





On Likelihood Ratio Ordering of Parallel Systems with Two Generalized Exponential Components

Haidari, A.,¹ , Sattari, M.,²  Barmalzan, G.,¹ 

¹Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

²Department of Mathematics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Corresponding author: M. Sattari, sattari@uoz.ac.ir

Received: 10 March 2021 **Revised:** 2 February 2022 **Accepted and Published Online:** 15 February 2022.

Introduction

The exponential distribution, because of its memoryless, has a central role in reliability theory and survival analysis. But, this distribution is not a suitable model to fit the data sets in practical situations due to its constant hazard rate function. For this reason, some generalizations of the exponential distribution exist in the literature. The generalized exponential distribution is introduced by adding a shape parameter to the exponential distribution via the exponentiated method. This distribution admits both increasing and decreasing hazard rate function. For more information on the generalized exponential distribution and its applications, one can refer to Gupta and Kundu (2007) and Nadarajah (2011).

Comparisons of parallel systems with two independent heterogeneous exponential components are studied extensively in the literature. Boland et al. (1994) proved that the hazard rate order between two parallel systems holds under the majorization order between the vectors of the hazard rate parameters. This result is extended to the likelihood ratio order by Dykstra et al. (1997). In this direction, Zhao and Balakrishnan (2012) obtained some characterization results concerning the hazard rate and likelihood ratio orders using the p -larger and weak majorization orders between the hazard rate parameters vectors. Yan et al. (2012) established sufficient conditions to compare two parallel systems in the hazard rate and likelihood ratio orders. The present work provides a sufficient condition to compare parallel systems comprising two independent heterogeneous generalized exponential

components in the likelihood ratio order.

Material and Methods

The comparison of essential characteristics associated with lifetimes of technical systems is an exciting topic in reliability theory since it usually enables us to approximate complex systems with simpler systems and subsequently obtain various bounds for important ageing characteristics of the complex system. A convenient tool for this purpose is the theory of stochastic orderings.

Results and Discussion

Consider two parallel systems with their component lifetimes following a generalized exponential distribution. In this paper, based on existing shape and scale parameters included in the distribution of one of the systems, we introduce a region such that if the vector of scale parameters of another parallel system lies in that region, then the likelihood ratio ordering between the two systems hold. An extension of this result is also presented for the case when the lifetimes of components follow exponentiated Weibull distribution.

Conclusion

In this paper, based on the shape and scale vectors of parameters involved in the lifetime distribution of a parallel system consisting of two independent heterogeneous generalized exponential components, a region is obtained such that if the scale vector of parameters of another parallel system lies in this region, then the likelihood ratio order between systems holds.

Keywords: Parallel Systems, Likelihood Ratio Order, Generalized Exponential Distribution, Exponentiated Weibull Distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

ترتیب نسبت درستنمایی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه نمایی تعمیم‌یافته

عابدین حیدری^۱، مصطفی ستاری^۲، قباد برمال‌زن^۱

^۱ گروه آمار، دانشگاه زابل

^۲ گروه ریاضی، دانشگاه زابل

نویسنده مسئول: مصطفی ستاری، sattari@uoz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۰ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۱۳ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۱۱/۲۶

چکیده: دو سیستم موازی را در نظر بگیرید بطوریکه هر کدام از دو مولفه با طول عمرهای مستقل نمایی تعمیم‌یافته تشکیل شده‌اند. در این مقاله، بر اساس پارامترهای شکل و مقیاس موجود در توزیع طول عمر یکی از سیستم‌ها، ناحیه‌ای معرفی می‌شود بطوریکه اگر بردار پارامترهای مقیاس سیستم دیگری در این ناحیه قرار گیرد، آنگاه ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی میان طول عمر دو سیستم برقرار است. همچنین تعمیمی از این نتیجه به حالتی که طول عمرهای مولفه‌ها از توزیع وایبول نمایی شده پیروی می‌کنند نیز ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم‌های موازی، ترتیب نسبت درستنمایی، توزیع نمایی تعمیم‌یافته، توزیع وایبول نمایی شده.

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15 ، 90B25.

۱ مقدمه

توزیع نمایی، با توجه به خاصیت غیرسالخوردگی منحصر بفرد در میان توزیع‌های طول عمر و شکل ریاضیاتی بسته تابع توزیع احتمال آن، در مباحث قابلیت اعتماد، تحلیل بقا، آزمون‌های طول عمر و بسیاری دیگر از علوم از اهمیت نظری بسزایی برخوردار است (بالاکریشن، ۲۰۱۹). در عمل، تابع نرخ خطر بسیاری از مجموعه داده‌های طول عمر مانند طول عمر قطعات الکتریکی، مکانیکی و طول عمر انسان‌ها، به صورت یکنوا، وانی شکل و یا وانی شکل وارون



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

است. از آنجا که توزیع نمایی دارای تابع نرخ خطر ثابتی است، توزیع مناسبی برای برازش به این دسته از داده‌ها نیست. در چنین مواقعی دو رویکرد می‌توان اتخاذ نمود. رویکرد اول، استفاده از توزیع‌های طول عمر منعطف‌تر و شناخته شده مانند گاما، وایبل و لگ نرمال است. رویکرد دوم، تعمیم توزیع نمایی برای منعطف‌تر کردن تابع نرخ خطر آن است. روش مورد استفاده در رویکرد دوم، وارد کردن یک پارامتر جدید در توزیع نمایی است که باعث تغییر شکل تابع نرخ خطر آن می‌شود. با استفاده از این روش، تعمیم‌های زیادی از توزیع نمایی معرفی شده‌اند. برای نمونه، مارشال و اولکین (۱۹۹۷)، گوپتا و کوندو (۱۹۹۹)، ناداراجا و حقیقی (۲۰۱۱) و مارشال و اولکین (۲۰۰۷) را ببینید.

یکی از تعمیم‌های توزیع نمایی توسط گوپتا و کوندو (۱۹۹۹) و با استفاده از روش نمایی‌سازی معرفی شده است. متغیر تصادفی T از توزیع نمایی تعمیم‌یافته^۱ با پارامتر شکل $\beta \in \mathbb{R}_+$ و پارامتر مقیاس $\eta \in \mathbb{R}_+$ که در آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است پیروی می‌کند، $T \sim GE(\beta, \eta)$ ، هرگاه دارای تابع توزیع احتمال $F_T(x) = (1 - e^{-\eta x})^\beta, x \geq 0$ باشد. ملاحظه می‌شود که با قرار دادن $\beta = 1$ ، توزیع نمایی به دست می‌آید. همچنین به ازای $\beta > 1$ ، توزیع نمایی تعمیم‌یافته دارای تابع نرخ خطر صعودی است در حالی که این تابع به ازای $\beta < 1$ نزولی خواهد بود. در حالتی که پارامتر β مقداری صحیح اختیار کند، توزیع نمایی تعمیم‌یافته را می‌توان توزیع طول عمر یک سیستم موازی متشکل از β مولفه با طول عمرهای مستقل نمایی در نظر گرفت. دقت شود که در ادبیات مربوط به توزیع‌های طول عمر، توزیع نمایی تعمیم‌یافته به عنوان توزیع نمایی نمایی^۲ نیز شهرت دارد. برای آگاهی از توزیع نمایی تعمیم‌یافته و خواص آن به گوپتا و کوندو (۲۰۰۷) و ناداراجا (۲۰۱۱) مراجعه شود. در مباحث قابلیت اعتماد، مساله انتخاب سیستم‌های بهینه با طول عمر بالا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این راستا نظریه ترتیب‌های تصادفی یک ابزار مناسب برای تصمیم‌گیری بین سیستم‌های متفاوت است. در علوم بیم‌سنجی، نظریه ترتیب‌های تصادفی کاربرد مفیدی در تخصیص بهترین و بدترین سرمایه‌های ممکن به بیمه‌نامه‌ها (فتحی‌منش و خالدی، ۲۰۱۵) و مقایسه مجموع، بزرگترین و کوچکترین مقادیر خسارات ارائه شده به شرکت‌های بیمه (برمال‌زن، ۱۳۹۷، ۱۳۹۸) دارد. در اقتصاد نیز از ترتیب‌های تصادفی به عنوان معیاری برای مقایسه توزیع ثروت دو جامعه مشخص استفاده شده است (آرنولد، ۱۹۸۷). برای اطلاعات بیشتر در زمینه ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها به مولر و استویان (۲۰۰۲)، دنوی و همکاران (۲۰۰۵) و بلزونس و همکاران (۲۰۱۶) مراجعه شود.

در این مقاله، سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل نمایی تعمیم‌یافته مورد توجه قرار گرفته و یک شرط کافی برای برقراری ترتیب نسبت درستنمایی^۳ میان آنها معرفی شده است. همچنین توسیعی از این نتیجه، برای حالتی که طول عمر مولفه‌ها از توزیع وایبل نمایی^۴ پیروی می‌کنند، ارائه شده است. نتایج به دست آمده در این مقاله در راستای تعمیم و غنی‌سازی یافته‌های موجود در یان و همکاران (۲۰۱۳)،

¹Generalized exponential distribution

²Exponentiated exponential distribution

³Likelihood ratio order

⁴Exponentiated Weibull distribution

وانگ و لانیادو (۲۰۱۵)، کوندو و همکاران (۲۰۱۶) و حیدری و همکاران (۲۰۲۰) مفید هستند.

در بخش ۲، تعاریف مربوط به ترتیب‌های تصادفی و بیشاندن موزون^۱ به صورت خلاصه مرور شده است. نتایج مربوط به مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل نمایی به عنوان پیشینه ایده مورد بحث، در بخش ۳ ارائه شده است. در بخش ۴، ترتیب نسبت درستنمایی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل و ناهمگن نمایی تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام، بحث و نتیجه‌گیری در بخش پایانی ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱. (شیکد و شانتی‌کومار، ۲۰۰۷) فرض کنید T_1 و T_2 متغیرهای تصادفی نامنفی به ترتیب با تابع‌های توزیع احتمال F_{T_1} و F_{T_2} ، تابع‌های بقای \bar{F}_{T_1} و \bar{F}_{T_2} ، تابع‌های چگالی احتمال f_{T_1} و f_{T_2} ، تابع‌های نرخ خطر $r_{T_1} = f_{T_1}/\bar{F}_{T_1}$ و $r_{T_2} = f_{T_2}/\bar{F}_{T_2}$ و تابع‌های نرخ خطر وارون $\tilde{r}_{T_1} = f_{T_1}/F_{T_1}$ و $\tilde{r}_{T_2} = f_{T_2}/F_{T_2}$ باشند. در این صورت:

الف- T_1 در ترتیب تصادفی معمولی^۲ بزرگتر از T_2 است ($T_1 \geq_{st} T_2$) هرگاه $\bar{F}_{T_1}(t) \geq \bar{F}_{T_2}(t)$ ، به ازای $t \geq 0$.

ب- T_1 در ترتیب نرخ خطر^۳ بزرگتر از T_2 است ($T_1 \geq_{hr} T_2$) هرگاه $r_{T_1}(t) \geq r_{T_2}(t)$ ، به ازای $t \geq 0$.

ج- T_1 در ترتیب نرخ خطر وارون^۴ بزرگتر از T_2 است ($T_1 \geq_{rh} T_2$) هرگاه $\tilde{r}_{T_1}(t) \geq \tilde{r}_{T_2}(t)$ ، به ازای $t \geq 0$. یا به طور معادل نسبت $F_{T_1}(t)/F_{T_2}(t)$ در $t \in [0, \infty)$ صعودی باشد.

د- T_1 در ترتیب نسبت درستنمایی بزرگتر از T_2 است ($T_1 \geq_{lr} T_2$) هرگاه نسبت $f_{T_1}(t)/f_{T_2}(t)$ تابعی صعودی در $t \geq 0$ باشد.

می‌توان نشان داد که ترتیب نسبت درستنمایی ترتیب‌های نرخ خطر و نرخ خطر وارون را نتیجه می‌دهد و هر دو این ترتیب‌ها به نوبه خود بر ترتیب تصادفی معمولی دلالت می‌کنند (شیکد و شانتی‌کومار، ۲۰۰۷). در تعریف بعدی، مفاهیم بیشاندن موزون و بیشاندن موزون ضعیف^۵ بیان شده است (چنگ، ۱۹۷۷؛ مارشال و همکاران، ۲۰۱۱).

تعریف ۲. بردارهای $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ و $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ را در \mathcal{E}_+^n در نظر بگیرید که در آن

$$\mathcal{E}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\}.$$

¹Weighted majorization

²Usual stochastic order

³Hazard rate order

⁴Reversed hazard rate order

⁵Weak weighted majorization

۱۱۴ ترتیب نسبت درستیابی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه نمایی تعمیم‌یافته

فرض کنید $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ نشان‌دهنده بردار وزن‌ها باشد. در این صورت:

الف- روی \mathcal{E}_+^n ، بردار \mathbf{u} در مفهوم \mathbf{p} -بیشاندن بزرگتر از بردار \mathbf{v} است ($\mathbf{u} \succ_p^m \mathbf{v}$ روی \mathcal{E}_+^n) هرگاه

$$\sum_{k=1}^i p_k u_k \leq \sum_{k=1}^i p_k v_k, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^n p_k u_k = \sum_{k=1}^n p_k v_k.$$

ب- روی \mathcal{E}_+^n ، بردار \mathbf{u} در مفهوم \mathbf{p} -بیشاندن ضعیف بزرگتر از بردار \mathbf{v} است ($\mathbf{u} \succ_p^w \mathbf{v}$ روی \mathcal{E}_+^n) هرگاه به ازای $i = 1, \dots, n$ رابطه $\sum_{k=1}^i p_k u_k \leq \sum_{k=1}^i p_k v_k$ برقرار باشد.

توجه شود که ترتیب بیشاندن موزون، ترتیب بیشاندن موزون ضعیف را نتیجه می‌دهد. همچنین با قرار دادن $p_i = 1$ برای هر $i = 1, \dots, n$ ، ترتیب‌های بیشاندن معمولی و بیشاندن ضعیف حاصل شده که به ترتیب با نمادهای $\mathbf{u} \succ^w \mathbf{v}$ و $\mathbf{u} \succ^m \mathbf{v}$ نشان داده می‌شوند.

۳ مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل

در این بخش، یافته‌های به‌دست آمده در ارتباط با مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل نمایی و نمایی تعمیم‌یافته، به عنوان پیشینه مرتبط با ایده مورد بحث در این مقاله، ارائه شده‌اند. ابتدا چند زیرناحیه از فضای \mathcal{E}_+^2 که در ادامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی شده‌اند. برای نقطه مفروض (η_1, η_2) در \mathbb{R}_+^2 با شرط $0 < \eta_1 \leq \eta_2$ ، قرار دهید

$$\Omega^{\eta_1, \eta_2} = \{(x, y) \in \mathcal{E}_+^2 : (\eta_1, \eta_2) \succ^w (x, y)\}.$$

در واقع Ω^{η_1, η_2} ناحیه محدود به خطوط $x = \eta_1$ و $y = \eta_1 + \eta_2 - x$ ، $y = x$ به γ بخش

$$\begin{aligned} \Theta_1^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \leq \eta_2 \text{ و } (\eta_1, \eta_2) \succ^m(x, y)\}, \\ \Theta_2^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \leq \eta_2 \text{ و } (\eta_1, \eta_2) \succ^w(x, y)\}, \\ \Theta_3^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq \eta_2 \leq y \text{ و } (\eta_1, y) \succ^w(\eta_2, x)\}, \\ \Theta_4^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq \eta_2 \leq y \text{ و } \eta_2 + x < \eta_1 + y\}, \\ \Theta_\delta^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \text{ و } \eta_2 \leq y \leq \eta_2 + \frac{1}{\gamma}(x - \eta_1)\}, \\ \Theta_\gamma^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_2 \leq x \leq y \text{ و } y > \eta_2 + \frac{1}{\gamma}(x - \eta_1)\}, \\ \Theta_{\bar{\gamma}}^{\eta_1, \eta_2} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \bar{\eta} \leq x \leq \eta_2 \text{ و } y > x + \eta_2 - \eta_1\}, \end{aligned}$$

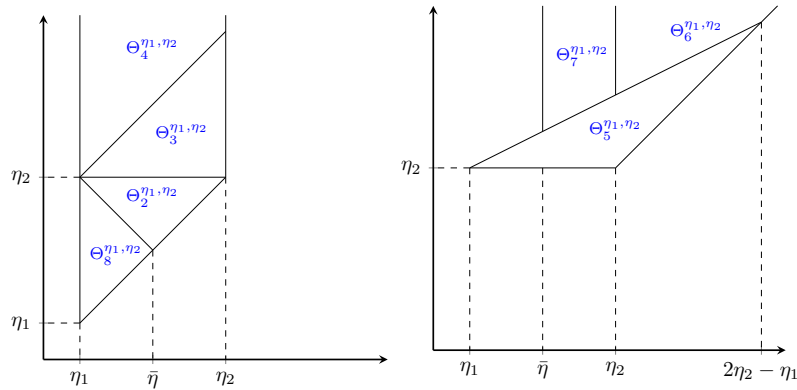
تقسیم شده است که در آن $\bar{\eta} = (\eta_1 + \eta_2)/2$ است. همچنین قرار دهید

$$\Theta_\lambda^{\eta_1, \eta_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \leq \eta_2 \text{ و } x + y < \eta_1 + \eta_2\}.$$

ناحیه $\Theta_1^{\eta_1, \eta_2}$ مجموعه نقاط روی خط واصل بین نقاط (η_1, η_2) و $(\bar{\eta}, \bar{\eta})$ است. ناحیه محصور بین خطوط $y = \eta_2 - \eta_1 + x$ ، $y = \eta_2$ و $y = \eta_1 + \eta_2 - x$ ، $y = x$ و $x = \eta_2$ است. ناحیه بالایی محدود به خطوط $x = \eta_1$ و $x = \eta_2$ است. ناحیه بالایی $\Theta_\delta^{\eta_1, \eta_2}$ ناحیه محصور بین خطوط $y = \eta_2 + (x - \eta_1)/2$ و $y = x$ است. ناحیه بالایی $\Theta_\gamma^{\eta_1, \eta_2}$ محدود به خطوط $y = x$ و $y = \eta_2 + (x - \eta_1)/2$ است. ناحیه بالایی محدود به خطوط $x = \eta_1$ و $x = \eta_2$ است. در نهایت، ناحیه محصور بین خطوط $x = \eta_1$ و $x = \eta_2$ ، $y = \eta_2 + (x - \eta_1)/2$ و $y = \eta_1 + \eta_2 - x$ است. دقت شود که از یک سو زیرناحیه‌های $\Theta_\delta^{\eta_1, \eta_2}$ و $\Theta_\gamma^{\eta_1, \eta_2}$ و از سوی دیگر زیرناحیه‌های $\Theta_\gamma^{\eta_1, \eta_2}$ و $\Theta_{\bar{\gamma}}^{\eta_1, \eta_2}$ هم‌پوشانی دارند. در شکل ۱ زیرناحیه‌های معرفی شده فوق رسم شده‌اند.

دو سیستم موازی را در نظر بگیرید بطوریکه طول عمر مولفه‌های آنها به ترتیب متغیرهای مستقل X_1, X_2 و Y_1, Y_2 با مفروضات $X_i \sim GE(\beta_i, \eta_i)$ و $Y_i \sim GE(\beta_i, \delta_i)$ ، $i = 1, 2$ باشند. طول عمر سیستم‌های مورد نظر عبارتند از $X_{1:2} = \max\{X_1, X_2\}$ و $Y_{1:2} = \max\{Y_1, Y_2\}$. در ابتدا یافته‌های موجود در حالت نمایی ($\beta_1 = \beta_2 = 1$) بیان شده است. پلدر و پروشان (۱۹۷۱) برای نخستین بار از مفهوم بیشاندن در مقایسه تصادفی میان سیستم‌های موازی استفاده کرده و رابطه

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_1^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{1:2} \geq_{st} Y_{1:2} \quad (1)$$



شکل ۱. نمودار زیرناحیه‌های $\Theta_i^{\eta_1, \eta_2}$, $i = 1, \dots, 8$

را اثبات کردند. تعمیم ترتیب تصادفی معمولی موجود در رابطه (۱) به ترتیب‌های نرخ خطر (نرخ خطر وارون) و نسبت درستنمایی توسط بولند و همکاران (۱۹۹۴) و دایکسترا و همکاران (۱۹۹۷) صورت گرفته است. در این راستا جو و می (۲۰۱۰) نتیجه

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_4^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{hr} Y_{r:2} \quad (2)$$

را نشان دادند. همچنین برای حالت $(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_7^{\eta_1, \eta_2} \cup \Theta_8^{\eta_1, \eta_2}$ یا $(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_8^{\eta_1, \eta_2}$ ، آنها با ارائه مثال‌هایی نتیجه گرفتند که ترتیب نرخ خطر و در نتیجه ترتیب درستنمایی برقرار نیستند. دا و همکاران (۲۰۱۰) این مساله را به صورت عمیق‌تر واکاوی کرده و نتیجه

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_7^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{hr} Y_{r:2} \quad (3)$$

را ثابت کردند. از سوی دیگر، آنها با ارائه مثالی نشان دادند که ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های موازی برای حالت $(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_8^{\eta_1, \eta_2}$ برقرار نیست. نابرابری تصادفی موجود در رابطه (۲) توسط ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) از ترتیب نرخ خطر به ترتیب نسبت درستنمایی تعمیم داده شده است. همچنین، تقویت حاصل در رابطه (۳) به ترتیب نسبت درستنمایی توسط یان و همکاران (۲۰۱۳) ارائه شده است. میشرا و میشرا (۲۰۱۳) توجه خود را به ترتیب نرخ خطر وارون میان سیستم‌های موازی معطوف کرده و یافته بولند و همکاران (۱۹۹۴) را به صورت

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Omega^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{rh} Y_{r:2}$$

توسیع دادند. وانگ و لانیادو (۲۰۱۵) از منظر متفاوتی ترتیب نسبت درستنمایی میان $X_{r:2}$ و $Y_{r:2}$ را بررسی کرده و نتیجه

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Gamma^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{lr} Y_{r:2}, \quad (4)$$

را به دست آوردند که در آن $\Gamma^{\eta_1, \eta_2} = \Theta_{\eta_1, \eta_2}^{\eta_1, \eta_2} \cup \Theta_{\eta_2, \eta_1}^{\eta_1, \eta_2} \cup \Theta_{\delta}^{\eta_1, \eta_2} \cup \Theta_{\xi}^{\eta_1, \eta_2} \cup \Theta_{\gamma}^{\eta_1, \eta_2}$ است. به این ترتیب، رابطه (۴) نتایج به دست آمده در دایکسترا و همکاران (۱۹۹۷)، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) و یان و همکاران (۲۰۱۳) را دربر داشته و همچنین قسمت‌هایی از یافته‌های دا و همکاران (۲۰۱۰) و میشرا و میشرا (۲۰۱۳) را از ترتیب نرخ خطر به ترتیب نسبت درستنمایی تعمیم داده است. از سوی دیگر، وانگ و لانیادو (۲۰۱۵) با استفاده از شبیه‌سازی به این نتیجه رسیدند که برای بخش‌هایی از ناحیه $\Omega^{\eta_1, \eta_2} - \Gamma^{\eta_1, \eta_2}$ ، ترتیب نسبت درستنمایی ممکن است برقرار باشد. در ادامه یافته‌های موجود در حالت نمایی تعمیم یافته ارائه شده است. کوندو و همکاران (۲۰۱۶) رابطه

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Theta_{\gamma}^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{lr} Y_{r:2}, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \quad (5)$$

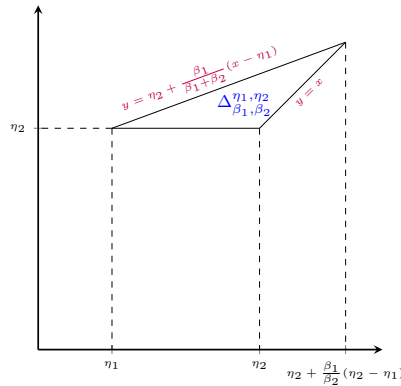
را اثبات کردند. ترتیب نسبت درستنمایی در رابطه (۵)، نتایج ارائه شده در روابط (۱) و (۲) به همراه قسمتی از رابطه (۴) را از حالت نمایی به حالت نمایی تعمیم یافته توسعه داده است. قرار دهید

$$\Xi_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \leq \eta_2 \text{ و روی } \mathcal{E}_+^w \text{ روی } (\eta_1, \eta_2) \succ_{(\beta_1, \beta_2)}^w (x, y)\}.$$

ناحیه $\Xi_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ یک مثلث با رئوس (η_1, η_2) ، $(\bar{\eta}_w, \bar{\eta}_w)$ و (η_2, η_2) است، که در آن $\bar{\eta}_w = (\beta_1 + \beta_2)^{-1}(\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2)$. حیدری و همکاران (۲۰۲۰) نشان دادند:

$$(\delta_1, \delta_2) \in \Xi_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow X_{r:2} \geq_{lr} Y_{r:2}. \quad (6)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نابرابری تصادفی موجود در رابطه (۵) دارای محدودیت روی پارامترهای β_2 و β_1 است در حالیکه محدودیت فوق در رابطه (۶) وجود ندارد. همچنین، از آنجا که با شرط $\beta_1 \geq \beta_2$ رابطه $\Theta_{\gamma}^{\eta_1, \eta_2} \subset \Xi_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ برقرار است، نتیجه می‌شود که رابطه (۶) تعمیمی از رابطه (۵) است.



شکل ۲. نمودار ناحیه $\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$

۴ ترتیب نسبت درستنمایی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل و ناهمگن نمایی تعمیم‌یافته

برای نقطه مفروض (η_1, η_2) در \mathbb{R}_+^2 با شرط $0 < \eta_1 \leq \eta_2$ و $(\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ، قرار دهید

$$\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : \eta_1 \leq x \leq y \text{ و } \eta_2 \leq y \leq \eta_2 + \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1}(x - \eta_1)\}.$$

به سادگی ملاحظه می‌شود که $\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ ناحیه محدود بین خطوط $y = x$ ، $y = \eta_2 + \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1}(x - \eta_1)$ و $y = \eta_2$ است. نمودار این ناحیه در شکل ۲ رسم شده است. هر نقطه از ناحیه $\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ را می‌توان با حرکت از نقطه اولیه (η_1, η_2) در جهت مناسب به دست آورد. به صورت دقیق‌تر، فرض کنید $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ باشد. با شروع از نقطه (η_1, η_2) و حرکت در جهت بردار $v_1 = (1, 0)$ (حرکت در جهت افقی)، نقطه (η'_1, η_2) ($\eta_1 \leq \eta'_1 \leq \eta_2$) به دست می‌آید. سپس با ادامه حرکت از نقطه (η'_1, η_2) در جهت بردار $v_2 = (1, \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1})$ (حرکت بر روی خطی موازی با خط $y = \eta_2 + \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1}(x - \eta_1)$) نقطه (δ_1, δ_2) حاصل می‌شود. برای مثال فرض کنید $(\eta_1, \eta_2) = (1, 5)$ ، $(\beta_1, \beta_2) = (2, 4)$ و $(\delta_1, \delta_2) = (6, 6.5)$. به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $(6, 6.5) \in \Delta_{2, 4}^{1, 5}$ است. با شروع از نقطه $(1, 5)$ و حرکت در جهت افقی به اندازه نیم واحد، نقطه $(\eta'_1, \eta_2) = (1.5, 5)$ به دست می‌آید. همچنین چون نقاط $(6, 6.5)$ و $(1.5, 5)$ روی خطی به معادله $y = 3^{-1}(x + 13.5)$ موازی با خط $y = 3^{-1}(x + 14)$ قرار دارند، پس می‌توان از نقطه $(1.5, 5)$ به نقطه $(6, 6.5)$ رسید.

قضیه ۱. فرض کنید Y_1, Y_2 و X_1, X_2 دو دسته از متغیرهای تصادفی مستقل باشند، به طوری که برای $i = 1, 2$ ، $Y_i \sim G(\beta_i, \delta_i)$ و $X_i \sim GE(\beta_i, \eta_i)$ باشند و $\beta_1 \leq \beta_2$. در این صورت $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2} \Rightarrow$

$$.X_{\tau; \tau} \geq_{lr} Y_{\tau; \tau}$$

برهان: فرض کنید $F_{X_{\tau; \tau}}$ و $\tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}$ و $F_{Y_{\tau; \tau}}$ و $\tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}$ به ترتیب نشان‌دهنده توابع توزیع احتمال و نرخ خطر وارون مربوط به متغیر تصادفی $X_{\tau; \tau}$ و $Y_{\tau; \tau}$ باشند. تابع‌های چگالی متغیرهای $X_{\tau; \tau}$ و $Y_{\tau; \tau}$ به ازای $x \in \mathbb{R}_+$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} f_{X_{\tau; \tau}}(x) &= \left(\frac{\beta_1 \eta_1 e^{-\eta_1 x}}{1 - e^{-\eta_1 x}} + \frac{\beta_2 \eta_2 e^{-\eta_2 x}}{1 - e^{-\eta_2 x}} \right) (1 - e^{-\eta_1 x})^{\beta_1} (1 - e^{-\eta_2 x})^{\beta_2} \\ &= \tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}(x) F_{X_{\tau; \tau}}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{Y_{\tau; \tau}}(x) &= \left(\frac{\beta_1 \delta_1 e^{-\delta_1 x}}{1 - e^{-\delta_1 x}} + \frac{\beta_2 \delta_2 e^{-\delta_2 x}}{1 - e^{-\delta_2 x}} \right) (1 - e^{-\delta_1 x})^{\beta_1} (1 - e^{-\delta_2 x})^{\beta_2} \\ &= \tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}(x) F_{Y_{\tau; \tau}}(x). \end{aligned}$$

بنابراین نسبت تابع چگالی $X_{\tau; \tau}$ به تابع چگالی $Y_{\tau; \tau}$ به صورت $L_1(x)L_2(x) = \frac{f_{X_{\tau; \tau}}(x)}{f_{Y_{\tau; \tau}}(x)}$ است که در آن $L_1(x) = \frac{\tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}(x)}{\tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}(x)}$ و $L_2(x) = \frac{F_{X_{\tau; \tau}}(x)}{F_{Y_{\tau; \tau}}(x)}$ است. برای حصول نتیجه مطلوب، کافی است توابع نامنفی L_1 و L_2 روی \mathbb{R}_+ صعودی باشند. بنابراین

$$\tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}(x) = \frac{1}{x} \psi(\eta_1 x, \eta_2 x), \quad \tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}(x) = \frac{1}{x} \psi(\delta_1 x, \delta_2 x), \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

که در آن $\psi(t_1, t_2) = \frac{\beta_1 t_1 e^{-t_1}}{1 - e^{-t_1}} + \frac{\beta_2 t_2 e^{-t_2}}{1 - e^{-t_2}}$ و $0 < t_1 \leq t_2$ است. مشتق‌های تابع ψ در جهت بردارهای $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ و $\mathbf{v}_2 = (1, \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1})$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{v}_1} \psi &= \partial_1 \psi(t_1, t_2) = \frac{\beta_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_1} - t_1)}{(1 - e^{-t_1})^2}, \\ \nabla_{\mathbf{v}_2} \psi &= \frac{\beta_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_1} - t_1)}{(1 - e^{-t_1})^2} + \beta_1 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} \frac{\beta_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_2} - t_2)}{(1 - e^{-t_2})^2}. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه برای هر $t \in \mathbb{R}_+$ تابع $1 - e^{-t} - t$ نامنفی است می‌توان نتیجه گرفت که $\nabla_{\mathbf{v}_1} \psi \leq 0$ و $\nabla_{\mathbf{v}_2} \psi \leq 0$ هستند. بنابراین تابع ψ در جهت بردارهای \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 نزولی است. اکنون با توجه به خاصیت ناحیه $\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x \in \mathbb{R}_+$ $\tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}(x) \geq \tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}(x)$ است یا به عبارت دیگر تابع L_2 روی \mathbb{R}_+ صعودی است. از سوی دیگر، تابع L_1 روی \mathbb{R}_+ صعودی است اگر و فقط اگر رابطه $\frac{\tilde{r}'_{X_{\tau; \tau}}(x)}{\tilde{r}_{X_{\tau; \tau}}(x)} \geq \frac{\tilde{r}'_{Y_{\tau; \tau}}(x)}{\tilde{r}_{Y_{\tau; \tau}}(x)}$ برقرار باشد.

۱۲۰ ترتیب نسبت درستنامایی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه نمایی تعمیم‌یافته

برقرار باشد. مشتق توابع $\tilde{r}_{X_{\tau_1, \tau_2}}(x)$ و $\tilde{r}_{Y_{\tau_1, \tau_2}}(x)$ نسبت به $x \in \mathbb{R}_+$ به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}\tilde{r}'_{X_{\tau_1, \tau_2}}(x) &= -\left(\frac{\beta_1 \eta_1^\tau e^{-\eta_1 x}}{(1 - e^{-\eta_1 x})^\tau} + \frac{\beta_2 \eta_2^\tau e^{-\eta_2 x}}{(1 - e^{-\eta_2 x})^\tau}\right), \\ \tilde{r}'_{Y_{\tau_1, \tau_2}}(x) &= -\left(\frac{\beta_1 \delta_1^\tau e^{-\delta_1 x}}{(1 - e^{-\delta_1 x})^\tau} + \frac{\beta_2 \delta_2^\tau e^{-\delta_2 x}}{(1 - e^{-\delta_2 x})^\tau}\right),\end{aligned}$$

هستند. بنابراین $\frac{\tilde{r}'_{X_{\tau_1, \tau_2}}(x)}{\tilde{r}_{X_{\tau_1, \tau_2}}(x)} = -\frac{1}{x} \varphi(\eta_1 x, \eta_2 x)$ است که در آن به ازای $0 < t_1 \leq t_2$

$$\varphi(t_1, t_2) = \frac{\beta_1 t_1^\tau e^{-t_1} (1 - e^{-t_2})^\tau + \beta_2 t_2^\tau e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})^\tau}{\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_1}) (1 - e^{-t_2})^\tau + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_2}) (1 - e^{-t_1})^\tau}.$$

به همین ترتیب $\frac{\tilde{r}'_{Y_{\tau_1, \tau_2}}(x)}{\tilde{r}_{Y_{\tau_1, \tau_2}}(x)} = -\frac{1}{x} \varphi(\delta_1 x, \delta_2 x)$ است. در نتیجه تابع L_1 روی \mathbb{R}_+ صعودی است اگر و فقط اگر رابطه

$$\varphi(\delta_1 x, \delta_2 x) \geq \varphi(\eta_1 x, \eta_2 x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (7)$$

برقرار باشد. با توجه به خاصیت ناحیه $\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1, \eta_2}$ ، نابرابری موجود در رابطه (7) برقرار خواهد بود هرگاه تابع φ در جهت بردارهای $v_1 = (1, 0)$ و $v_2 = (1, \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1})$ صعودی باشد. فرض کنید D مخرج تابع φ باشد. مشتق تابع $\varphi(t_1, t_2)$ نسبت به t_1 به صورت

$$\begin{aligned}D^\tau \partial_1 \varphi(t_1, t_2) &= \beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2})^\tau d_1(t_1) \\ &\quad \times \{\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}) + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})\} \\ &\quad + \beta_1 \beta_2 t_2 e^{-(t_1 + t_2)} (1 - e^{-t_1}) (1 - e^{-t_2})^\tau d_2(t_1) \\ &\quad \times \{t_2 (1 - e^{-t_1}) - t_1 (1 - e^{-t_2})\},\end{aligned}$$

است که در آن $d_2(t) = t + e^{-t} - 1$ و $d_1(t) = 1 - e^{-t} - t e^{-t}$ هستند. به صورت مشابه

$$\begin{aligned}D^\tau \partial_2 \varphi(t_1, t_2) &= \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})^\tau d_1(t_2) \\ &\quad \times \{\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}) + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})\} \\ &\quad + \beta_1 \beta_2 t_1 e^{-(t_1 + t_2)} (1 - e^{-t_2}) (1 - e^{-t_1})^\tau d_2(t_2) \\ &\quad \times \{t_1 (1 - e^{-t_2}) - t_2 (1 - e^{-t_1})\}.\end{aligned}$$

اکنون مشتق تابع φ در جهت v_1 به صورت $I_1 + I_2$ است که در آن

$$I_1 = \beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2})^r d_1(t_1) \times \{\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}) + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})\},$$

$$I_2 = \beta_1 \beta_2 t_2 e^{-(t_1+t_2)} (1 - e^{-t_1}) (1 - e^{-t_2})^r d_2(t_2) \times \{t_2 (1 - e^{-t_1}) - t_1 (1 - e^{-t_2})\}.$$

چون تابع $d_1(t)$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+$ نامنفی است، بنابراین $I_1 \geq 0$ است. از سوی دیگر، چون تابع $x/(1-e^{-x})$ در \mathbb{R}_+ صعودی است پس به ازای هر $t_1 \leq t_2 < \infty$ می‌توان گفت:

$$\frac{t_1}{1 - e^{-t_1}} \leq \frac{t_2}{1 - e^{-t_2}} \quad \text{یا} \quad t_2(1 - e^{-t_1}) - t_1(1 - e^{-t_2}) \geq 0. \quad (8)$$

از رابطه (8) بلافاصله نتیجه می‌شود که $I_2 \geq 0$ است. بنابراین $\nabla_{v_1} \varphi \geq 0$ است یا به طور معادل تابع φ در جهت v_1 صعودی است. از سوی دیگر، مشتق تابع φ در جهت بردار v_2 عبارت است از:

$$\begin{aligned} \nabla_{v_2} \varphi &= (\partial_1 \varphi(t_1, t_2), \partial_2 \varphi(t_1, t_2)) \cdot (1, \beta_1(\beta_1 + \beta_2)^{-1}) \\ &\stackrel{sgn}{=} \beta_1 (\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}) + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})) \\ &\quad \times \{t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2})^r d_1(t_1) + \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})^r d_1(t_2)\} \\ &\quad + \beta_1 \beta_2 (1 - e^{-t_1}) (1 - e^{-t_2}) e^{-(t_1+t_2)} (t_2 (1 - e^{-t_1}) - t_1 (1 - e^{-t_2})) \\ &\quad \times \{t_2 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1}) - \beta_1 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} t_1 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1})\} \\ &= J_1 + J_2, \end{aligned}$$

که در آن

$$J_1 = \beta_1 (\beta_1 t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2}) + \beta_2 t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1}))$$

$$\times \{t_1 e^{-t_1} (1 - e^{-t_2})^r d_1(t_1) + \beta_2 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} t_2 e^{-t_2} (1 - e^{-t_1})^r d_1(t_2)\},$$

$$J_2 = \beta_1 \beta_2 (1 - e^{-t_1}) (1 - e^{-t_2}) e^{-(t_1+t_2)} (t_2 (1 - e^{-t_1}) - t_1 (1 - e^{-t_2}))$$

$$\times \{t_2 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1}) - \beta_1 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} t_1 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1})\}.$$

چون تابع $d_1(t)$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+$ نامنفی است، می‌توان گفت که $J_1 \geq 0$ است. در ادامه، نشان داده می‌شود که $J_2 \geq 0$ است. در حضور رابطه (8)، می‌توان مشاهده نمود که $J_2 \geq 0$ است هرگاه رابطه

$$t_2 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1}) - \beta_1 (\beta_1 + \beta_2)^{-1} t_1 d_2(t_2) (1 - e^{-t_1}) \geq 0 \quad (9)$$

۱۲۲ ترتیب نسبت درستیابی میان سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه نمایی تعمیم‌یافته

به ازای $0 < t_1 \leq t_2$ برقرار باشد. وانگ و لانیادو (۲۰۱۵) نشان داده‌اند که رابطه (۹) به ازای $\beta_1(\beta_1 + \beta_2^{-1}) \leq 2^{-1}$ برقرار است. اما رابطه اخیر با توجه به شرط $\beta_1 \leq \beta_2$ برقرار بوده و در نتیجه $J_2 \geq 0$ است. پس تابع φ در جهت v_2 نیز صعودی است و نتیجه لازم حاصل می‌شود.

نتیجه حاصل از قضیه ۱ قسمتی از یافته‌های یان و همکاران (۲۰۱۳) و وانگ و لانیادو (۲۰۱۵) را از حالت نمایی به حالت نمایی تعمیم‌یافته توسعه می‌دهد و از سوی دیگر باعث غنی‌تر شدن نتایج به دست آمده در کوندو و همکاران (۲۰۱۶) و حیدری و همکاران (۲۰۲۰) می‌شود.

مثال ۱. فرض کنید $X_1 \sim GE(1, 2)$ و $X_2 \sim GE(5, 3)$ متغیرهای تصادفی مستقل و Y_1 و Y_2 دسته دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل باشند. به سادگی می‌توان مشاهده نمود:

$$\Delta_{1,5}^{2,3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 2 \leq x \leq y \text{ و } 3 \leq y \leq 6^{-1}(x + 16)\}.$$

بنا بر قضیه ۱ نابرابری تصادفی $X_{2:2} \geq_{lr} Y_{2:2}$ به ازای هر $(\delta_1, \delta_2) \in \Delta_{1,5}^{2,3}$ نتیجه می‌شود.

در ادامه، تعمیم قضیه ۱ برای حالتی که توزیع‌های طول عمر مولفه‌ها و ایبول نمایی شده هستند، ارائه شده است. متغیر تصادفی T دارای توزیع و ایبول نمایی شده با پارامترهای شکل $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ و پارامتر مقیاس $\eta \in \mathbb{R}_+$ است، $T \sim EW(\alpha, \beta, \eta)$ ، هرگاه تابع توزیع احتمال آن به صورت

$$F_T(x) = (1 - e^{-(\eta x)^\alpha})^\beta, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

باشد. توزیع و ایبول نمایی شده شامل توزیع‌های نمایی، رایلی، و ایبول، نمایی تعمیم‌یافته و رایلی نمایی شده است. این توزیع توسط مودهولکار (۱۹۹۳) معرفی شده است. به ازای مقادیر مختلف پارامترهای (α, β) ، تابع نرخ خطر توزیع و ایبول نمایی شده صعودی، نزولی، وان شکل و یا وان شکل وارون است. جزئیات بیشتر در مورد توزیع فوق را می‌توان در الحسینی و احسن الله (۲۰۰۴) مشاهده نمود.

اگر متغیرهای تصادفی T_1 و T_2 به ترتیب دارای توزیع‌های $GE(\beta, \eta^\alpha)$ و $EW(\alpha, \beta, \eta)$ باشند، آنگاه به سادگی می‌توان مشاهده نمود که متغیرهای تصادفی T_2 و $T_1^{1/\alpha}$ هم‌توزیع هستند. اکنون با توجه به نکته فوق و قضیه ۱.C.۱ در شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، فرع زیر از قضیه ۱ حاصل می‌شود.

فرع ۱. فرض کنید Z_1, Z_2 و W_1, W_2 دو دسته از متغیرهای تصادفی مستقل باشند بطوریکه

$$Z_i \sim EW(\alpha, \beta_i, \eta_i), \quad W_i \sim EW(\alpha, \beta_i, \delta_i), \quad i = 1, 2.$$

در این صورت به ازای $\beta_1 \leq \beta_2$ داریم $Z_{2:2} \geq_{lr} W_{2:2}$ $\Rightarrow (\delta_1^{\alpha_1}, \delta_2^{\alpha_2}) \in \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha}$.

بحث و نتیجه‌گیری

مقایسه‌های تصادفی میان سیستم‌های مهندسی یک موضوع مهم در نظریه قابلیت اعتماد در جهت طراحی یا انتخاب سیستم‌های بهینه است. با این وجود، مطالعه نظری و ریاضیاتی این موضوع ممکن است حتی برای سیستم‌های با توزیع‌های آماری ساده، بسیار مشکل باشد. در این مقاله، به مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از دو مولفه با طول عمرهای مستقل که از توزیع‌های ناهمگن نمایی تعمیم‌یافته پیروی می‌کنند، پرداخته شده است. برای چنین سیستم‌هایی، یک ناحیه معرفی شده است بطوریکه که اگر بردار پارامترهای مقیاس سیستم دیگری در این ناحیه قرار گیرد آنگاه ترتیب تصادفی نسبت درست‌نمایی میان طول عمرهای دو سیستم برقرار خواهد بود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده سردبیر ارجمند و داوران گرامی که باعث اصلاحات سازنده و ارتقای مقاله شده است کمال قدردانی را دارند. این مقاله با حمایت مالی دانشگاه زابل با شماره گرنت $GR - UOZ - 3389$ انجام شده است.

مراجع

برمال‌زن، ق. (۱۳۹۷)، مقایسه تصادفی مجموع مقادیر خسارت‌ها در دو سبب بیمه ناهمگن، مجله علوم آماری، ۱۲، ۳۹۵-۴۱۲.

برمال‌زن، ق. (۱۳۹۸)، مقایسه تصادفی کوچکترین مقادیر خسارت در دو سبب بیمه ناهمگن با خسارت‌های وایبل، مجله علوم آماری، ۱۳، ۵۷-۷۵.

AL-Hussaini, E.K. and Ahsanullah, M. (2015), *Exponentiated Distributions*, Atlantis Press, Paris.

Arnold, B.C. (1987), Majorization and the Lorenz Order: A Brief Introduction, *Lecture Notes in Statistics*, 43. Springer-Verlag, Berlin.

Balakrishnan, K. (2019), *Exponential Distribution: Theory, Methods and Applications*, CRC Prees, Boca Raton, USA.

Belzunce, F., Martínez-Riquelme, C. and Mulero, J. (2016), *An Introduction to Stochastic Orders*, Academic Press, London.

- Boland, P.J., El-Newehi, E. and Proschan, F. (1994), Applications of the Hazard Rate Ordering in Reliability and Order Statistics, *Journal of Applied Probability*, **31**, 180-192.
- Cheng, K.W. (1977), *Majorization: Its Extensions and Preservation Theorems*, Tech. Rep. No. 121. Department of Statistics, Stanford University, Stanford, CA.
- Da, G., Ding, W. and Li, X. (2010), On Hazard Rate Ordering of Parallel Systems with Two Independent Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 2148-2154.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005), *Actuarial Theory for Dependence Risks: Measure, Orders and Models*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Dykstra, R., Kochar, S. and Rojo, J. (1997), Stochastic Comparisons of Parallel Systems of Heterogeneous Exponential Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **65**, 203-211.
- Fathi-Manesh, S. and Khaledi, B.E. (2015), Allocations of policy limits and ordering relations for aggregate remaining claims, *Insurance: Mathematics and Economics*, **65**, 9-14.
- Gupta, R.D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distribution, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.
- Gupta, R.D. and Kundu, D. (2007), Generalized Exponential Distribution: Existing Results and Some Recent Developments, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3537-3547.
- Haidari, A., Payandeh Najafabadi, A.T. and Balakrishnan, N. (2020), Application of Weighted and Unordered Majorization Orders in Comparisons of Parallel Systems with Exponentiated Generalized Gamma Components, *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, **34**, 150-166.
- Joo, S. and Mi, J. (2010), Some Properties of Hazard Rate Functions of Systems with Two Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 444-453.

- Kundu, A., Chowdhury, S., Nanda, A. and Hazra, N.K. (2016), Some Results on Majorization and Their Applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **301**, 161-177.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions*, Springer, New York.
- Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Second edition. Springer-Verlag, New York.
- Misra, N. and Misra, A.K. (2013), On Comparison of Reversed Hazard Rates of Two Parallel Systems Comprising of Independent Gamma Components, *Statistics & Probability Letters*, **83**, 1567-1570.
- Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K. (1993), Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-Rate Data, *IEEE: Transactions on Reliability*, **42**, 299-302.
- Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, New York.
- Nadarajah, S. (2011), The Exponentiated Exponential Distribution: A Survey, *Advances in Statistical Analysis*, **95** , 219-251.
- Nadarajah, S. and Haghighi, F. (2011), An Extension of the Exponential Distribution, *Statistics*, **45**, 543-558.
- Pledger, G. and Proschan, F. (1971), Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, *In Optimizing Methods in Statistics*, 89-113. Academic Press.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Wang, J. and Laniado, H. (2015), On Likelihood Ratio Ordering of Prallel System with Two Exponential Components, *Operations Research Letters*, **43**, 195-195.

Yan, R., Da, G. and Zhao, P. (2013), Further Results for Parallel Systems with Two Heterogeneous Exponential Components, *Statistics*, **47**, 1128-1140.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011), Some Characterization Results for Parallel Systems with Two Heterogeneous Exponential Components, *Statistics*, **45**, 593-604.