.
Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2023
Vol. 17, No. 1, pp 61-80
DOI: 10.52547/jss.17.1.4

Reliability Estimation of the Stress-Strength Model in Coherent Systems Based on Exponential Distribution

Rostami, A., Khanjari Sadegh, M., Khorashadizadeh, M.
Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Corresponding author: A. Rostami, Alirostami@birjand.ac.ir

Received: 16/1/2023 **Revised:** 3/6/2023 **Accepted and Published Online:** 6/6/2023.

Introduction

A system is exposed to one or more stresses and remains active if the strength of the system is greater than the stress or stresses. Each system component is sometimes subjected to a particular stress at the component level. If the system is exposed to stresses, the probability of the system remaining active has been considered as the reliability of the stress-strength model. In this article, the reliability of the stress-strength model is studied in a coherent system at the component level. Consider a coherent system including n components. The components have random strengths $Y_1, \ldots, Y_n$, and each component is subjected to random stresses $X_1, \ldots, X_n$, respectively. All stresses and strengths are independent. A state variable Z_i is defined for each component so that $Z_i = 1$, whenever $X_i < Y_i$ and $Z_i = 0$, whenever $X_i \geq Y_i$. The stress-strength model's reliability has been presented using minimal path sets. The reliabilities of the stress-strength model of n-component series, n-component parallel and radar systems have been obtained.

Material and Methods

In this article, it is assumed that each of the random stresses and each of the random strengths has an Exponential distribution with its unknown scale parameter. The stress-strength model's reliability is obtained based on the Exponential distribution. In each of the 2-component series, 2-component parallel and radar systems, the reliability of the stress-strength model is presented. The methods of maximum likelihood and uniformly minimum variance unbiased estimations have obtained the estimations of this reliability. Also, the Bayes estimation of this reliability has been obtained under the quadratic loss function.

Results and Discussion
In this article, simulation studies have been carried out. In the 2-component series, 2-component parallel and radar systems, different values are considered for the parameters of Exponential distributions. The value of stress-strength reliability has been obtained for each combination of the parameters. Also, for each combination of parameters, different sample sizes are considered. For each combination of parameters, samples were produced to the considered sizes. For stress-strength reliability, the estimation values were calculated. In the 2-component series and radar systems, the maximum likelihood estimation and the 2-component parallel system, the uniformly minimum variance unbiased estimation, have better results, respectively. It can also be seen that the estimation values of the stress-strength reliability in the series system are smaller than in the parallel system. In the real data sets, the values of the mentioned estimations are calculated for the reliability of the stress-strength model of 2-component series, 2-component parallel and radar systems. Like the results obtained in the simulations, the values of the stress-strength reliability in the series system are smaller than the radar system and, in the radar system, are smaller than the parallel system.

Conclusion
In case of the stress is at the component level, this study specifies the method of determining and estimating the reliability of the stress-strength model for all coherent systems. Further research can be done for other coherent systems based on the different distributions and other estimation methods.

Keywords: Reliability, Stress-Strength, Maximum Likelihood Estimation, Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimation, Bayes Estimation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N02, 62N05.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۲
جلد ۱۷، شماره ۱، ص ۶۱ – ۸۰
DOI: 10.52547/jss.17.1.4
مقاله پژوهشی

برآورد قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های منسجم بر اساس توزیع نمایی

علی رستمی، محمد خنجری صادق، محمد خراشادی‌زاده
گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول : علی رستمی، Alirostami@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۳/۱۳ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۲/۳/۱۶

چکیده: در این مقاله، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم در حالت تنش در سطح مولفه در نظر گرفته شده است. سیستم‌های منسجم سری، موازی و رادار مورد بررسی قرار می‌گیرند. برای سیستم‌های ۲-مولفه‌ای سری یا موازی و سیستم رادار، این قابلیت اعتماد بر اساس توزیع نمایی و به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، نااریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس و بیز، برآورد می‌شود. همچنین برای بررسی عملکرد برآوردگرها مطالعات شبیه‌سازی انجام شده‌اند و داده‌های واقعی تحلیل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اعتماد، تنش-مقاومت، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد نااریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس، برآورد بیزی .
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 62N02.

۱ مقدمه

در زمینه‌های قابلیت اعتماد، مدل‌های تنش-مقاومت مطالعه می‌شوند. یک مولفه یا سیستم در معرض یک یا چند تنش قرار می‌گیرد و در صورتی‌که مقاومت مولفه یا سیستم بیشتر از تنش یا تنش‌ها باشد، فعال باقی می‌ماند. اولین بار بیرنبام (۱۹۵۶) تنش را متغیری تصادفی مانند X و مقاومت را متغیری تصادفی مانند Y در نظر گرفت و پارامتر $R = P(X < Y)$ را بعنوان قابلیت اعتماد معرفی کرد. برخی از نویسندگان R را بر اساس انواع توزیع‌های احتمال و با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مختلف برآورد کرده‌اند. کاتس و همکاران (۲۰۰۳) مروری بر روند این مدل تا آن زمان ارایه کرده‌اند. برای نمونه سنجری فارسی‌پور و ریاحی (۱۳۹۲)، شادرخ و یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۸)،

ژوانوویچ (۲۰۲۱)، الامری و همکاران (۲۰۲۱)، همتی و همکاران (۲۰۲۲) و حسن و همکاران (۲۰۲۳) را ببینید. برای یک سیستم با بیش از یک مولفه، باتاچاریا و جانسون (۱۹۷۴) مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای را معرفی کردند. این سیستم n مولفه دارد که مولفه‌ها مقاومت‌های مستقل و همتوزیع دارند و یک تنش مشترک که مستقل از مقاومت‌ها است، به هر کدام از مولفه‌ها وارد می‌شود. این سیستم فعال است هرگاه حداقل k ($1 \leq k \leq n$) مولفه آن سالم باشند. آنها احتمال فعال بودن سیستم را به عنوان قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای تعریف کردند. به این مدل، مدل تنش-مقاومت k از n از نوع سالم گفته می‌شود. بسیاری از پژوهشگران مدل تنش-مقاومت فوق را مطالعه کرده‌اند که می‌توان به شاوکی و خان (۲۰۲۲)، جانا و برا (۲۰۲۲)، ژانگ و همکاران (۲۰۲۲)، یوسف و همکاران (۲۰۲۲)، لیو و همکاران (۲۰۲۲) و کهن‌سال و همکاران (۲۰۲۳) اشاره کرد. برخی محققان قابلیت اعتماد سیستم‌های منسجم را بررسی کرده‌اند. دیوانجی و رائو (۲۰۰۱) قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را برای یک سیستم منسجم در نظر گرفتند و دو حالت را مطالعه کردند. حالت اول تنش در سطح سیستم است، یعنی مولفه‌های سیستم تحت یک تنش مشترک قرار می‌گیرند و حالت دوم تنش در سطح مولفه است، یعنی هر مولفه تحت تنش خاصی قرار می‌گیرد. اریلماز (۲۰۱۰) در حالت تنش در سطح سیستم، یک عبارت برای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم، بصورت ترکیبی خطی از قابلیت اعتماد سیستم‌های سری بدست آورد. باتاچاریا و رویچاودهاری (۲۰۱۳) درحالت‌های تنش در سطح سیستم و تنش در سطح مولفه، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم را بصورت تابعی از قابلیت اعتماد تنش-مقاومت جداگانه مولفه‌های آن بیان کردند.

توزیع طول عمر نمایی توصیف خوبی از طول عمر یک واحد ارایه می‌دهد که با گذشت زمان پیر نمی‌شود، بعبارت دیگر ویژگی فقدان حافظه دارد. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که این ویژگی را دارد. همچنین توزیع نمایی تنها توزیعی است که تابع نرخ شکست آن ثابت است. از توزیع نمایی بطور مثال برای مدارهای الکترونیکی که شامل چند مولفه هستند استفاده می‌شود. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع و تابع نرخ شکست توزیع نمایی با پارامتر مقیاس α، $\mathrm{Exp}(\alpha)$، به ترتیب بصورت

$$f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad r_X(x) = \alpha, \quad x > 0, \quad \alpha > 0,$$

هستند. در این مقاله، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم در حالت تنش در سطح مولفه که در آن همه تنش‌ها و مقاومت‌ها مستقل هستند، بررسی می‌شود. در بخش ۲، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم را در حالت تنش در سطح مولفه مطالعه می‌کنیم. در بخش ۳، سیستم‌های ۲-مولفه‌ای سری، ۲-مولفه‌ای موازی و رادار را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی تنش‌ها و مقاومت‌ها توزیع نمایی با پارامترهای مقیاس مختلف داشته باشند. برآورد ماکسیمم درستنمایی[1] (MLE)، برآورد نااریب بطور یکنواخت با کمترین واریانس[2] (UMVUE) و برآورد بیزی، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت این سیستم‌ها به دست آورده می‌شود. در بخش ۴، برای

[1] Maximum Likelihood Estimation
[2] Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimation

بررسی عملکرد این مدل‌ها، مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی انجام می‌شوند.

۲ قابلیت اعتماد تنش-مقاومت یک سیستم منسجم

یک سیستم منسجم شامل n مولفه را در نظر بگیرید، که در آن مولفه‌ها، دارای مقاومت‌های $Y_۱, \dots, Y_n$ هستند. برای $j = ۱, \dots, n$، jامین مولفه در معرض تنش X_j، قرار دارد. فرض کنید همه تنش‌ها و مقاومت‌ها، متغیرهای تصادفی مستقل هستند. jامین مولفه خراب است هرگاه $X_j \geq Y_j$. متغیر وضعیت jامین مولفه بصورت

$$Z_j = \begin{cases} ۱, & X_j < Y_j \\ ۰, & X_j \geq Y_j \end{cases}$$

تعریف می‌شود. باتاچاریا و رویچاودهاری (۲۰۱۳)، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در یک سیستم منسجم با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_۱, \dots, P_r$ و با تنش‌ها و مقاومت‌های مستقل به صورت

$$h(\boldsymbol{p}) = \sum_{k=۱}^{r} \prod_{j \in P_k} p_j - \sum_{k<k'} \prod_{j \in P_k \cup P_{k'}} p_j + \dots,$$

در نظر گرفتند، که در آن

$$p_j = P(Z_j = ۱) = \int P(Z_j = ۱ | X_j = x_j)\, dF_j(x_j) = \int P(Y_j > x_j)\, dF_j(x_j), \qquad (۱)$$

و F_j تابع توزیع X_j است. جزییات سیستم‌های منسجم در بارلو و پروسچان (۱۹۷۱) ارائه شده است. برای یک سیستم سری با یک مجموعه مسیر مینیمال $P_۱ = \{۱, \dots, n\}$ داریم $h(\boldsymbol{p}) = \prod_{j=۱}^{n} p_j$ و در یک سیستم سری ۲-مولفه‌ای نتیجه می‌شود

$$R_S = h(\boldsymbol{p}) = p_۱ p_۲. \qquad (۲)$$

همچنین برای یک سیستم موازی با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_۱ = \{۱\}, \dots, P_n = \{n\}$، $h(\boldsymbol{p}) = ۱ - \prod_{j=۱}^{n}(۱ - p_j)$ است و در یک سیستم موازی ۲-مولفه‌ای نتیجه می‌شود

$$R_P = h(\boldsymbol{p}) = p_۱ + p_۲ - p_۱ p_۲. \qquad (۳)$$

برای سیستم رادار با مجموعه‌های مسیر مینیمال $P_۱ = \{۱,۲\}$ و $P_۲ = \{۱,۳\}$، داریم

$$R_r = h(\boldsymbol{p}) = p_۱ p_۲ + p_۱ p_۳ - \prod_{j=۱}^{۳} p_j. \qquad (۴)$$

۳ برآوردهای R_S، R_P و R_r

فرض کنید برای $j = ۱,\ldots,n$، متغیر تصادفی تنش X_j و متغیر تصادفی مقاومت Y_j مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های نمایی $\mathrm{Exp}(\alpha_j)$ و $\mathrm{Exp}(\beta_j)$ باشند. بنا بر (۱)، داریم

$$p_j = \int_{۰}^{\infty} P(Y_j > x_j) f(x_j)\, dx_j = \int_{۰}^{\infty} e^{-\beta_j x_j} \alpha_j e^{-\alpha_j x_j}\, dx_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}.$$

رابطه (۲) برای یک سیستم سری $h(\boldsymbol{p}) = \prod_{j=۱}^{n} \frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j}$ و قابلیت اعتماد سیستم سری ۲-مولفه‌ای به صورت

$$R_S = \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \beta_۱} \times \frac{\alpha_۲}{\alpha_۲ + \beta_۲}, \qquad (۵)$$

است. رابطه (۳) برای یک سیستم موازی $h(\boldsymbol{p}) = ۱ - \prod_{j=۱}^{n}(۱ - \frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j})$ و قابلیت اعتماد سیستم موازی ۲-مولفه‌ای به صورت

$$R_P = \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \beta_۱} + \frac{\alpha_۲}{\alpha_۲ + \beta_۲} - \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \beta_۱} \times \frac{\alpha_۲}{\alpha_۲ + \beta_۲}, \qquad (۶)$$

است. بنا بر رابطه (۴) قابلیت اعتماد سیستم رادار عبارت است از

$$R_r = \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \beta_۱} \frac{\alpha_۲}{\alpha_۲ + \beta_۲} + \frac{\alpha_۱}{\alpha_۱ + \beta_۱} \frac{\alpha_۳}{\alpha_۳ + \beta_۳} - \prod_{j=۱}^{۳} \frac{\alpha_j}{\alpha_j + \beta_j}. \qquad (۷)$$

برآوردهای R_S: فرض کنید برای $j = ۱,۲$، نمونه‌های تصادفی $\boldsymbol{x}_j = (x_{j,۱},\ldots,x_{j,n_j})$ و $\boldsymbol{y}_j = (y_{j,۱},\ldots,y_{j,m_j})$ مستقل و به ترتیب توزیع‌های $\mathrm{Exp}(\alpha_j)$ و $\mathrm{Exp}(\beta_j)$ داشته باشند. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α_j و β_j به ترتیب بصورت

$$\hat{\alpha}_j = \frac{۱}{\frac{۱}{n_j}\sum_{i=۱}^{n_j} x_{j,i}} = \frac{۱}{\bar{x}_j}, \quad \hat{\beta}_j = \frac{۱}{\frac{۱}{m_j}\sum_{i=۱}^{m_j} y_{j,i}} = \frac{۱}{\bar{y}_j}, \quad j = ۱,۲, \qquad (۸)$$

هستند. بنا بر پایایی MLE و از (۵)، MLE برای R_S برابر $\hat{R}_S^M = \prod_{j=1}^{2} \frac{\overline{y}_j}{\overline{x}_j+\overline{y}_j}$ است.

لم ۱. فرض کنید آماره $M = (M_1, M_2)$ برای خانواده توزیع‌های $\{p_{(\theta_1,\theta_2)}, (\theta_1, \theta_2) \in \Theta\}$ که در آن $\theta_1 \in \Theta_1$، $\theta_2 \in \Theta_2$ و $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$، بسنده کامل باشد و M_1 و M_2 مستقل و به ترتیب برای خانواده توزیع‌های $\{p_{\theta_1}, \theta_1 \in \Theta_1\}$ و $\{p_{\theta_2}, \theta_2 \in \Theta_2\}$ بسنده کامل باشند. در صورتی‌که برآوردگرهای $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ مستقل و به ترتیب UMVUE برای پارامترهای θ_1 و θ_2 باشند، آنگاه $\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2$، یک UMVUE برای $\theta_1\theta_2$ است.

برهان: فرض کنید آماره‌های g_1 و g_2 مستقل و به ترتیب برای θ_1 و θ_2 نااریب باشند، آنگاه g_1g_2 برای $\theta_1\theta_2$ نااریب است و نتیجه می‌شود

$$E(g_1g_2|M) = E(g_1|M)E(g_2|M) = E(g_1|M_1)E(g_2|M_2) = \hat{\theta}_1\hat{\theta}_2.$$

قضیه ۱. آماره بسنده کامل $T = (T_{1,1}, T_{1,2}, T_{2,1}, T_{2,2}) = (\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i}, \sum_{i=1}^{m_1} Y_{1,i}, \sum_{i=1}^{n_2} X_{2,i}, \sum_{i=1}^{m_2} Y_{2,i})$، برای خانواده توزیع‌های $\{p_{(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)}, (\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in \Theta\}$ که در آن $\alpha_1 \in (0,\infty)$، $\beta_1 \in (0,\infty)$، $\alpha_2 \in (0,\infty)$، $\beta_2 \in (0,\infty)$ و $\Theta = (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty) \times (0,\infty)$، و به ازای $j = 1, 2$، آماره بسنده کامل $(T_{j,1}, T_{j,2}) = (\sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}, \sum_{i=1}^{m_j} Y_{j,i})$ برای خانواده $\{p_{(\alpha_j,\beta_j)}, (\alpha_j, \beta_j) \in \Theta_j\}$ که در آن $\Theta_j = (0,\infty) \times (0,\infty)$ و $V_j = \frac{T_{j,1}}{T_{j,2}}$ را در نظر بگیرید. UMVUE برای p_j بصورت

$$\hat{p}_j^U = \begin{cases} Q(V_j, 1), & V_j \leq 1 \\ Q(V_j, \frac{1}{V_j}), & V_j > 1 \end{cases} \tag{۹}$$

است، که در آن

$$Q(V_j, a) = \int_0^a (1 - s_{j,1}V_j)^{m_j-1}(n_j - 1)(1 - s_{j,1})^{n_j-2}\, ds_{j,1}.$$

همچنین UMVUE برای R_S عبارت است از

$$\hat{R}_S^U = \prod_{j=1}^{2} \hat{p}_j^U. \tag{۱۰}$$

برهان: اریلماز (۲۰۱۰) در بخش ۴، در یک سیستم سری با i مولفه و بر اساس توزیع نمایی، UMVUE برای $P(X < Y_{1:i}) = \frac{\alpha}{\alpha+i\beta}$ را به دست آورده است، که در آن $Y_{1:i}$، اولین مقاومت مرتب‌شده است. به ازای $i = 1$، UMVUE برای $j = 1, 2$ ، $p_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j}$، بصورت رابطه (۹) بدست می‌آید. همچنین بنا بر لم ۱، در صورتی‌که

$M = T$ باشد، بدلیل استقلال $M_۱ = T_۱$ و $M_۲ = T_۲$، UMVUE برای R_S حاصل می‌شود.

لم ۲. نمونه‌های تصادفی مستقل $\boldsymbol{z}_۱ = (z_{۱,۱}, \ldots, z_{۱,k_۱})$ و $\boldsymbol{z}_۲ = (z_{۲,۱}, \ldots, z_{۲,k_۲})$ به ترتیب از توزیع‌های $f_{\theta_۱}(z)$ و $f_{\theta_۲}(z)$ و $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_۱, \boldsymbol{z}_۲)$ را در نظر بگیرید. اگر $\hat{\theta}_۱$ و $\hat{\theta}_۲$ مستقل و تحت تابع زیان درجه دوم، به ترتیب برآوردهای بیزی $\theta_۱$ و $\theta_۲$ باشند، آنگاه $\hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۲$ برآورد بیزی $\theta_۱\theta_۲$ است.

برهان: چون $\hat{\theta}_۱$ و $\hat{\theta}_۲$ مستقل هستند، نتیجه می‌شود

$$E(\theta_۱\theta_۲|z) = E(\theta_۱|z)E(\theta_۲|z) = E(\theta_۱|z_۱)E(\theta_۲|z_۲) = \hat{\theta}_۱\hat{\theta}_۲.$$

قضیه ۲. فرض کنید برای $j = ۱, ۲$، پارامترهای α_j و β_j متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع‌های پیشین گاما به ترتیب با پارامترهای (μ_j, γ_j) و (ν_j, λ_j) باشند. تحت تابع زیان درجه دوم، برآورد بیزی p_j به صورت

$$\hat{p}_j^B = \frac{n_j + \mu_j}{n_j + \mu_j + m_j + \nu_j} \times \begin{cases} M_۱ & |D_j| < ۱ \quad \text{اگر} \\ M_{-۱} & D_j \leq -۱ \quad \text{اگر} \end{cases} \tag{۱۱}$$

است، که در آن

$$M_۱ = G_j^{n_j+\mu_j} {}_۲F_۱(n_j + \mu_j + m_j + \nu_j, n_j + \mu_j + ۱, n_j + \mu_j + m_j + \nu_j + ۱; D_j),$$
$$M_{-۱} = G_j^{-(m_j+\nu_j)} {}_۲F_۱(n_j + \mu_j + m_j + \nu_j, m_j + \nu_j, n_j + \mu_j + m_j + \nu_j + ۱; \tfrac{D_j}{۱-D_j}),$$

$A_j = n_j\overline{x_j} + \gamma_j$، $B_j = m_j\overline{y_j} + \lambda_j$، $G_j = \frac{A_j}{B_j}$، $D_j = ۱ - G_j$ و ${}_۲F_۱$ تابع فوق‌هندسی (آبراموویتز و استگان، ۱۹۷۲) است. همچنین برآورد بیزی R_S عبارت است از

$$\hat{R}_S^B = \prod_{j=۱}^{۲} \hat{p}_j^B. \tag{۱۲}$$

برهان: کاتس و همکاران (۲۰۰۳) برآورد بیزی $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ را به دست آورده‌اند. در صورتی‌که $\mu^* = n_j + \mu_j$، $\gamma^* = A_j$، $\nu^* = m_j + \nu_j$، $\lambda^* = B_j$ و $B = D_j$ در نظر گرفته شوند، برآورد بیزی $p_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j}$، بصورت رابطه (۱۱) حاصل می‌شود. بنا بر لم ۲ و بدلیل استقلال نمونه‌های تصادفی $\boldsymbol{z}_۱ = (\boldsymbol{x}_۱, \boldsymbol{y}_۱)$ و $\boldsymbol{z}_۲ = (\boldsymbol{x}_۲, \boldsymbol{y}_۲)$ و استقلال $\hat{p}_۱^B$ و $\hat{p}_۲^B$، برآورد بیزی R_S بدست می‌آید.

برآوردهای R_P: بنابر رابطه (۸) و بر اساس ویژگی پایایی MLE، برآورد ماکسیمم درستنمایی R_P بصورت

$$\hat{R}_P^M = \sum_{j=۱}^{۲} \frac{\overline{y}_j}{\overline{x}_j + \overline{y}_j} - \prod_{j=۱}^{۲} \frac{\overline{y}_j}{\overline{x}_j + \overline{y}_j},$$

است. با استفاده از (۹) و (۱۰)، UMVUE برای R_P برابر $\hat{R}_P^U = \sum_{j=1}^{2}\hat{p}_j^U - \prod_{j=1}^{2}\hat{p}_j^U$ است. با استفاده از (۱۱) و (۱۲)، برآورد بیزی R_P برابر $\hat{R}_P^B = \sum_{j=1}^{2}\hat{p}_j^B - \prod_{j=1}^{2}\hat{p}_j^B$ است.

برآوردهای R_r: از (۸) و بر اساس ویژگی پایایی MLE، برآورد ماکسیمم درستنمایی R_r بصورت

$$\hat{R}_r^M = \frac{\overline{y}_1}{\overline{x}_1+\overline{y}_1}\frac{\overline{y}_2}{\overline{x}_2+\overline{y}_2} + \frac{\overline{y}_1}{\overline{x}_1+\overline{y}_1}\frac{\overline{y}_3}{\overline{x}_3+\overline{y}_3} - \prod_{j=1}^{3}\frac{\overline{y}_j}{\overline{x}_j+\overline{y}_j},$$

است. برای برآورد UMVUE برای R_r، به ازای $j = 1, 2, 3$، $\hat{p}_j^U$ مشابه (۹) است. بنابراین UMVUE برای R_r برابر $\hat{R}_r^U = \hat{p}_1^U\hat{p}_2^U + \hat{p}_1^U\hat{p}_3^U - \prod_{j=1}^{3}\hat{p}_j^U$ است. به ازای $j = 1, 2, 3$، توزیع‌های پیشین α_j و β_j را مشابه قضیه ۲ در نظر بگیرید. بنابراین $\hat{p}_j^B$ مشابه (۱۱) است و برآورد بیزی R_r عبارت است از

$$\hat{R}_r^B = \hat{p}_1^B\hat{p}_2^B + \hat{p}_1^B\hat{p}_3^B - \prod_{j=1}^{3}\hat{p}_j^B. \qquad (13)$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

مطالعات شبیه‌سازی برای R_S، R_P و R_r انجام می‌شوند. برای R_S و R_P، به ازای $j = 1, 2$، مقادیری متفاوت برای پارامترهای α_j و β_j و مقدار $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j)$ برابر $(1, 1/75, 1, 2/75)$ در نظر گرفته شده‌اند. برای R_r به ازای $j = 1, 2, 3$، مقادیری متفاوت برای پارامترهای α_j و β_j و مقدار $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j)$ برابر $(1, 2/75, 1, 3/75)$ در نظر گرفته شده‌اند. نمونه‌هایی به حجم‌های $n = n_1 = m_1 = n_2 = m_2 = 10, 20, 30, 40, 50$ با ۱۰۰۰۰ بار تکرار، از توزیع نمایی تولید شدند. از روابط (۵)، (۶) و (۷) مقادیر پارامترهای R_S، R_P و R_r محاسبه شدند و برای آنها مقادیر $\hat{R}_S^M$، $\hat{R}_S^U$، $\hat{R}_S^B$، $\hat{R}_P^M$، $\hat{R}_P^U$، $\hat{R}_P^B$، $\hat{R}_r^M$، $\hat{R}_r^U$ و $\hat{R}_r^B$ بدست آمدند. همچنین اریبی و میانگین مربع خطا [1] (MSE) برای برآوردها محاسبه شدند.

در جدول‌های ۱ و ۲، نتایج مربوط به R_S در سیستم سری آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n، روند قدرمطلق اریبی هر سه برآوردگر کاهشی است. در بیشتر موارد قدرمطلق اریبی UMVUE کمتر از قدر مطلق اریبی MLE و قدرمطلق اریبی MLE کمتر از قدر مطلق اریبی برآورد بیزی (به ازای $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j) = (1, 1/75, 1, 2/75)$) است. همچنین با افزایش n، MSE برای هر سه برآورد همواره کاهشی است. در نیمی از موارد MSE برای MLE کمتر از MSE برای برآورد بیزی است و در نیمی دیگر MSE برای برآورد بیزی کمتر از MSE برای MLE است. در بیشتر موارد MSE برای هر دو برآورد MLE و بیزی کمتر از MSE برای UMVUE است. بنابراین در سیستم سری، با توجه به اریبی‌ها و MSEها، برآورد MLE نتایج بهتری دارد.

در جدول‌های ۳ و ۴، نتایج مربوط به R_P در سیستم موازی آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n،

[1] Mean Squared Error

روند قدر مطلق اریبی هر سه برآوردگر کاهشی است. در بیشتر موارد قدر مطلق اریبی UMVUE کمتر از MLE و MLE کمتر از برآورد بیزی است. همچنین با افزایش n، MSE برای هر سه برآوردگر همواره کاهشی هستند. در موارد بیشتری MSE برای UMVUE کمتر از MSE برای دو برآورد دیگر است. بنابراین در سیستم موازی، با توجه به اریبی‌ها و MSEها، برآورد UMVUE نتایج بهتری دارد. همچنین انتظار داریم مقادیر قابلیت اعتماد در سیستم سری کوچکتر از مقادیر متناظر آنها در سیستم موازی باشد، که این مطلب در جدول‌ها مشاهده می‌شود.

در جدول‌های ۵ و ۶، نتایج مربوط به R_r در سیستم رادار آمده است. مشاهده می‌شود که با افزایش n، روند قدر مطلق اریبی هر سه برآوردگر کاهشی است. در بیشتر موارد قدر مطلق اریبی UMVUE کمتر از MLE و MLE کمتر از برآورد بیزی به ازای $(\mu_j, \gamma_j, \nu_j, \lambda_j) = (۳/۷۵, ۱, ۲/۷۵, ۱)$ است. همچنین با افزایش n، MSE برای هر سه برآوردگر همواره کاهشی هستند. در موارد بیشتری MSE برای MLE کمتر از MSE برای دو برآورد دیگر است. در بیشتر موارد MSE برای هر دو برآورد MLE و بیزی کمتر از MSE برای UMVUE است. بنابراین در سیستم رادار، با توجه به اریبی‌ها و MSEها، برآورد MLE نتایج بهتری دارد. همانگونه که در جدول‌های ۱ تا ۶ ملاحظه می‌شود، چون UMVUE برآوردگری نااریب است، قدر مطلق اریبی آن از دو برآوردگر دیگر کوچکتر است.

۵ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش مجموعه‌های داده برگرفته از رائو (۲۰۱۳)، میرجلیلی و همکاران (۲۰۱۶) و خان و خاتون (۲۰۱۹) تحلیل می‌شوند. مجموعه داده‌های اول طول عمر ترانزیستورها بر حسب هفته در یک آزمایش طول عمر تسریع‌یافته است و مجموعه داده‌های دوم زمان بین خرابی‌های متوالی تجهیزات تهویه مطبوع در هواپیمای بویینگ ۷۲۰ است. مجموعه داده‌های اول $(X_۱)$: {۳، ۴، ۵، ۶، ۶، ۷، ۸، ۸، ۹، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۱۱، ۱۱، ۱۱، ۱۳، ۱۳، ۱۳، ۱۳، ۱۳، ۱۷، ۱۷، ۱۹، ۱۹، ۲۵، ۲۹، ۳۳، ۴۲، ۴۲، ۵۲، ۵۲، ۵۲، ۵۲، ۵۲}. مجموعه داده‌های دوم $(Y_۱)$: {۱۲، ۲۱، ۲۶، ۲۷، ۲۹، ۲۹، ۴۸، ۵۷، ۵۹، ۷۰، ۷۴، ۱۵۳، ۳۲۶، ۳۸۶}. مجموعه داده‌های سوم و چهارم، مقاومت‌های شکست یک نوع فیبر به ترتیب با طول‌های ۲۰ و ۱۰ میلیمتر هستند. مجموعه داده‌های سوم $(X_۲)$: {۷۱/۴۶، ۴۱۹/۰۲، ۲۸۴/۶۴، ۵۸۵/۵۷، ۴۵۶/۶۰، ۱۱۳/۸۵، ۱۸۷/۸۵، ۶۸۸/۱۶، ۶۶۲/۶۶، ۴۵/۵۸، ۵۷۸/۶۲، ۷۵۶/۷۰، ۵۹۴/۲۹، ۱۶۶/۴۹، ۹۹/۷۲، ۷۰۷/۳۶، ۷۶۵/۱۴، ۱۸۷/۱۳، ۱۴۵/۹۶، ۳۵۰/۷۰، ۵۴۷/۴۴، ۱۱۶/۹۹، ۳۷۵/۸۱، ۵۸۱/۶۰، ۱۱۹/۸۶، ۴۸/۰۱، ۲۰۰/۱۶، ۳۶/۷۵، ۲۴۴/۵۳، ۸۳/۵۵}. مجموعه داده‌های چهارم $(Y_۲)$: {۶۹۳/۷۳، ۷۰۴/۶۶، ۳۲۳/۸۳، ۷۷۸/۱۷، ۱۲۳/۰۶، ۶۳۷/۶۶، ۳۸۳/۴۳، ۱۵۱/۴۸، ۱۰۸/۹۴، ۵۰/۱۶، ۶۷۱/۴۹، ۱۸۳/۱۶، ۲۵۷/۴۴، ۷۲۷/۲۳، ۲۹۱/۲۷، ۱۰۱/۱۵، ۳۷۶/۴۲، ۱۶۳/۴۰، ۱۴۱/۳۸، ۷۰۰/۷۴، ۲۶۲/۹۰، ۳۵۳/۲۴، ۴۲۲/۱۱، ۴۳/۹۳، ۵۹۰/۴۸، ۲۱۲/۱۳، ۳۰۳/۹۰، ۵۰۶/۶۰، ۵۳۰/۵۵، ۱۷۷/۲۵}. مجموعه داده‌های پنجم و ششم، زمان به ثمر رسیدن اولین گل در بازی‌های مرحله نهایی در دو سال متوالی (۲۰۱۲–۲۰۱۱ و ۲۰۱۳–۲۰۱۲) بصورت جداگانه برای بازی‌های برگشت و اولین بازی‌های لیگ قهرمانان هستند. مجموعه داده‌های پنجم $(X_۳)$: {۰/۰۳۳، ۰/۱۱۱،

جدول ۱. MLE برای R_S، اریبی و MSE

MSE($\hat{R}_S^M$)	Bias($\hat{R}_S^M$)	$\hat{R}_S^M$	R_S	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۰۷۷	−۰/۰۰۱۳	۰/۳۱۱۲	۰/۳۱۲۵	۱۰	
۰/۰۰۳۸	−۰/۰۰۱۵	۰/۳۱۱۰	۰/۳۱۲۵	۲۰	
۰/۰۰۲۶	−۰/۰۰۰۴	۰/۳۱۲۱	۰/۳۱۲۵	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵)
۰/۰۰۱۹	−۰/۰۰۰۵	۰/۳۱۲۰	۰/۳۱۲۵	۴۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۰۵	۰/۳۱۲۰	۰/۳۱۲۵	۵۰	
۰/۰۰۹۰	−۰/۰۰۸۶	۰/۴۲۸۹	۰/۴۳۷۵	۱۰	
۰/۰۰۴۴	−۰/۰۰۵۳	۰/۴۳۲۲	۰/۴۳۷۵	۲۰	
۰/۰۰۳۰	−۰/۰۰۳۰	۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۷۵	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵)
۰/۰۰۲۲	−۰/۰۰۲۲	۰/۴۳۵۳	۰/۴۳۷۵	۴۰	
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۲۰	۰/۴۳۵۵	۰/۴۳۷۵	۵۰	
۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۱۳	۰/۳۲۹۵	۰/۳۲۸۱	۱۰	
۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۰۲	۰/۳۲۸۰	۰/۳۲۸۱	۲۰	
۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۵	۰/۳۲۸۷	۰/۳۲۸۱	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵)
۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۱	۰/۳۲۸۲	۰/۳۲۸۱	۴۰	
۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۰۱	۰/۳۲۸۳	۰/۳۲۸۱	۵۰	
۰/۰۰۹۴	−۰/۰۱۰۶	۰/۵۳۶۲	۰/۵۴۶۹	۱۰	
۰/۰۰۴۶	−۰/۰۰۶۲	۰/۵۴۰۷	۰/۵۴۶۹	۲۰	
۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۳۵	۰/۵۴۳۴	۰/۵۴۶۹	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵)
۰/۰۰۲۳	−۰/۰۰۲۹	۰/۵۴۴۰	۰/۵۴۶۹	۴۰	
۰/۰۰۱۹	−۰/۰۰۲۳	۰/۵۴۴۵	۰/۵۴۶۹	۵۰	
۰/۰۰۷۰	−۰/۰۰۱۱	۰/۲۸۴۶	۰/۲۸۵۷	۱۰	
۰/۰۰۳۴	−۰/۰۰۱۴	۰/۲۸۴۳	۰/۲۸۵۷	۲۰	
۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۰۴	۰/۲۸۵۳	۰/۲۸۵۷	۳۰	(۲،۱،۳،۴)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۴	۰/۲۸۵۴	۰/۲۸۵۷	۴۰	
۰/۰۰۱۴	−۰/۰۰۰۵	۰/۲۸۵۳	۰/۲۸۵۷	۵۰	
۰/۰۰۸۴	−۰/۰۰۶۶	۰/۳۷۴۴	۰/۳۸۱۰	۱۰	
۰/۰۰۴۱	−۰/۰۰۴۲	۰/۳۷۶۷	۰/۳۸۱۰	۲۰	
۰/۰۰۲۸	−۰/۰۰۲۳	۰/۳۷۸۶	۰/۳۸۱۰	۳۰	(۲،۱،۴،۳)
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۱۷	۰/۳۷۹۳	۰/۳۸۱۰	۴۰	
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۱۶	۰/۳۷۹۳	۰/۳۸۱۰	۵۰	
۰/۰۰۸۰	−۰/۰۰۰۵	۰/۳۱۹۵	۰/۳۲۰۰	۱۰	
۰/۰۰۴۰	−۰/۰۰۱۱	۰/۳۱۸۹	۰/۳۲۰۰	۲۰	
۰/۰۰۲۷	−۰/۰۰۰۲	۰/۳۱۹۸	۰/۳۲۰۰	۳۰	(۴،۱،۲،۳)
۰/۰۰۲۰	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۰/۳۲۰۰	۴۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۰/۳۲۰۰	۵۰	
۰/۰۰۹۲	−۰/۰۰۹۸	۰/۴۷۰۲	۰/۴۸۰۰	۱۰	
۰/۰۰۴۵	−۰/۰۰۵۸	۰/۴۷۴۲	۰/۴۸۰۰	۲۰	
۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۳۳	۰/۴۷۶۷	۰/۴۸۰۰	۳۰	(۴،۱،۳،۲)
۰/۰۰۲۳	−۰/۰۰۲۶	۰/۴۷۷۴	۰/۴۸۰۰	۴۰	
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۲۲	۰/۴۷۷۸	۰/۴۸۰۰	۵۰	

جدول ۲. UMVUE و برآورد بیزی برای R_S، اریبی و MSE

$\mathrm{MSE}(\hat{R}_S^B)$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_S^B)$	$\hat{R}_S^B$	$\mathrm{MSE}(\hat{R}_S^U)$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_S^U)$	$\hat{R}_S^U$	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$
۰/۰۱۴۷	۰/۰۰۰۶	۰/۳۱۳۱	۰/۰۰۸۵	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۲۲	۱۰	
۰/۰۱۰۱	−۰/۰۰۴۶	۰/۳۰۸۰	۰/۰۰۴۰	−۰/۰۰۱۱	۰/۳۱۱۴	۲۰	
۰/۰۰۶۸	−۰/۰۰۱۵	۰/۳۱۱۰	۰/۰۰۲۷	−۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۲۴	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵)
۰/۰۰۵۰	−۰/۰۰۰۶	۰/۳۱۲۰	۰/۰۰۲۰	−۰/۰۰۰۲	۰/۳۱۲۳	۴۰	
۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۰۲	۰/۳۱۲۷	۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۲۲	۵۰	
۰/۰۰۶۱	−۰/۰۱۴۱	۰/۴۲۳۴	۰/۰۰۹۸	−۰/۰۰۰۴	۰/۴۳۷۱	۱۰	
۰/۰۰۳۴	−۰/۰۰۸۳	۰/۴۲۹۲	۰/۰۰۴۶	−۰/۰۰۱۱	۰/۴۳۶۴	۲۰	
۰/۰۰۲۵	−۰/۰۰۵۳	۰/۴۳۲۲	۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۰۲	۰/۴۳۷۳	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵)
۰/۰۰۲۰	−۰/۰۰۴۱	۰/۴۳۳۵	۰/۰۰۲۳	−۰/۰۰۰۱	۰/۴۳۷۴	۴۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۳۵	۰/۴۳۴۰	۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۴۳۷۲	۵۰	
۰/۰۳۰۳	−۰/۰۳۵۳	۰/۲۹۲۹	۰/۰۰۹۴	−۰/۰۰۰۴	۰/۳۲۷۷	۱۰	
۰/۰۲۶۲	−۰/۰۴۳۸	۰/۲۸۴۴	۰/۰۰۴۴	−۰/۰۰۱۱	۰/۳۲۷۰	۲۰	
۰/۰۲۱۸	−۰/۰۳۹۴	۰/۲۸۸۸	۰/۰۰۳۰	−۰/۰۰۰۱	۰/۳۲۸۰	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵)
۰/۰۱۹۸	−۰/۰۳۸۷	۰/۲۸۹۵	۰/۰۰۲۲	−۰/۰۰۰۴	۰/۳۲۷۷	۴۰	
۰/۰۱۷۲	−۰/۰۳۴۴	۰/۲۹۳۷	۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۲۷۹	۵۰	
۰/۰۰۷۳	−۰/۰۳۰۴	۰/۵۱۶۵	۰/۰۱۰۱	−۰/۰۰۰۵	۰/۵۴۶۴	۱۰	
۰/۰۰۳۹	−۰/۰۱۶۸	۰/۵۳۰۱	۰/۰۰۴۷	−۰/۰۰۱۱	۰/۵۴۵۸	۲۰	
۰/۰۰۲۸	−۰/۰۱۱۰	۰/۵۳۶۰	۰/۰۰۳۲	−۰/۰۰۰۱	۰/۵۴۶۸	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵)
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۸۵	۰/۵۳۸۴	۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۴۶۶	۴۰	
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۷۰	۰/۵۴۰۰	۰/۰۰۱۹	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۴۶۶	۵۰	
۰/۰۱۰۲	۰/۰۰۶۶	۰/۲۹۲۳	۰/۰۰۷۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۲۸۵۵	۱۰	
۰/۰۰۶۴	۰/۰۰۱۹	۰/۲۸۷۶	۰/۰۰۳۶	−۰/۰۰۱۰	۰/۲۸۴۷	۲۰	
۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۲۸	۰/۲۸۸۵	۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵۶	۳۰	(۲،۱،۳،۴)
۰/۰۰۳۰	۰/۰۰۳۰	۰/۲۸۸۷	۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۱	۰/۲۸۵۶	۴۰	
۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۲۷	۰/۲۸۸۴	۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۳	۰/۲۸۵۴	۵۰	
۰/۰۰۵۳	−۰/۰۰۹۸	۰/۳۷۱۱	۰/۰۰۹۳	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۸۰۷	۱۰	
۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۶۲	۰/۳۷۴۷	۰/۰۰۴۳	−۰/۰۰۱۰	۰/۳۷۹۹	۲۰	
۰/۰۰۲۳	−۰/۰۰۴۰	۰/۳۷۷۰	۰/۰۰۲۹	−۰/۰۰۰۲	۰/۳۸۰۸	۳۰	(۲،۱،۴،۳)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۳۰	۰/۳۷۸۰	۰/۰۰۲۲	−۰/۰۰۰۰	۰/۳۸۰۹	۴۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۲۷	۰/۳۷۸۲	۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۸۰۶	۵۰	
۰/۰۱۹۴	−۰/۰۱۹۰	۰/۳۰۱۰	۰/۰۰۸۹	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۱۰	
۰/۰۱۴۹	−۰/۰۲۰۷	۰/۲۹۹۳	۰/۰۰۴۱	−۰/۰۰۱۱	۰/۳۱۸۹۰	۲۰	
۰/۰۱۰۷	−۰/۰۱۴۲	۰/۳۰۵۸	۰/۰۰۲۸	−۰/۰۰۰۱	۰/۳۱۹۷	۳۰	(۴،۱،۲،۳)
۰/۰۰۸۶	−۰/۰۱۲۲	۰/۳۰۷۸	۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۴۰	
۰/۰۰۶۷	−۰/۰۰۹۱	۰/۳۱۰۹	۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۳	۰/۳۱۹۷	۵۰	
۰/۰۰۶۸	−۰/۰۳۱۲	۰/۴۴۸۸	۰/۰۱۰۰	−۰/۰۰۰۴	۰/۴۷۹۶	۱۰	
۰/۰۰۳۷	−۰/۰۱۷۹	۰/۴۶۲۱	۰/۰۰۴۷	−۰/۰۰۱۱	۰/۴۷۸۹	۲۰	
۰/۰۰۲۷	−۰/۰۱۱۹	۰/۴۶۸۱	۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۰۲	۰/۴۷۹۹	۳۰	(۴،۱،۳،۲)
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۹۲	۰/۴۷۰۸	۰/۰۰۲۳	−۰/۰۰۰۲	۰/۴۷۹۸	۴۰	
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۷۶	۰/۴۷۲۴	۰/۰۰۱۹	−۰/۰۰۰۳	۰/۴۷۹۷	۵۰	

جدول ۳. MLE برای R_P، اریبی و MSE

$\text{MSE}(\hat{R}_P^M)$	$\text{Bias}(\hat{R}_P^M)$	$\hat{R}_P^M$	R_P	n	$(\alpha_۱, \beta_۱, \alpha_۲, \beta_۲)$
۰/۰۰۳۴	−۰/۰۰۴۵	۰/۸۴۹۷	۰/۸۵۴۲	۱۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۲۵	۰/۸۵۱۶	۰/۸۵۴۲	۲۰	
۰/۰۰۱۱	−۰/۰۰۱۷	۰/۸۵۲۵	۰/۸۵۴۲	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵)
۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۰۹	۰/۸۵۳۲	۰/۸۵۴۲	۴۰	
۰/۰۰۰۶	−۰/۰۰۱۱	۰/۸۵۳۱	۰/۸۵۴۲	۵۰	
۰/۰۰۲۲	−۰/۰۰۵۰	۰/۸۹۰۹	۰/۸۹۵۸	۱۰	
۰/۰۰۱۰	−۰/۰۰۲۷	۰/۸۹۳۱	۰/۸۹۵۸	۲۰	
۰/۰۰۰۷	−۰/۰۰۱۸	۰/۸۹۴۱	۰/۸۹۵۸	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵)
۰/۰۰۰۵	−۰/۰۰۱۲	۰/۸۹۴۷	۰/۸۹۵۸	۴۰	
۰/۰۰۰۴	−۰/۰۰۱۲	۰/۸۹۴۷	۰/۸۹۵۸	۵۰	
۰/۰۰۱۳	−۰/۰۰۴۶	۰/۹۱۷۳	۰/۹۲۱۹	۱۰	
۰/۰۰۰۶	−۰/۰۰۲۴	۰/۹۱۹۵	۰/۹۲۱۹	۲۰	
۰/۰۰۰۴	−۰/۰۰۱۶	۰/۹۲۰۳	۰/۹۲۱۹	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵)
۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۱۰	۰/۹۲۰۹	۰/۹۲۱۹	۴۰	
۰/۰۰۰۲	−۰/۰۰۱۰	۰/۹۲۰۹	۰/۹۲۱۹	۵۰	
۰/۰۰۰۷	−۰/۰۰۴۰	۰/۹۴۹۱	۰/۹۵۳۱	۱۰	
۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۲۱	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۳۱	۲۰	
۰/۰۰۰۲	−۰/۰۰۱۴	۰/۹۵۱۸	۰/۹۵۳۱	۳۰	(۳/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵)
۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۹	۰/۹۵۲۲	۰/۹۵۳۱	۴۰	
۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۹	۰/۹۵۲۳	۰/۹۵۳۱	۵۰	
۰/۰۰۴۷	−۰/۰۰۳۱	۰/۸۰۶۵	۰/۸۰۹۵	۱۰	
۰/۰۰۲۲	−۰/۰۰۱۹	۰/۸۰۷۶	۰/۸۰۹۵	۲۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۱۲	۰/۸۰۸۳	۰/۸۰۹۵	۳۰	(۲،۱،۳،۴)
۰/۰۰۱۱	−۰/۰۰۰۶	۰/۸۰۸۹	۰/۸۰۹۵	۴۰	
۰/۰۰۰۹	−۰/۰۰۰۹	۰/۸۰۸۶	۰/۸۰۹۵	۵۰	
۰/۰۰۳۳	−۰/۰۰۴۴	۰/۸۵۲۸	۰/۸۵۷۱	۱۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۲۵	۰/۸۵۴۶	۰/۸۵۷۱	۲۰	
۰/۰۰۱۱	−۰/۰۰۱۶	۰/۸۵۵۶	۰/۸۵۷۱	۳۰	(۲،۱،۴،۳)
۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۱۰	۰/۸۵۶۱	۰/۸۵۷۱	۴۰	
۰/۰۰۰۷	−۰/۰۰۱۱	۰/۸۵۶۱	۰/۸۵۷۱	۵۰	
۰/۰۰۲۶	−۰/۰۰۴۹	۰/۸۷۵۱	۰/۸۸۰۰	۱۰	
۰/۰۰۱۲	−۰/۰۰۲۷	۰/۸۷۷۳	۰/۸۸۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۱۸	۰/۸۷۸۲	۰/۸۸۰۰	۳۰	(۴،۱،۲،۳)
۰/۰۰۰۶	−۰/۰۰۱۰	۰/۸۷۹۰	۰/۸۸۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۵	−۰/۰۰۱۲	۰/۸۷۸۸	۰/۸۸۰۰	۵۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۴۹	۰/۹۱۵۱	۰/۹۲۰۰	۱۰	
۰/۰۰۰۷	−۰/۰۰۲۶	۰/۹۱۷۴	۰/۹۲۰۰	۲۰	
۰/۰۰۰۵	−۰/۰۰۱۷	۰/۹۱۸۳	۰/۹۲۰۰	۳۰	(۴،۱،۳،۲)
۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۱۱	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۰۰	۴۰	
۰/۰۰۰۳	−۰/۰۰۱۱	۰/۹۱۸۹	۰/۹۲۰۰	۵۰	

جدول ۴. UMVUE و برآورد بیزی برای R_P، اریبی و MSE

$(\alpha_۱, \beta_۱, \alpha_۲, \beta_۲)$	n	$\hat{R}_P^U$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_P^U)$	$\mathrm{MSE}(\hat{R}_P^U)$	$\hat{R}_P^B$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_P^B)$	$\mathrm{MSE}(\hat{R}_P^B)$
	۱۰	۰/۸۵۴۱	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۳۵	۰/۸۴۷۱	-۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۳۹
	۲۰	۰/۸۵۳۸	-۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۶	۰/۸۴۸۸	-۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۲۳
(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵)	۳۰	۰/۸۵۴۰	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۱	۰/۸۵۰۹	-۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۱۶
	۴۰	۰/۸۵۴۳	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۸	۰/۸۵۲۲	-۰/۰۰۲۰	۰/۰۰۱۱
	۵۰	۰/۸۵۳۹	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۶	۰/۸۵۲۵	-۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۰۹
	۱۰	۰/۸۹۵۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۲۲	۰/۸۸۷۲	-۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۱۷
	۲۰	۰/۸۹۵۶	-۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۰	۰/۸۹۱۱	-۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۰۹
(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵)	۳۰	۰/۸۹۵۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۷	۰/۸۹۲۶	-۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۰۶
	۴۰	۰/۸۹۵۹	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۵	۰/۸۹۳۶	-۰/۰۰۲۳	۰/۰۰۰۵
	۵۰	۰/۸۹۵۷	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۴	۰/۸۹۳۸	-۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۰۴
	۱۰	۰/۹۲۱۸	-۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۱۳	۰/۸۹۵۸	-۰/۰۲۶۱	۰/۰۰۲۹
	۲۰	۰/۹۲۱۷	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۶	۰/۹۰۴۳	-۰/۰۱۷۶	۰/۰۰۱۵
(۳/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵)	۳۰	۰/۹۲۱۸	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۴	۰/۹۰۸۵	-۰/۰۱۳۴	۰/۰۰۱۱
	۴۰	۰/۹۲۲۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۳	۰/۹۱۰۸	-۰/۰۱۱۱	۰/۰۰۰۹
	۵۰	۰/۹۲۱۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۹۱۲۲	-۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۰۷
	۱۰	۰/۹۵۳۱	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۶	۰/۹۳۸۴	-۰/۰۱۴۸	۰/۰۰۰۸
	۲۰	۰/۹۵۳۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۳	۰/۹۴۵۴	-۰/۰۰۷۸	۰/۰۰۰۳
(۳/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵)	۳۰	۰/۹۵۳۱	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۹۴۷۹	-۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۰۲
	۴۰	۰/۹۵۳۲	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۹۴۹۳	-۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۰۲
	۵۰	۰/۹۵۳۰	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۹۴۹۹	-۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۰۱
	۱۰	۰/۸۰۹۴	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۵۰	۰/۸۰۸۶	-۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۴۸
	۲۰	۰/۸۰۹۱	-۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۲۳	۰/۸۰۸۳	-۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲۷
(۲،۱،۳،۴)	۳۰	۰/۸۰۹۳	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۶	۰/۸۰۹۲	-۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۹
	۴۰	۰/۸۰۹۷	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۲	۰/۸۱۰۰	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۴
	۵۰	۰/۸۰۹۲	-۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۰	۰/۸۰۹۷	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۱
	۱۰	۰/۸۵۷۰	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۳۵	۰/۸۵۰۳	-۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۲۲
	۲۰	۰/۸۵۶۸	-۰/۰۰۰۴	۰/۰۰۱۶	۰/۸۵۳۱	-۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۱۲
(۲،۱،۴،۳)	۳۰	۰/۸۵۷۰	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۱	۰/۸۵۴۴	-۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۰۹
	۴۰	۰/۸۵۷۲	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۸	۰/۸۵۵۲	-۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۰۷
	۵۰	۰/۸۵۶۹	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۷	۰/۸۵۵۳	-۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۶
	۱۰	۰/۸۷۹۹	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۲۶	۰/۸۵۳۹	-۰/۰۲۶۱	۰/۰۰۴۲
	۲۰	۰/۸۷۹۷	-۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۱۲	۰/۸۶۲۹	-۰/۰۱۷۱	۰/۰۰۲۳
(۴،۱،۲،۳)	۳۰	۰/۸۷۹۸	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۸	۰/۸۶۸۱	-۰/۰۱۱۹	۰/۰۰۱۶
	۴۰	۰/۸۸۰۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۶	۰/۸۷۱۰	-۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۱۲
	۵۰	۰/۸۷۹۸	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۵	۰/۸۷۲۶	-۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۰۹
	۱۰	۰/۹۱۹۹	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱۵	۰/۹۰۱۲	-۰/۰۱۸۸	۰/۰۰۱۵
	۲۰	۰/۹۱۹۸	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۷	۰/۹۰۹۶	-۰/۰۱۰۴	۰/۰۰۰۷
(۴،۱،۳،۲)	۳۰	۰/۹۱۹۹	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۵	۰/۹۱۲۹	-۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۰۵
	۴۰	۰/۹۲۰۱	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۹۱۴۷	-۰/۰۰۵۳	۰/۰۰۰۳
	۵۰	۰/۹۱۹۹	-۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۹۱۵۵	-۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۰۳

جدول ۵. MLE برای R_r، اریبی و MSE

$\mathrm{MSE}(\hat{R}_r^M)$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_r^M)$	$\hat{R}_r^M$	R_r	n	$(\alpha_۱, \beta_۱, \alpha_۲, \beta_۲, \alpha_۳, \beta_۳)$
۰/۰۰۷۷	−۰/۰۰۴۰	۰/۵۰۵۴	۰/۵۰۹۴	۱۰	
۰/۰۰۳۸	−۰/۰۰۲۷	۰/۵۰۶۶	۰/۵۰۹۴	۲۰	
۰/۰۰۲۶	−۰/۰۰۰۹	۰/۵۰۸۵	۰/۵۰۹۴	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵،۴/۵،۵/۵)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۱۱	۰/۵۰۸۳	۰/۵۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۱۲	۰/۵۰۸۲	۰/۵۰۹۴	۵۰	
۰/۰۰۷۶	−۰/۰۰۹۹	۰/۵۹۹۵	۰/۶۰۹۴	۱۰	
۰/۰۰۳۷	−۰/۰۰۵۸	۰/۶۰۳۶	۰/۶۰۹۴	۲۰	
۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۲۹	۰/۶۰۶۵	۰/۶۰۹۴	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵،۵/۵،۴/۵)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۲۴	۰/۶۰۷۰	۰/۶۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۲۳	۰/۶۰۷۱	۰/۶۰۹۴	۵۰	
۰/۰۰۷۳	−۰/۰۰۰۱	۰/۵۹۴۳	۰/۵۹۴۴	۱۰	
۰/۰۰۳۶	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۲۰	
۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۷	۰/۵۹۴۴	۳۰	(۵/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵،۳/۵،۴/۵)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۴۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۱	۰/۵۹۴۴	۵۰	
۰/۰۰۴۴	−۰/۰۰۹۲	۰/۷۵۷۱	۰/۷۶۶۳	۱۰	
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۴۹	۰/۷۶۱۴	۰/۷۶۶۳	۲۰	
۰/۰۰۱۴	−۰/۰۰۲۸	۰/۷۶۳۵	۰/۷۶۶۳	۳۰	(۵/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵،۴/۵،۳/۵)
۰/۰۰۱۰	−۰/۰۰۲۴	۰/۷۶۳۹	۰/۷۶۶۳	۴۰	
۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۲۱	۰/۷۶۴۲	۰/۷۶۶۳	۵۰	
۰/۰۰۸۱	−۰/۰۰۳۲	۰/۴۵۵۷	۰/۴۵۸۹	۱۰	
۰/۰۰۴۰	−۰/۰۰۲۵	۰/۴۵۶۴	۰/۴۵۸۹	۲۰	
۰/۰۰۲۷	−۰/۰۰۰۶	۰/۴۵۸۲	۰/۴۵۸۹	۳۰	(۲،۱،۳،۴،۵،۶)
۰/۰۰۲۰	−۰/۰۰۰۸	۰/۴۵۸۰	۰/۴۵۸۹	۴۰	
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۱۰	۰/۴۵۷۹	۰/۴۵۸۹	۵۰	
۰/۰۰۸۷	−۰/۰۰۷۷	۰/۵۲۹۱	۰/۵۳۶۸	۱۰	
۰/۰۰۴۳	−۰/۰۰۴۹	۰/۵۳۱۹	۰/۵۳۶۸	۲۰	
۰/۰۰۲۹	−۰/۰۰۲۱	۰/۵۳۴۷	۰/۵۳۶۸	۳۰	(۲،۱،۴،۳،۶،۵)
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۱۸	۰/۵۳۵۰	۰/۵۳۶۸	۴۰	
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۱۹	۰/۵۳۴۹	۰/۵۳۶۸	۵۰	
۰/۰۰۷۲	−۰/۰۰۲۸	۰/۵۶۸۷	۰/۵۷۱۴	۱۰	
۰/۰۰۳۵	−۰/۰۰۱۸	۰/۵۶۹۶	۰/۵۷۱۴	۲۰	
۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۰۶	۰/۵۷۰۹	۰/۵۷۱۴	۳۰	(۶،۱،۲،۳،۴،۵)
۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۹	۰/۵۷۰۵	۰/۵۷۱۴	۴۰	
۰/۰۰۱۴	−۰/۰۰۰۹	۰/۵۷۰۵	۰/۵۷۱۴	۵۰	
۰/۰۰۵۶	−۰/۰۱۰۴	۰/۶۹۴۴	۰/۷۰۴۸	۱۰	
۰/۰۰۲۶	−۰/۰۰۵۷	۰/۶۹۹۱	۰/۷۰۴۸	۲۰	
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۳۱	۰/۷۰۱۷	۰/۷۰۴۸	۳۰	(۶،۱،۳،۲،۵،۴)
۰/۰۰۱۳	−۰/۰۰۲۶	۰/۷۰۲۲	۰/۷۰۴۸	۴۰	
۰/۰۰۱۰	−۰/۰۰۲۳	۰/۷۰۲۴	۰/۷۰۴۸	۵۰	

جدول ۶. UMVUE و برآورد بیزی برای R_r، اریبی و MSE

$\mathrm{MSE}(\hat{R}_r^B)$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_r^B)$	$\hat{R}_r^B$	$\mathrm{MSE}(\hat{R}_r^U)$	$\mathrm{Bias}(\hat{R}_r^U)$	$\hat{R}_r^U$	n	$(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3)$
۰/۰۰۸۷	۰/۰۰۳۳	۰/۵۱۲۷	۰/۰۰۸۴	−۰/۰۰۰۴	۰/۵۰۹۰	۱۰	
۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۰۶	۰/۵۱۰۰	۰/۰۰۳۹	−۰/۰۰۰۹	۰/۵۰۸۵	۲۰	
۰/۰۰۳۹	۰/۰۰۲۲	۰/۵۱۱۶	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۳	۰/۵۰۹۷	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۲/۵،۳/۵،۴/۵،۵/۵)
۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۲۷	۰/۵۱۲۱	۰/۰۰۱۹	−۰/۰۰۰۲	۰/۵۰۹۲	۴۰	
۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱	۰/۵۱۱۵	۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۴	۰/۵۰۸۹	۵۰	
۰/۰۰۵۷	−۰/۰۱۷۵	۰/۵۹۱۹	۰/۰۰۸۰	−۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۸۹	۱۰	
۰/۰۰۳۱	−۰/۰۰۹۹	۰/۵۹۹۵	۰/۰۰۳۷	−۰/۰۰۱۰	۰/۶۰۸۴	۲۰	
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۵۷	۰/۶۰۳۷	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۹۷	۳۰	(۱/۵،۰/۵،۳/۵،۲/۵،۵/۵،۴/۵)
۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۴۶	۰/۶۰۴۸	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۰	۰/۶۰۹۴	۴۰	
۰/۰۰۱۴	−۰/۰۰۴۱	۰/۶۰۵۳	۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۴	۰/۶۰۹۰	۵۰	
۰/۰۱۶۶	−۰/۰۲۸۲	۰/۵۶۶۲	۰/۰۰۸۱	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۹۴۲	۱۰	
۰/۰۱۲۳	−۰/۰۲۶۵	۰/۵۶۷۹	۰/۰۰۳۸	−۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۳۹	۲۰	
۰/۰۱۰۴	−۰/۰۲۳۷	۰/۵۷۰۷	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۱	۰/۵۹۴۵	۳۰	(۵/۵،۰/۵،۱/۵،۲/۵،۳/۵،۴/۵)
۰/۰۰۷۸	−۰/۰۲۰۹	۰/۵۷۳۵	۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۴۰	۴۰	
۰/۰۰۷۱	−۰/۰۱۹۵	۰/۵۷۴۹	۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۵	۰/۵۹۴۰	۵۰	
۰/۰۰۴۶	−۰/۰۳۹۸	۰/۷۲۶۵	۰/۰۰۴۵	−۰/۰۰۰۳	۰/۷۶۶۰	۱۰	
۰/۰۰۲۱	−۰/۰۲۱۰	۰/۷۴۵۳	۰/۰۰۲۱	−۰/۰۰۰۵	۰/۷۶۵۸	۲۰	
۰/۰۰۱۴	−۰/۰۱۳۷	۰/۷۵۲۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۲	۰/۷۶۶۴	۳۰	(۵/۵،۰/۵،۲/۵،۱/۵،۴/۵،۳/۵)
۰/۰۰۱۰	−۰/۰۱۰۶	۰/۷۵۵۷	۰/۰۰۱۰	−۰/۰۰۰۲	۰/۷۶۶۱	۴۰	
۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۸۷	۰/۷۵۷۶	۰/۰۰۰۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۷۶۶۰	۵۰	
۰/۰۰۷۳	۰/۰۰۷۳	۰/۴۶۶۱	۰/۰۰۸۹	−۰/۰۰۰۳	۰/۴۵۸۶	۱۰	
۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۳۷	۰/۴۶۲۶	۰/۰۰۴۲	−۰/۰۰۱۰	۰/۴۵۷۸	۲۰	
۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۴۸	۰/۴۶۳۶	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۰۴	۰/۴۵۹۲	۳۰	(۲،۱،۳،۴،۵،۶)
۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۴۳	۰/۴۶۳۲	۰/۰۰۲۰	−۰/۰۰۰۱	۰/۴۵۸۸	۴۰	
۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۳۵	۰/۴۶۲۳	۰/۰۰۱۶	−۰/۰۰۰۴	۰/۴۵۸۵	۵۰	
۰/۰۰۶۰	−۰/۰۱۳۰	۰/۵۲۳۸	۰/۰۰۹۴	−۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۶۴	۱۰	
۰/۰۰۳۴	−۰/۰۰۷۸	۰/۵۲۹۰	۰/۰۰۴۴	−۰/۰۰۱۱	۰/۵۳۵۷	۲۰	
۰/۰۰۲۴	−۰/۰۰۴۳	۰/۵۳۲۵	۰/۰۰۲۹	۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۷۲	۳۰	(۲،۱،۴،۳،۶،۵)
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۳۵	۰/۵۳۳۳	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۰۱	۰/۵۳۶۹	۴۰	
۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۳۳	۰/۵۳۳۶	۰/۰۰۱۷	−۰/۰۰۰۴	۰/۵۳۶۴	۵۰	
۰/۰۱۱۲	−۰/۰۲۷۱	۰/۵۴۴۳	۰/۰۰۷۹	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۷۱۱	۱۰	
۰/۰۰۷۷	−۰/۰۱۸۹	۰/۵۵۲۶	۰/۰۰۳۷	−۰/۰۰۰۷	۰/۵۷۰۸	۲۰	
۰/۰۰۵۸	−۰/۰۱۲۹	۰/۵۵۸۵	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۰۲	۰/۵۷۱۶	۳۰	(۶،۱،۲،۳،۴،۵)
۰/۰۰۴۰	−۰/۰۰۹۵	۰/۵۶۱۹	۰/۰۰۱۸	−۰/۰۰۰۳	۰/۵۷۱۱	۴۰	
۰/۰۰۳۲	−۰/۰۰۷۳	۰/۵۶۴۲	۰/۰۰۱۵	−۰/۰۰۰۵	۰/۵۷۱۰	۵۰	
۰/۰۰۶۲	−۰/۰۵۰۴	۰/۶۵۴۳	۰/۰۰۵۸	−۰/۰۰۰۴	۰/۷۰۴۴	۱۰	
۰/۰۰۲۸	−۰/۰۲۸۰	۰/۶۷۶۸	۰/۰۰۲۷	−۰/۰۰۰۷	۰/۷۰۴۱	۲۰	
۰/۰۰۱۸	−۰/۰۱۸۵	۰/۶۸۶۳	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۰۲	۰/۷۰۵۰	۳۰	(۶،۱،۳،۲،۵،۴)
۰/۰۰۱۳	−۰/۰۱۴۴	۰/۶۹۰۴	۰/۰۰۱۳	−۰/۰۰۰۱	۰/۷۰۴۷	۴۰	
۰/۰۰۱۱	−۰/۰۱۱۹	۰/۶۹۲۹	۰/۰۰۱۰	−۰/۰۰۰۳	۰/۷۰۴۴	۵۰	

۰/۳۴۴، ۰/۲۲۲، ۰/۰۷۸، ۰/۶۲۲، ۰/۱۳۳، ۰/۶۳۳، ۰/۴۲۲، ۰/۰۱۱، ۰/۱۰۰، ۰/۲۷۸، ۰/۰۸۹، ۰/۱۸۹، ۰/۵۰۰، ۰/۸۲۲، ۰/۸۳۳، ۰/۴۸۹، ۰/۶۴۴، ۰/۴۵۶، ۰/۲۲۲، ۰/۱۶۷، ۰/۳۱۱، ۰/۳۰۰، ۰/۹۵۶}. مجموعه داده‌های ششم (Y_3): {۰/۲۶۷، ۰/۶۱۱، ۰/۳۴۴، ۰/۵۳۳، ۰/۰۳۳، ۰/۴۷۸، ۰/۲۰۰، ۰/۵۶۰، ۰/۵۵۶، ۰/۷۱۱، ۰/۰۷۸، ۰/۵۳۳، ۰/۹۲۲، ۰/۰۶۷، ۰/۳۸۹، ۰/۲۸۹، ۰/۲۳۳، ۰/۱۴۴، ۰/۱۰۰، ۰/۲۷۸، ۰/۵۰۰، ۰/۰۷۸، ۰/۲۸۹، ۰/۳۱۱، ۰/۱۲۲}.

برای هر مجموعه داده‌ها، برازش توزیع نمایی با استفاده از آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف [1] $(\mathrm{K-S})$ آزمون شد. در هر کدام از مجموعه داده‌ها، مقدار برآورد پارامتر توزیع نمایی، فاصله $\mathrm{K-S}$ بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع برازش داده شده (D) و p-مقدار در جدول ۷ ارایه شده‌اند. ملاحظه می‌شود که در هر کدام از مجموعه داده‌ها، با توجه به p-مقدارها، توزیع نمایی بطور معنی‌داری برازش داده می‌شود. برآوردهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم‌های سری، موازی و رادار با استفاده از روابط (۹)، (۱۰)، (۱۲) و (۱۳) محاسبه و در جدول ۸ ارائه شده‌اند. عدد ۰٫۶۲۱۹ عبارت است از برآورد ماکسیمم درستنمایی احتمال اینکه در صورت واردشدن تنش‌های X_1، X_2 و X_3، سیستم رادار به فعالیت خود ادامه دهد. بنابراین در سیستم رادار، چون ۰٫۶۲۱۹ > ۰٫۵، مقاومت سیستم رادار بیشتر از تنش‌های واردشده است. همین تحلیل را در خصوص سیستم‌های سری و موازی می‌توان انجام داد. همانگونه که ملاحظه می‌شود، در هر کدام از روش‌های برآورد، مقدار برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت در سیستم سری کوچکتر از مقدار متناظر در سیستم رادار و در سیستم رادار کوچکتر از سیستم موازی است.

جدول ۷. برآورد پارامترها

مجموعه داده	برآورد	D	p-مقدار
اول (X_1)	۰/۰۵۲۹	۰/۱۸۳۶	۰/۲۰۱۸
دوم (Y_1)	۰/۰۱۰۶	۰/۲۴۱۱	۰/۳۸۹۹
سوم (X_2)	۰/۰۰۲۹	۰/۱۳۲۸	۰/۶۱۸۳
چهارم (Y_2)	۰/۰۰۲۷	۰/۱۷۵۰	۰/۲۸۳۱
پنجم (X_3)	۲/۷۸۸۶	۰/۱۱۵۵	۰/۸۹۲۷
ششم (Y_3)	۳/۰۷۸۱	۰/۱۶۰۴	۰/۵۴۱۱

جدول ۸. برآورد قابلیت اعتماد

سیستم	MLE	UMVUE	بیزی
سری	۰/۴۳۱۰	۰/۴۳۵۴	۰/۴۳۳۴
رادار	۰/۶۲۱۹	۰/۶۱۶۹	۰/۶۲۴۴
موازی	۰/۹۱۹۳	۰/۹۲۳۱	۰/۹۱۷۰

[1] Kolmogorov-Smirnov Test

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در یک سیستم منسجم n مولفه‌ای که هر مولفه در معرض یک تنش هست، برای هر مولفه یک متغیر وضعیت تعریف و قابلیت اعتماد سیستم‌های سری، موازی و رادار مطالعه شده است. با فرض اینکه توزیع تنش‌ها و مقاومت‌ها نمایی است، در حالت سیستم سری ۲-مولفه‌ای، سیستم موازی ۲-مولفه‌ای و سیستم رادار، برآوردهای MLE، UMVUE و بیزی مطالعه شدند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که قدرمطلق اریبی برآوردها روند کاهشی دارد و MSE آنها همواره کاهشی است. همچنین با استفاده از معیارهای قدرمطلق اریبی و MSE، مشاهده شد در سیستم سری ۲-مولفه‌ای و سیستم رادار، برآورد MLE و در سیستم موازی ۲-مولفه‌ای برآورد UMVUE نتایج بهتری دارند. در حالت تنش در سطح مولفه، معرفی قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت سیستم منسجم و برآورد آن در سیستم های مطرح‌شده، نحوه تعیین و برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت را برای کلیه سیستم‌های منسجم مشخص می‌کند. در این مدل تنش-مقاومت، تحقیقات بیشتر را می‌توان برای سایر سیستم‌های منسجم و با سایر توزیع‌های احتمال برای تنش‌ها و مقاومت‌ها و روش‌های برآوردیابی دیگر، مطالعه کرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث ارتقا کیفی و ارائه بهتر مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

سنجری فارسی‌پور، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲)، استنباط درستنمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در خانواده‌های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب، مجله علوم آماری، ۷، ۲، ۲۳۲-۲۰۷.

شادرخ، ع. و یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۸)، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس، مجله علوم آماری، ۱۳، ۲، ۴۹۶-۴۸۳.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972), *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (Pages 556, 558 and 559).

Alamri, O. A., Abd El-Raouf, M. M., Ismail, E. A., Almaspoor, Z., Alsaedi, B. S. O., Khosa, S. K. and Yusuf, M. (2021), Estimate Stress-Strength Reliability Model Using Rayleigh and Half-Normal Distribution, *Computational Intelligence and Neuroscience*, Article ID 7653581, (10 pages).

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1971), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New york.

Bhattacharya, D. and Roychowdhury, S. (2013), Reliability of a Coherent System in a Multicomponent Stress-Strength Model, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **32**(1), 40-52.

Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 966-970

Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of Mann-Whitney Statistics, *Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 13-17.

Dewanji, A. and Rao, T. S. (2001), On System Reliability Under Stress-Strength Modeling, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **30**(6), 1185-1196.

Eryilmaz, S. (2010), On System Reliability in Stress–Strength Setup, *Statistics and Probability Letters*, **80**, 834–839.

Hassan, A., Almanjahie, I. M., Al-Omari, A. I., Alzoubi, L. and Alzoubi. H. F. (2023), Stress-Strength Modeling Using Median-Ranked Set Sampling: Estimation, Simulation, and Application, *Mathematics*, **11**(2), 318.

Hemati, A., Khodadadi, Z., Zare, K. and Jafarpour, H. (2022), Bayesian and Classical Estimation of Strength-Stress Reliability for Gompertz Distribution Based on Upper Record Values, *Journal of Mathematical Extension*, **16**(7), 5, 1-27.

Jana, N. and Bera, S. (2022), Estimation of Parameters of Inverse Weibull Distribution and Application to Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of Applied Statistic*, **49**(1), 169-194.

Jovanovic, M., Milosevic, B., Obradovic, M. and Vidovic, Z. (2021), Inference on Reliability of Stress-Strength Model with Peng-Yan Extended Weibull Distributions, *Filomat*, **35**(6), 1927-1968.

Khan, M. J. S. and Khatoon, B. (2019), Statistical Inferences of $R = P(X < Y)$ for Exponential Distribution Based on Generalized Order Statistics, *Annals of Data Science*, **7**, 525-545.

Kohansal, A., Gonzalez, C. J. P. and Fernandez, A. J. (2023), Multicomponent Reliability Inference in Modified Weibull Extension Distribution and Progressive Censoring Scheme, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Societ*, **46**(2), 61.

Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), *The Stress-Strength Model and its Generalizations*, World Scientific, Singapore.

Lio, Y., Tsai, T. R., Wang, L. and Tejada, I. P. C. (2022) Inferences of the Multicomponent Stress-Strength Reliability for Burr-XII Distributions, *Mathematics*, **10**, 114, 2478.

Mirjalili, S. M., Torabi, H., Nadeb, H. and Bafekri, S. F. (2016), Stress-Strength Reliability of Exponential Distribution Based on Type-I Progressively Hybrid Censored Samples, *Journal of Statistcal Research*, **13**, 89-105.

Rao, G. S. (2013), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Based on Inverse Exponential Distribution, *International Journal of Statistics and Economics*, **10**(1), 28-37.

Shawky, A. I. and Khan, K. (2022), Reliability Estimation in Multicomponent Stress-Strength Based on Inverse Weibull Distribution, *Processes*, **10**(2), 226.

Yousef, M. M., Hassan, A. S., Alshanbari, H. M., El-Bagoury, A. A. H. and Almetwally, E. M. (2022), Bayesian and Non-Bayesian Analysis of Exponentiated Exponential Stress-Strength Model Based on Generalized Progressive Hybrid Censoring Process, *Axioms*, **11**(9), 455.

Zhang, L., Xu, A., An, L. and Li, M. (2022), Bayesian Inference of System Reliability for Multicomponent Stress-Strength Model under Marshall-Olkin Weibull Distribution, *Systems*, **10**(6), 196.