۷۱ | ۶۱/۸۷ | ۱۸/۶۵ | ۸/۹۹ |
| ۴ | ۱ | ۹ | ۹۸/۲۲ | ۵۸/۴۹ | ۲۶/۶۰ | ۳/۱۰ | ۹۸/۰۷ | ۸۴/۳۳ | ۶۳/۸۱ | ۱۹/۵۲ | ۹/۲۴ |
| ۴ | ۲ | ۱ | ۹۸/۵۹ | ۴۳/۸۵ | ۱۹/۱۳ | ۷/۵۱ | ۹۸/۴۰ | ۷۹/۹۹ | ۳۱/۴۹ | ۸/۷۲ | ۵/۸۹ |
| ۴ | ۲ | ۲ | ۹۹/۱۱ | ۵۲/۸۹ | ۲۲/۳۴ | ۸/۱۴ | ۹۹/۰۸ | ۸۶/۹۱ | ۳۹/۳۵ | ۱۰/۱۹ | ۶/۳۰ |
| ۴ | ۲ | ۳ | ۹۹/۱۶ | ۵۷/۳۹ | ۲۴/۳۳ | ۷/۹۰ | ۹۹/۲۲ | ۸۸/۲۳ | ۴۶/۱۷ | ۱۱/۸۶ | ۶/۷۷ |
| ۴ | ۲ | ۴ | ۹۹/۲۰ | ۵۸/۹۷ | ۲۶/۲۳ | ۷/۳۷ | ۹۹/۱۱ | ۸۸/۷۲ | ۵۱/۴۸ | ۱۴/۰۱ | ۷/۳۲ |
| ۴ | ۲ | ۵ | ۹۹/۱۱ | ۵۹/۰۶ | ۲۶/۷۸ | ۶/۴۸ | ۹۹/۰۱ | ۸۸/۷۸ | ۵۵/۹۳ | ۱۵/۶۹ | ۸/۰۵ |
| ۴ | ۲ | ۶ | ۹۸/۸۷ | ۵۸/۹۶ | ۲۶/۸۰ | ۵/۲۵ | ۹۸/۸۲ | ۸۸/۲۱ | ۵۹/۷۲ | ۱۷/۱۳ | ۸/۴۱ |
| ۴ | ۲ | ۷ | ۹۹/۵۸ | ۵۸/۱۱ | ۲۶/۶۸ | ۳/۹۹ | ۹۸/۵۱ | ۸۷/۳۹ | ۶۲/۱۴ | ۱۸/۴۱ | ۸/۹۰ |
| ۴ | ۲ | ۸ | ۹۸/۱۳ | ۵۶/۸۴ | ۲۶/۷۲ | ۲/۹۷ | ۹۸/۰۷ | ۸۵/۶۷ | ۶۴/۶۱ | ۱۹/۸۶ | ۹/۴۱ |
| ۴ | ۲ | ۹ | ۹۷/۵۹ | ۵۵/۲۵ | ۲۶/۱۶ | ۲/۰۹ | ۹۷/۳۹ | ۸۴/۱۸ | ۶۶/۳۴ | ۲۰/۸۲ | ۹/۷۰ |
| ۶ | ۱ | ۱ | ۹۸/۵۸ | ۴۲/۳۳ | ۱۵/۵۳ | ۶/۱۴ | ۹۸/۷۴ | ۸۱/۳۷ | ۳۳/۶۱ | ۹/۰۳ | ۵/۳۰ |
| ۶ | ۱ | ۲ | ۹۹/۳۲ | ۵۴/۰۳ | ۲۰/۳۰ | ۶/۵۴ | ۹۹/۳۷ | ۸۷/۶۵ | ۴۲/۷۳ | ۱۰/۸۱ | ۶/۴۹ |
| ۶ | ۱ | ۳ | ۹۹/۵۱ | ۵۸/۰۵ | ۲۲/۹۴ | ۶/۳۴ | ۹۹/۳۹ | ۸۹/۱۶ | ۴۸/۱۸ | ۱۲/۳۲ | ۶/۸۶ |
| ۶ | ۱ | ۴ | ۹۹/۳۷ | ۵۹/۹۳ | ۲۴/۵۸ | ۵/۹۶ | ۹۹/۳۲ | ۸۹/۴۳ | ۵۲/۳۴ | ۱۳/۸۷ | ۶/۹۹ |
| ۶ | ۱ | ۵ | ۹۹/۱۸ | ۶۰/۳۱ | ۲۵/۴۲ | ۵/۸۱ | ۹۹/۲۸ | ۸۹/۰۲ | ۵۵/۳۴ | ۱۵/۰۷ | ۷/۵۷ |
| ۶ | ۱ | ۶ | ۹۹/۰۴ | ۶۰/۴۳ | ۲۵/۴۹ | ۵/۳۸ | ۹۹/۱۲ | ۸۸/۳۴ | ۵۷/۹۳ | ۱۵/۹۶ | ۸/۰۵ |
| ۶ | ۱ | ۷ | ۹۸/۸۹ | ۵۹/۷۲ | ۲۶/۲۲ | ۵/۱۲ | ۹۸/۸۸ | ۸۷/۶۵ | ۵۹/۸۸ | ۱۶/۵۷ | ۸/۴۳ |
| ۶ | ۱ | ۸ | ۹۸/۵۳ | ۵۸/۹۵ | ۲۶/۶۶ | ۴/۶۰ | ۹۸/۵۵ | ۸۶/۸۸ | ۶۱/۹۶ | ۱۷/۳۸ | ۸/۴۷ |
| ۶ | ۱ | ۹ | ۹۸/۱۸ | ۵۸/۱۸ | ۲۶/۹۸ | ۳/۸۰ | ۹۸/۲۹ | ۸۶/۱۵ | ۶۳/۸۰ | ۱۸/۰۴ | ۸/۶۵ |
| ۶ | ۲ | ۱ | ۹۹/۰۹ | ۴۸/۲۹ | ۲۰/۷۴ | ۸/۰۶ | ۹۹/۱۷ | ۸۵/۵۹ | ۳۳/۳۱ | ۹/۱۳ | ۶/۱۶ |
| ۶ | ۲ | ۲ | ۹۹/۴۳ | ۵۵/۷۱ | ۲۵/۰۰ | ۸/۳۵ | ۹۹/۳۷ | ۸۹/۷۳ | ۴۱/۸۱ | ۱۰/۵۸ | ۶/۸۸ |
| ۶ | ۲ | ۳ | ۹۹/۴۰ | ۵۸/۳۹ | ۲۶/۱۲ | ۷/۶۸ | ۹۹/۲۷ | ۹۰/۶۳ | ۴۸/۰۸ | ۱۲/۴۱ | ۶/۸۷ |
| ۶ | ۲ | ۴ | ۹۹/۲۶ | ۵۹/۱۱ | ۲۶/۴۶ | ۷/۰۹ | ۹۹/۱۲ | ۹۰/۱۳ | ۵۲/۶۶ | ۱۳/۶۲ | ۷/۴۲ |
| ۶ | ۲ | ۵ | ۹۹/۰۴ | ۵۸/۷۹ | ۲۷/۳۰ | ۶/۰۹ | ۹۹/۰۱ | ۸۹/۶۷ | ۵۶/۲۷ | ۱۵/۳۰ | ۸/۰۷ |
| ۶ | ۲ | ۶ | ۹۸/۷۴ | ۵۹/۲۸ | ۲۷/۴۴ | ۵/۲۹ | ۹۸/۸۵ | ۸۸/۳۱ | ۵۹/۰۶ | ۱۷/۱۱ | ۸/۸۶ |
| ۶ | ۲ | ۷ | ۹۸/۳۷ | ۵۸/۵۳ | ۲۷/۳۵ | ۴/۲۳ | ۹۸/۵۷ | ۸۷/۶۸ | ۶۱/۷۱ | ۱۸/۵۰ | ۹/۲۵ |
| ۶ | ۲ | ۸ | ۹۸/۰۷ | ۵۷/۴۸ | ۲۷/۰۶ | ۳/۱۹ | ۹۸/۱۹ | ۸۶/۸۹ | ۶۳/۸۱ | ۲۰/۰۵ | ۹/۴۵ |
| ۶ | ۲ | ۹ | ۹۷/۷۱ | ۵۶/۲۵ | ۲۷/۰۵ | ۲/۲۹ | ۹۷/۷۶ | ۸۵/۴۶ | ۶۵/۴۴ | ۲۱/۲۷ | ۹/۵۴ |

جدول ۵: ادامه توان آزمون ($\times 100$) برای $n = 20$ و مقادیر متفاوت k , r و w .

| k | r | w | $\chi^2(1)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(10)$ | Unif. | Gam. | Wei. | t(1) | t(4) | t(10) |
|-----|-----|-----|-------------|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۶ | ۳ | ۱ | ۹۴/۸۶ | ۳۳/۵۵ | ۱۴/۳۴ | ۸/۲۵ | ۹۵/۵۵ | ۶۶/۶۲ | ۲۴/۵۶ | ۶/۶۱ | ۵/۷۲ |
| ۶ | ۳ | ۲ | ۹۷/۶۰ | ۴۳/۶۵ | ۱۸/۱۹ | ۹/۵۳ | ۹۷/۲۹ | ۷۷/۲۳ | ۳۲/۷۰ | ۷/۴۳ | ۵/۹۹ |
| ۶ | ۳ | ۳ | ۹۸/۶۳ | ۵۱/۰۷ | ۲۰/۹۴ | ۹/۵۸ | ۹۸/۳۱ | ۸۳/۹۵ | ۴۱/۴۳ | ۹/۴۹ | ۶/۶۹ |
| ۶ | ۳ | ۴ | ۹۸/۹۳ | ۵۷/۱۵ | ۲۴/۲۱ | ۹/۰۳ | ۹۸/۶۸ | ۸۷/۱۶ | ۴۹/۵۶ | ۱۲/۲۶ | ۶/۸۱ |
| ۶ | ۳ | ۵ | ۹۸/۸۹ | ۵۹/۸۷ | ۲۶/۱۰ | ۷/۳۴ | ۹۹/۴۲ | ۸۹/۸۳ | ۵۵/۸۹ | ۱۴/۸۳ | ۷/۶۹ |
| ۶ | ۳ | ۶ | ۹۸/۷۵ | ۶۰/۴۷ | ۲۷/۲۶ | ۵/۱۷ | ۹۸/۸۸ | ۸۸/۵۴ | ۶۰/۱۸ | ۱۷/۳۰ | ۸/۶۲ |
| ۶ | ۳ | ۷ | ۹۸/۵۰ | ۵۹/۶۹ | ۲۷/۶۷ | ۳/۷۵ | ۹۸/۳۹ | ۸۷/۸۴ | ۶۳/۴۴ | ۱۹/۰۷ | ۹/۴۸ |
| ۶ | ۳ | ۸ | ۹۸/۰۲ | ۵۷/۹۱ | ۲۶/۸۷ | ۲/۴۱ | ۹۸/۰۲ | ۸۵/۸۱ | ۶۵/۶۸ | ۲۰/۸۲ | ۹/۷۵ |
| ۶ | ۳ | ۹ | ۹۷/۱۳ | ۵۶/۳۷ | ۲۶/۳۷ | ۱/۴۲ | ۹۷/۲۰ | ۸۳/۲۸ | ۶۷/۲۰ | ۲۲/۱۲ | ۱۰/۲۵ |
| ۸ | ۱ | ۱ | ۹۷/۹۰ | ۳۷/۳۰ | ۱۴/۸۸ | ۶/۵۶ | ۹۷/۹۱ | ۷۵/۸۴ | ۳۲/۰۱ | ۹/۳۶ | ۵/۷۷ |
| ۸ | ۱ | ۲ | ۹۹/۲۳ | ۵۰/۴۳ | ۱۹/۹۴ | ۷/۰۸ | ۹۹/۱۵ | ۸۵/۷۷ | ۴۲/۹۳ | ۱۲/۴۳ | ۶/۵۶ |
| ۸ | ۱ | ۳ | ۹۹/۳۲ | ۵۵/۵۸ | ۲۲/۳۹ | ۶/۶۸ | ۹۹/۲۲ | ۸۸/۱۷ | ۴۸/۵۹ | ۱۳/۹۸ | ۷/۱۴ |
| ۸ | ۱ | ۴ | ۹۹/۲۷ | ۵۸/۴۶ | ۲۴/۰۱ | ۶/۵۷ | ۹۹/۲۲ | ۸۸/۹۳ | ۵۱/۸۵ | ۱۴/۸۵ | ۷/۸۴ |
| ۸ | ۱ | ۵ | ۹۹/۱۸ | ۵۹/۸۴ | ۲۵/۴۳ | ۶/۲۷ | ۹۹/۱۹ | ۸۹/۲۳ | ۵۴/۵۴ | ۱۵/۹۱ | ۸/۰۰ |
| ۸ | ۱ | ۶ | ۹۹/۰۸ | ۵۹/۵۲ | ۲۶/۱۴ | ۶/۲۲ | ۹۹/۰۸ | ۸۹/۰۲ | ۵۶/۸۲ | ۱۶/۸۲ | ۷/۹۰ |
| ۸ | ۱ | ۷ | ۹۸/۹۵ | ۵۹/۳۵ | ۲۶/۰۰ | ۵/۹۶ | ۹۸/۷۹ | ۸۸/۳۳ | ۵۸/۴۱ | ۱۷/۱۷ | ۸/۱۶ |
| ۸ | ۱ | ۸ | ۹۸/۸۱ | ۵۸/۱۵ | ۲۶/۲۳ | ۵/۳۸ | ۹۸/۵۰ | ۸۷/۲۵ | ۵۹/۹۷ | ۱۷/۸۲ | ۸/۱۶ |
| ۸ | ۱ | ۹ | ۹۸/۴۴ | ۵۷/۶۷ | ۲۶/۱۲ | ۴/۵۳ | ۹۸/۰۸ | ۸۶/۰۹ | ۶۱/۷۳ | ۱۸/۱۷ | ۸/۵۵ |
| ۸ | ۲ | ۱ | ۹۹/۲۵ | ۵۰/۸۷ | ۲۰/۷۳ | ۷/۶۳ | ۹۹/۴۴ | ۸۶/۱۸ | ۳۴/۷۷ | ۱۰/۰۱ | ۶/۳۹ |
| ۸ | ۲ | ۲ | ۹۹/۵۰ | ۵۷/۰۶ | ۲۵/۰۷ | ۸/۳۵ | ۹۹/۶۴ | ۸۹/۸۶ | ۴۲/۵۷ | ۱۱/۹۱ | ۷/۰۷ |
| ۸ | ۲ | ۳ | ۹۹/۳۹ | ۵۹/۸۸ | ۲۶/۶۶ | ۷/۷۳ | ۹۹/۵۵ | ۹۰/۰۹ | ۴۸/۳۱ | ۱۳/۴۸ | ۷/۳۳ |
| ۸ | ۲ | ۴ | ۹۹/۲۶ | ۶۰/۱۴ | ۲۷/۵۲ | ۶/۶۸ | ۹۹/۳۸ | ۸۹/۶۳ | ۵۲/۳۴ | ۱۵/۲۳ | ۷/۹۴ |
| ۸ | ۲ | ۵ | ۹۹/۱۸ | ۶۰/۱۷ | ۲۷/۷۳ | ۶/۰۶ | ۹۹/۱۹ | ۸۹/۰۴ | ۵۵/۵۶ | ۱۶/۶۸ | ۸/۳۹ |
| ۸ | ۲ | ۶ | ۹۹/۰۸ | ۵۹/۸۴ | ۲۸/۰۱ | ۵/۶۰ | ۹۸/۹۷ | ۸۸/۲۶ | ۵۸/۳۰ | ۱۷/۵۰ | ۸/۷۹ |
| ۸ | ۲ | ۷ | ۹۸/۸۵ | ۵۹/۲۸ | ۲۷/۷۹ | ۴/۸۰ | ۹۸/۷۵ | ۸۷/۰۶ | ۶۰/۶۰ | ۱۸/۴۹ | ۹/۰۷ |
| ۸ | ۲ | ۸ | ۹۸/۴۱ | ۵۸/۶۰ | ۲۸/۳۱ | ۳/۹۸ | ۹۸/۴۳ | ۸۶/۲۳ | ۶۲/۵۶ | ۱۹/۵۷ | ۹/۲۲ |
| ۸ | ۲ | ۹ | ۹۸/۳۴ | ۵۷/۹۸ | ۲۸/۱۹ | ۳/۰۹ | ۹۸/۰۷ | ۸۵/۱۷ | ۶۴/۵۹ | ۲۰/۵۸ | ۹/۷۲ |
| ۸ | ۳ | ۱ | ۹۷/۷۱ | ۳۹/۲۷ | ۱۷/۳۵ | ۷/۸۶ | ۹۷/۶۶ | ۷۵/۸۹ | ۲۷/۹۳ | ۷/۶۷ | ۵/۶۰ |
| ۸ | ۳ | ۲ | ۹۸/۷۲ | ۴۹/۴۲ | ۲۱/۹۰ | ۸/۸۳ | ۹۸/۹۲ | ۸۳/۳۸ | ۳۷/۱۲ | ۸/۴۹ | ۶/۰۴ |
| ۸ | ۳ | ۳ | ۹۹/۱۲ | ۵۵/۷۴ | ۲۵/۰۵ | ۸/۹۱ | ۹۹/۱۵ | ۸۷/۶۸ | ۴۵/۰۸ | ۱۰/۸۳ | ۶/۲۸ |
| ۸ | ۳ | ۴ | ۹۹/۰۷ | ۵۹/۰۰ | ۲۷/۰۵ | ۷/۹۲ | ۹۹/۲۶ | ۸۸/۹۱ | ۵۱/۹۰ | ۱۲/۸۷ | ۷/۳۱ |
| ۸ | ۳ | ۵ | ۹۸/۹۸ | ۶۰/۱۲ | ۲۸/۰۰ | ۶/۶۷ | ۹۹/۱۸ | ۸۸/۹۳ | ۵۶/۴۹ | ۱۵/۱۵ | ۸/۱۱ |
| ۸ | ۳ | ۶ | ۹۸/۸۸ | ۵۹/۵۷ | ۲۸/۵۲ | ۵/۲۲ | ۹۸/۹۹ | ۸۷/۹۲ | ۵۹/۹۲ | ۱۷/۱۰ | ۸/۷۰ |
| ۸ | ۳ | ۷ | ۹۸/۵۵ | ۵۸/۷۳ | ۲۸/۹۶ | ۳/۶۶ | ۹۸/۷۸ | ۸۶/۸۳ | ۶۲/۷۷ | ۱۸/۸۰ | ۹/۱۹ |
| ۸ | ۳ | ۸ | ۹۸/۳۱ | ۵۷/۶۶ | ۲۸/۸۲ | ۲/۴۳ | ۹۸/۳۱ | ۸۵/۶۳ | ۶۴/۸۸ | ۲۰/۳۳ | ۹/۷۶ |
| ۸ | ۳ | ۹ | ۹۷/۸۴ | ۵۶/۰۲ | ۲۷/۹۳ | ۱/۵۲ | ۹۷/۷۰ | ۸۳/۹۷ | ۶۶/۴۳ | ۲۱/۶۹ | ۱۰/۳۶ |
| ۸ | ۴ | ۱ | ۸۸/۲۶ | ۲۶/۱۵ | ۱۱/۳۲ | ۷/۶۳ | ۸۷/۹۹ | ۵۳/۰۸ | ۱۹/۱۷ | ۶/۰۲ | ۵/۷۱ |
| ۸ | ۴ | ۲ | ۹۴/۵۳ | ۳۵/۲۰ | ۱۵/۱۹ | ۸/۵۵ | ۹۳/۶۲ | ۶۶/۰۷ | ۲۶/۶۶ | ۶/۴۳ | ۵/۸۱ |
| ۸ | ۴ | ۳ | ۹۷/۲۷ | ۴۴/۷۵ | ۱۹/۴۶ | ۹/۲۸ | ۹۶/۸۴ | ۷۷/۳۷ | ۳۶/۲۹ | ۷/۳۵ | ۶/۳۷ |
| ۸ | ۴ | ۴ | ۹۸/۵۶ | ۵۴/۵۳ | ۲۴/۱۷ | ۸/۶۳ | ۹۸/۱۲ | ۸۴/۶۲ | ۴۷/۴۱ | ۱۰/۲۴ | ۷/۵۵ |
| ۸ | ۴ | ۵ | ۹۸/۹۱ | ۵۸/۶۴ | ۲۷/۴۰ | ۷/۲۵ | ۹۸/۵۳ | ۸۷/۸۵ | ۵۵/۳۵ | ۱۳/۸۵ | ۸/۰۰ |
| ۸ | ۴ | ۶ | ۹۸/۸۱ | ۶۰/۵۹ | ۲۷/۸۹ | ۵/۱۲ | ۹۸/۵۳ | ۸۸/۵۲ | ۶۰/۴۴ | ۱۷/۲۵ | ۸/۸۶ |
| ۸ | ۴ | ۷ | ۹۸/۴۱ | ۵۹/۹۲ | ۲۸/۳۹ | ۳/۳۷ | ۹۸/۲۶ | ۸۶/۴۸ | ۶۴/۲۱ | ۱۹/۹۰ | ۹/۶۶ |
| ۸ | ۴ | ۸ | ۹۷/۶۹ | ۵۷/۹۶ | ۲۷/۴۷ | ۱/۸۷ | ۹۷/۴۰ | ۸۴/۵۱ | ۶۶/۲۳ | ۲۱/۸۱ | ۱۰/۱۸ |
| ۸ | ۴ | ۹ | ۹۶/۵۱ | ۵۴/۹۷ | ۲۶/۳۹ | ۱/۰۳ | ۹۶/۲۰ | ۸۱/۴۸ | ۶۷/۴۲ | ۲۲/۴۷ | ۱۰/۸۸ |

جدول ۶: ادامه توان آزمون (۱۰۰ ×) برای $n = 20$ و مقادیر متفاوت k, r و w .

| k | r | w | $\chi^2(1)$ | $\chi^2(4)$ | $\chi^2(10)$ | Unif. | Gam. | Wei. | t(1) | t(4) | t(10) |
|-----|-----|-----|-------------|-------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۱۰ | ۱ | ۱ | ۹۶/۹۱ | ۳۱/۸۴ | ۱۱/۷۰ | ۶/۰۱ | ۹۶/۷۸ | ۷۱/۹۶ | ۳۰/۴۴ | ۷/۵۴ | ۶/۰۳ |
| ۱۰ | ۱ | ۲ | ۹۸/۸۵ | ۴۶/۴۲ | ۱۸/۲۷ | ۶/۱۵ | ۹۸/۶۹ | ۸۳/۹۶ | ۴۱/۷۸ | ۱۰/۳۳ | ۶/۷۲ |
| ۱۰ | ۱ | ۳ | ۹۹/۱۵ | ۵۲/۸۹ | ۲۱/۱۶ | ۶/۲۶ | ۹۹/۰۹ | ۸۷/۴۸ | ۴۸/۲۵ | ۱۲/۲۷ | ۶/۹۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۴ | ۹۹/۲۳ | ۵۶/۴۶ | ۲۳/۳۲ | ۶/۱۴ | ۹۹/۰۹ | ۸۹/۳۲ | ۵۲/۰۷ | ۱۳/۶۲ | ۷/۵۶ |
| ۱۰ | ۱ | ۵ | ۹۹/۳۲ | ۵۷/۹۰ | ۲۴/۵۹ | ۵/۹۳ | ۹۹/۱۲ | ۸۹/۳۴ | ۵۵/۲۸ | ۱۴/۶۲ | ۷/۹۸ |
| ۱۰ | ۱ | ۶ | ۹۹/۱۱ | ۵۸/۶۶ | ۲۴/۷۰ | ۵/۸۱ | ۹۹/۰۳ | ۸۹/۲۱ | ۵۶/۸۷ | ۱۵/۶۶ | ۷/۹۳ |
| ۱۰ | ۱ | ۷ | ۹۹/۰۲ | ۵۸/۵۹ | ۲۵/۷۶ | ۵/۷۰ | ۹۸/۷۵ | ۸۸/۴۶ | ۵۸/۵۷ | ۱۵/۸۶ | ۸/۱۴ |
| ۱۰ | ۱ | ۸ | ۹۸/۵۸ | ۵۸/۶۹ | ۲۵/۵۶ | ۵/۵۰ | ۹۸/۳۷ | ۸۷/۲۰ | ۵۹/۹۴ | ۱۶/۳۸ | ۸/۳۹ |
| ۱۰ | ۱ | ۹ | ۹۸/۳۴ | ۵۸/۶۹ | ۲۵/۳۰ | ۴/۵۱ | ۹۷/۹۲ | ۸۶/۴۴ | ۶۱/۳۵ | ۱۶/۹۴ | ۸/۶۶ |
| ۱۰ | ۲ | ۱ | ۹۹/۱۸ | ۴۹/۴۸ | ۱۹/۸۶ | ۷/۵۴ | ۹۹/۲۹ | ۸۵/۲۱ | ۳۴/۳۰ | ۹/۱۵ | ۵/۹۰ |
| ۱۰ | ۲ | ۲ | ۹۹/۴۹ | ۵۶/۷۸ | ۲۲/۴۹ | ۷/۷۹ | ۹۹/۴۴ | ۸۹/۲۷ | ۴۱/۹۵ | ۱۱/۱۷ | ۶/۳۹ |
| ۱۰ | ۲ | ۳ | ۹۹/۴۶ | ۵۹/۰۰ | ۲۴/۳۵ | ۷/۵۵ | ۹۹/۴۲ | ۹۰/۳۰ | ۴۷/۳۱ | ۱۳/۰۶ | ۷/۲۶ |
| ۱۰ | ۲ | ۴ | ۹۹/۳۸ | ۵۹/۵۵ | ۲۵/۴۹ | ۶/۹۶ | ۹۹/۴۵ | ۸۹/۶۱ | ۵۱/۱۳ | ۱۴/۴۰ | ۷/۶۶ |
| ۱۰ | ۲ | ۵ | ۹۹/۱۶ | ۵۹/۸۳ | ۲۵/۹۰ | ۶/۶۲ | ۹۹/۳۴ | ۸۹/۰۳ | ۵۴/۳۸ | ۱۵/۳۶ | ۸/۱۸ |
| ۱۰ | ۲ | ۶ | ۹۸/۹۸ | ۵۹/۴۶ | ۲۶/۲۶ | ۶/۱۳ | ۹۹/۲۵ | ۸۸/۳۸ | ۵۶/۵۷ | ۱۶/۲۸ | ۸/۳۵ |
| ۱۰ | ۲ | ۷ | ۹۸/۵۵ | ۵۹/۰۹ | ۲۶/۴۳ | ۵/۸۸ | ۹۹/۰۱ | ۸۷/۳۱ | ۵۸/۶۰ | ۱۷/۰۳ | ۸/۷۸ |
| ۱۰ | ۲ | ۸ | ۹۸/۲۲ | ۵۸/۱۲ | ۲۶/۷۳ | ۴/۸۸ | ۹۸/۶۸ | ۸۶/۴۰ | ۶۰/۲۵ | ۱۸/۱۱ | ۹/۱۵ |
| ۱۰ | ۲ | ۹ | ۹۷/۹۹ | ۵۷/۲۹ | ۲۶/۷۷ | ۳/۷۵ | ۹۸/۴۳ | ۸۵/۵۵ | ۶۲/۲۳ | ۱۸/۹۷ | ۹/۲۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۱ | ۹۸/۷۱ | ۴۵/۹۲ | ۱۸/۹۴ | ۸/۰۷ | ۹۸/۷۱ | ۸۲/۷۵ | ۳۱/۵۱ | ۷/۹۹ | ۵/۷۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۲ | ۹۹/۳۳ | ۵۵/۶۹ | ۲۳/۶۹ | ۸/۵۶ | ۹۹/۳۲ | ۸۸/۵۹ | ۴۰/۴۵ | ۱۰/۰۳ | ۶/۰۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۳ | ۹۹/۴۲ | ۵۹/۳۱ | ۲۵/۸۷ | ۸/۰۶ | ۹۹/۳۸ | ۹۰/۴۲ | ۴۶/۲۸ | ۱۲/۳۴ | ۶/۳۴ |
| ۱۰ | ۳ | ۴ | ۹۹/۲۷ | ۶۰/۰۹ | ۲۶/۹۶ | ۶/۹۰ | ۹۹/۲۷ | ۸۹/۷۶ | ۵۱/۹۶ | ۱۴/۴۰ | ۷/۱۴ |
| ۱۰ | ۳ | ۵ | ۹۹/۱۸ | ۶۰/۱۴ | ۲۷/۱۹ | ۵/۹۶ | ۹۹/۱۱ | ۸۹/۱۲ | ۵۶/۰۶ | ۱۵/۹۸ | ۷/۶۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۶ | ۹۹/۰۸ | ۵۹/۸۵ | ۲۷/۳۶ | ۴/۸۴ | ۹۸/۸۸ | ۸۸/۳۶ | ۵۹/۰۵ | ۱۷/۶۰ | ۷/۸۹ |
| ۱۰ | ۳ | ۷ | ۹۸/۹۵ | ۵۹/۲۵ | ۲۷/۶۳ | ۳/۹۰ | ۹۸/۵۷ | ۸۶/۹۸ | ۶۱/۲۴ | ۱۸/۸۹ | ۸/۳۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۸ | ۹۸/۷۱ | ۵۸/۴۴ | ۲۷/۷۱ | ۲/۷۹ | ۹۸/۱۸ | ۸۶/۰۲ | ۶۳/۳۹ | ۱۹/۹۷ | ۸/۸۱ |
| ۱۰ | ۳ | ۹ | ۹۸/۴۴ | ۵۷/۲۱ | ۲۶/۹۴ | ۱/۹۲ | ۹۷/۷۶ | ۸۴/۷۸ | ۶۵/۳۷ | ۲۰/۸۶ | ۹/۵۱ |
| ۱۰ | ۴ | ۱ | ۹۴/۸۶ | ۳۱/۷۸ | ۱۴/۲۵ | ۷/۳۴ | ۹۴/۳۳ | ۶۳/۱۰ | ۲۲/۹۴ | ۶/۹۲ | ۵/۱۶ |
| ۱۰ | ۴ | ۲ | ۹۷/۳۸ | ۴۱/۱۳ | ۱۷/۳۳ | ۸/۶۸ | ۹۷/۴۱ | ۷۵/۸۵ | ۳۱/۸۱ | ۷/۷۱ | ۵/۴۷ |
| ۱۰ | ۴ | ۳ | ۹۸/۵۶ | ۴۹/۷۶ | ۲۰/۷۹ | ۹/۴۳ | ۹۸/۴۶ | ۸۲/۸۴ | ۴۱/۷۴ | ۱۰/۱۷ | ۵/۸۳ |
| ۱۰ | ۴ | ۴ | ۹۸/۹۷ | ۵۵/۶۸ | ۲۴/۷۶ | ۸/۶۱ | ۹۸/۸۲ | ۸۶/۸۷ | ۴۹/۹۲ | ۱۲/۴۰ | ۶/۳۹ |
| ۱۰ | ۴ | ۵ | ۹۹/۱۹ | ۵۸/۷۹ | ۲۶/۶۹ | ۷/۲۵ | ۹۸/۹۱ | ۸۸/۹۴ | ۵۶/۱۷ | ۱۴/۶۴ | ۷/۵۱ |
| ۱۰ | ۴ | ۶ | ۹۸/۷۷ | ۵۸/۹۶ | ۲۷/۷۹ | ۵/۴۸ | ۹۸/۷۸ | ۸۷/۹۶ | ۶۰/۷۷ | ۱۶/۹۱ | ۸/۰۶ |
| ۱۰ | ۴ | ۷ | ۹۸/۵۸ | ۵۸/۵۹ | ۲۷/۹۱ | ۳/۶۷ | ۹۸/۴۶ | ۸۶/۷۷ | ۶۳/۷۰ | ۱۸/۸۶ | ۸/۷۰ |
| ۱۰ | ۴ | ۸ | ۹۷/۸۹ | ۵۷/۰۴ | ۲۷/۷۸ | ۲/۳۳ | ۹۷/۹۹ | ۸۵/۲۵ | ۶۵/۸۶ | ۲۰/۸۶ | ۹/۷۳ |
| ۱۰ | ۴ | ۹ | ۹۶/۹۵ | ۴۵/۷۱ | ۲۷/۲۲ | ۱/۵۵ | ۹۷/۲۴ | ۸۲/۸۵ | ۶۷/۳۱ | ۲۱/۸۴ | ۱۰/۳۵ |
| ۱۰ | ۵ | ۱ | ۸۱/۷۰ | ۲۱/۲۴ | ۹/۸۸ | ۷/۴۴ | ۸۱/۴۷ | ۴۵/۸۳ | ۱۶/۹۸ | ۵/۷۸ | ۴/۸۴ |
| ۱۰ | ۵ | ۲ | ۸۹/۹۶ | ۲۸/۵۶ | ۱۲/۴۴ | ۸/۵۲ | ۸۹/۸۹ | ۵۷/۵۱ | ۲۲/۵۷ | ۶/۱۵ | ۵/۱۰ |
| ۱۰ | ۵ | ۳ | ۹۵/۲۲ | ۳۸/۲۴ | ۱۶/۵۳ | ۱۰/۷۶ | ۹۵/۰۹ | ۷۱/۳۵ | ۳۲/۵۰ | ۷/۲۰ | ۵/۴۴ |
| ۱۰ | ۵ | ۴ | ۹۷/۸۰ | ۶۰/۵۸ | ۳۱/۲۶ | ۱۱/۱۸ | ۹۷/۶۹ | ۹۱/۳۲ | ۵۴/۹۱ | ۱۹/۳۲ | ۶/۱۲ |
| ۱۰ | ۵ | ۵ | ۹۸/۴۴ | ۶۲/۳۸ | ۲۹/۳۰ | ۹/۶۴ | ۹۹/۷۴ | ۹۵/۹۸ | ۶۵/۲۷ | ۲۴/۳۳ | ۷/۳۱ |
| ۱۰ | ۵ | ۶ | ۹۸/۶۱ | ۵۹/۴۵ | ۲۷/۵۱ | ۵/۳۵ | ۹۸/۷۱ | ۸۹/۰۹ | ۶۹/۳۳ | ۲۰/۸۲ | ۸/۹۵ |
| ۱۰ | ۵ | ۷ | ۹۸/۲۲ | ۵۸/۲۸ | ۲۸/۰۲ | ۳/۳۱ | ۹۸/۳۶ | ۸۶/۰۶ | ۶۴/۸۷ | ۱۹/۵۰ | ۱۰/۰۸ |
| ۱۰ | ۵ | ۸ | ۹۷/۴۱ | ۵۵/۸۰ | ۲۷/۰۹ | ۱/۹۷ | ۹۷/۵۳ | ۸۳/۶۱ | ۶۷/۲۰ | ۲۱/۰۳ | ۱۰/۸۸ |
| ۱۰ | ۵ | ۹ | ۹۵/۹۰ | ۵۲/۲۶ | ۲۵/۸۰ | ۱/۲۳ | ۹۶/۰۹ | ۷۹/۹۶ | ۶۸/۶۱ | ۲۲/۰۷ | ۱۱/۴۵ |

از مقایسه مقادیر جداول ۳ تا ۶ مشاهده می شود مقادیر مختلف k روی توان آزمون تأثیر داشته، و بطور کلی بیشترین توان برای اندازه نمونه $n = 10$ (جدول ۳) مربوط به $k = 4$ و برای اندازه نمونه $n = 20$ (جداول ۴ تا ۶) مربوط به $k = 10$ می باشد یعنی با افزایش k توان افزایش یافته است. همچنین مقادیر مختلف r نیز بر روی مقدار توان بی تأثیر نبوده بطوری که برای هر k با افزایش مقدار r توان نیز افزایش یافته است. از این رو در اندازه نمونه $n = 10$ برای $k = 4$ مقدار r برابر ۲، و در اندازه نمونه $n = 20$ برای $k = 10$ مقدار r برابر ۵ توصیه می شود. در مورد مقدار w نتایج گرفته شده مشابه جدول ۱ می باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده‌ی داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده در این مقاله شده کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند، در ضمن از حمایت مالی قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز تشکر و قدردانی می شود.

مراجع

- Anderson, T. W. and Darling, D. A., (1954), *A Test of Goodness of Fit*, Journal of American Statistical Association, **49**, 765-769.
- Arizono, I. and Ohta, H. (1989), *A Test for Normality Based on Kullback-Leibler Information* The American Statistician, **43**, 20-23.
- Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), *Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type-II Censored Data*, IEEE Transaction on Reliability, **56(2)**, 301-307.
- David, F. N. and Johnson, R. A. (1956), *Some Tests of Significance with Order Variables*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **18**, 1-20.

آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی ۱۲۰

Doksum, K. A., Fenstad, G. and Aaberge, R. (1976), *Plots and Tests for Symmetry*, Biometrika, **64**, 473-487.

Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), *Entropy-based Tests of Uniformity* Journal of American Statistical Association, **76**, 967-974.

Ebrahimi, N. and Habibullah, M. (1992), *Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **54**, 739-748.

Park, S. (1995), *The Entropy of Consecutive Order Statistics*, IEEE Transaction Information Theory, **41**, 2003-2007.

Park, S. (1999), *A Goodness-of-fit Test for Normality Based on the Sample Entropy of Order Statistics*, Statistics and Probability Letters, **44**, 359-363.

Park, S. (2005), *Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data*, IEEE Transaction on Reliability, **54**, 22-26.

Shannon, C. E. (1948), *A Mathematical Theory of Communications*, Bell System Technical Journal, **27**, 379-423; 623-656.

Shapiro, S. S. and Wilk, M.B. (1965), *An Analysis of Variance Test for Normality*, Biometrika, **52**, 591-611.

Vasicek, O. (1976), *A Test for Normality Based on Sample Entropy*, Journal of Royal Statistical Society, Ser. B, **38**, 730-737.