برآوردهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری خطی با تابع درستنمایی تجربی توأم مقید

ویدا شنتیاء[۱]، سید کامران قریشی[۲]

[۱]گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

[۲] گروه آمار، دانشگاه قم

چکیده: در این مقاله ابتدا مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری معرفی می‌شود. سپس با ارائه نسخه جدیدی از تابع درستنمایی تجربی (تابع درستنمایی تجربی توأم مقید)، از آن برای برآورد پارامترهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری استفاده خواهد شد. تحت فرض‌های مختلف کارآمدی استفاده از تابع درستنمایی تجربی توأم مقید در تحلیل مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری با یک مطالعه شبیه‌سازی بررسی می‌گردد. همچنین از روش معرفی شده در این مقاله برای تحلیل داده‌های تعداد تأخیر پروازهای شرکت‌های مختلف هواپیمایی استفاده خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: برآوردگر گشتاوری، برآوردگر مخاطره نااریب اشتاین، معادلات برآوردساز، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تجربی

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: سید کامران قریشی، atty_ghoreishi@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F15, 62J07.

۱ مقدمه

استفاده از برآوردهای انقباضی[1] برای برآورد پارامترها در مدل‌های سلسله مراتبی همواره مورد توجه آمارشناسان بوده است. جیمز و اشتاین (۱۹۶۱) و نیز اشتاین (۱۹۶۲) پیش از دیگران مدل‌های سلسله مراتبی همگن را توسعه دادند. تعیین ابرپارامترها در برآورد انقباضی اهمیت ویژه‌ای دارد، لذا روش‌های آماری مختلفی برای برآورد این کمیت‌ها توسط جیمز و اشتاین پیشنهاد شده است که از آن جمله می‌توان به روش گشتاوری، روش ماکسیمم درستنمایی، روش برآورد بر اساس برآورد نااریب مخاطره اشاره نمود. به دلیل محدودیت استفاده از مدل‌های سلسله مراتبی همگن در تحلیل داده‌های واقعی، مدل‌های سلسله مراتبی ناهمگن نیز توسعه یافتند. در این راستا خواص مجانبی (با مینیمم مخاطره) برآوردهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی ناهمگن، مشابه با مدل‌های سلسله مراتبی همگن، مورد توجه آمارشناس قرار گرفت که در این بین می‌توان به تحقیقات شی و همکاران (۲۰۱۶)، قریشی (۲۰۱۷) و کرمی و آرشی (۱۳۹۳) اشاره نمود.

اگرچه برآوردهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی برای همه توزیع‌های متعلق به خانواده نمایی قابل استفاده است اما بیشتر تحقیقات صورت گرفته بر اساس مدل‌های سلسله مراتبی نرمال است که برای نمونه‌های $X_1, \dots, X_n$ به صورت

$$X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i), \quad \theta_i \sim N(\mu, \lambda), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

داده می‌شود، با این فرض که $A_1, \dots, A_n$ کمیت‌های معلوم است. در این صورت برآورد انقباضی θ_i، متناظر با مدل سلسله مراتبی دو سطحی (۱)، به صورت

$$\hat{\theta}_i = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + A_i} X_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda} + A_i} \mu, \tag{2}$$

حاصل می‌شود که در واقع میانگین پسین توزیع شرطی θ_i به شرط X_i است. بارانچیک (۱۹۷۰)

[1] Shrinkage

برآوردگرهای مینیماکس قابل‌قبولی برای θ_iها ارائه داد. همچنین یک کلاس از خواص برآوردگرهای مینیماکس بیز توسط استرادرمن (۱۹۷۱) ارائه شد. براون (۱۹۷۱) یک شرط کافی برای قابل‌قبول بودن برآوردگرهای بیز مینیماکس تعمیم‌یافته را مورد بررسی قرار داد. مقایسه بین انواع برآوردگرها، تحت توابع زیان مختلف، توسط آمارشناسان گوناگون مورد بحث قرار گرفت که از آن جمله می‌توان به برگر و استرادرمن (۱۹۹۶) و منابع داخل آن اشاره نمود.

در راستای پرداختن به خواص برآوردگرهای انقباضی (۲)، نحوه برآورد ابرپارامترهای μ و λ نیز در عمل از اهمیت فراوانی برخوردار است. این مهم توسط شی و همکاران (۲۰۱۲) با مقایسه برآوردهای مختلفی که از روش‌های مختلف به‌دست می‌آمدند انجام شد. آنها ثابت کردند که برآوردهای SURE ابرپارامترها منجر به مینیمم مخاطره مجانبی برای برآوردگرهای انقباضی (۲) می‌شوند. برای بررسی خواص گوناگون دیگر از برآوردهای انقباضی مذکور شامل برآوردهای انقباضی در خانواده توزیع‌های با واریانس درجه دو (از میانگین) و روش بیزی با استفاده از چگالی پیشین دیریکله-لاپلاس می‌توان به منابع شی و همکاران (۲۰۱۶) و قریشی (۲۰۱۷) اشاره نمود. با توجه به تمام تحقیقاتی که تاکنون در ارتباط با بررسی خواص برآوردگرهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی (۱) صورت گرفته است، از مشکلاتی که دقت برآوردها را تحت تأثیر قرار می‌دهد پذیرش فرض نرمال بودن برای پارامترهای θ_i در سطح دوم این مدل‌هاست. به عبارتی هرگاه ضریب کشیدگی θ_i نسبت به ضریب متناظر در توزیع نرمال کمتر یا بیشتر باشد در این صورت خواص برآوردهای انقباضی دستخوش تغییر می‌شوند. از اینرو در این مقاله به بررسی تأثیر کم یا زیاد پراکنش توزیع سطح دوم مدل سلسله مراتبی (۱) با تعریف مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری [۲] پرداخته و از روش ماکسیمم درستنمایی تجربی توأم مقید[۳] (REML) به عنوان روش مکمل برای برآورد ابرپارامترها μ و λ استفاده می‌شود. همچنین به روش شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که برای داده‌های دور افتاده، برآوردهای انقباضی حاصل از روش REML عملکرد بهتری نسبت به روش‌های موجود نظیر روش گشتاوری و روش SURE خواهند داشت.

بخش ۲ به معرفی مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری اختصاص دارد. در بخش ۳ برآوردهای انقباضی پارامترهای θ_i تحت سه روش گشتاوری، SURE و REML به‌دست می‌آیند. بخش ۴ به یک

[2] Semi-parametric hierarchical models
[3] Restricted Empirical Maximum Likelihood

مطالعه شبیه‌سازی با سناریوهای مختلف اختصاص دارد. در بخش ۵ از روش معرفی شده در این مقاله برای تحلیل داده‌های «تعداد تأخیر در پروازهای شرکت‌های هواپیمایی» استفاده خواهد شد. بخش ۶ به نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ مدل‌های سلسله مراتبی نیم–پارامتری

مدل‌های سلسله مراتبی نیم–پارامتری، معادل مدل سلسله مراتبی (۱)، به صورت

$$X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i), \quad \theta_i \sim \pi_{\mu,\lambda}(\theta_i), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود که در آن $\pi_{\mu,\lambda}(\theta_i)$ توزیع دلخواه در سطح دوم مدل سلسله مراتبی است. در این مدل فرض می‌شود θ_iها به ترتیب دارای میانگین و واریانس ثابت μ و λ هستند. همچنین فرض می‌کنیم $A_1, \ldots, A_n$ کمیت‌های معلومی باشند. به راحتی می‌توان تحقیق کرد که توزیع حاشیه‌ای X_i نامعلوم با میانگین $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ و واریانس $\mathrm{Var}(X_i) = \lambda + A_i,$ است. دو چالش در کاربرد مدل سلسله مراتبی (۳) وجود دارد: الف– ساختار برآورد انقباضی θ_i در عمل نامعلوم است. ب– به دلیل نامعلوم بودن توزیع حاشیه‌ای X_i، از بعضی روش‌های موجود، مانند روش ماکسیمم درستنمایی، نمی توان برای برآورد ابر پارامترهای μ و λ استفاده نمود.

در این مقاله از برآورد انقباضی (۲) برای برآورد پارامترهای θ_i استفاده می‌شود. با تأکید بر اینکه این برآوردها تنها وقتی قابل استفاده هستند که هر دو سطح مدل سلسله مراتبی نرمال باشند. با این وجود برای مدل‌های سلسله مراتبی نیم–پارامتری نیز ترجیح داده می‌شود که مجدداً از این برآوردگرها برای برآورد θ_i استفاده شود، زیرا این برآوردگرها دارای ترکیب موزونی از مشاهده‌های X_i و میانگین θ_iها (یعنی μ) هستند. همچنین برای برآورد ابر پارامترهای μ و λ علاوه بر دو روش گشتاوری و SURE از روش REML استفاده خواهد شد. علاوه بر اینکه در بخش شبیه‌سازی، کارآمدی روش REML، در مقایسه با روش‌های گشتاوری و SURE مورد بحث و ارزیابی قرار می‌گیرد. دلیل انتخاب سه روش گشتاوری، SURE و REML برای برآورد ابر پارامترهای μ و λ به شرح زیر است:

۱- هر سه روش مذکور برای مدل‌های سلسله مراتبی نیم-پارامتری (۳) قابل استفاده‌اند.
۲- روش REML برای زمانی که داده‌های X_i پراکندگی زیاد دارند و حتی زمانی که نمودار بافت‌نگار متناظر آنها متقارن نیست، برآوردهای بهتری نسبت به روش‌های گشتاوری و SURE ارائه می‌کند.
۳- اگر چه سه روش مذکور برای مدل‌های سلسله مراتبی ناپارامتری، که در آن حتی توزیع سطح اول X_i نیز نرمال نباشد، کاربرد دارد، لیکن این مقاله بر فرض نرمال برای مشاهده‌های X_i و یک توزیع منعطف برای θ_iها تمرکز دارد. این فرض برای تحلیل داده‌هایی که بر اساس یک تبدیل مناسب نرمال شده‌اند قابل استفاده‌اند، براون (۲۰۰۸).

۳ برآوردهای انقباضی و خواص آنها

سه روش گشتاوری، SURE و REML برای برآورد ابر پارامترهای مدل (۳) و در نهایت برآورد پارامترهای انقباضی (۲) معرفی می‌شوند.
الف- روش گشتاوری: در مدل سلسله مراتبی نیم-پارامتری (۳) داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= \mathrm{E}[\mathrm{E}(X_i|\theta_i)] = \mu \\ \mathrm{Var}(X_i) &= \mathrm{E}[Var(X_i|\theta_i)] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}(X_i|\theta_i)] = A_i + \lambda \end{aligned} \qquad (۴)$$

در نتیجه برآوردهای گشتاوری λ و μ به ترتیب به صورت $\hat{\lambda}^M = [\frac{\sum_{i=1}^n [(X_i-\bar{X})^2 - A_i]}{n}]_+$ و $\hat{\mu}^M = \bar{X}$ خواهند بود، که در آن $[a]_+$ برابر a است هرگاه $a > 0$ و برابر ۰ است اگر $a \le 0$. راحتی در محاسبات از امتیاز برجسته این روش آماری برای برآورد ابرپارامترها است. با توجه به برآوردهای فوق برآورد انقباضی متناظر θ_i به‌صورت $\hat{\theta}_i^M = \frac{\hat{\lambda}^M}{\hat{\lambda}^M + A_i} X_i + \frac{A_i}{\hat{\lambda}^M + A_i}\bar{X}$ خواهد بود که در واقع میانگین پسین توزیع شرطی θ_i به شرط X_i می‌باشد.

ب– روش SURE: با تابع زیان توان دوم $L(\theta,\hat{\theta})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\theta-\hat{\theta})^2$، تابع مخاطره متناظر با

$$R(\theta,\hat{\theta})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(A_i+\lambda)^2}\left(A_i(\theta_i-\mu)^2+\lambda^2\right),$$

است و برآورد نااریب این تابع مخاطره به صورت

$$\mathrm{SURE}(\mu,\lambda)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{(A_i+\lambda)^2}\left(A_i(X_i-\mu)^2+\lambda^2-A_i^2\right).$$

حاصل می‌شود. با مینیم کردن $\mathrm{SURE}(\mu,\lambda)$ نسبت به μ و λ، برآوردهای SURE ابرپارامترها به‌دست می‌آید. در این صورت می‌توان برآورد انقباضی θ_i را به‌صورت $\hat{\theta}_i^S=\frac{\hat{\lambda}^S}{\hat{\lambda}^S+A_i}X_i+\frac{A_i}{\hat{\lambda}^S+A_i}\hat{\mu}^S$ ارائه داد. به دلیل اینکه سطح اول مدل سلسله مراتبی (۳) نرمال است می‌توان نتیجه گرفت که در این مدل‌ها برآوردهای $\hat{\theta}_i^S$ دارای خاصیت بهینه مخاطره، تحت شرایط عمومی، هستند (شی و همکاران، ۲۰۱۲).

ج– روش REML: با درنظر گرفتن مدل سلسله مراتبی (۳) و با توجه به روابط (۴)، توابع برآوردساز[4] ابر پارامترهای μ و λ به صورت $g_1(X_i;\mu,\lambda)=(X_i-\mu)$ و $g_2(X_i;\mu,\lambda)=(X_i-\mu)^2-A_i-\lambda$ داده می‌شوند و برای این دو برآوردساز داریم $\sum_{i=1}^{n}p_ig_j(X_i;\mu,\lambda)=0$، $j=1,2$ که در آن p_iها احتمال توزیع تجربی مقید هستند که با سه شرط $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$، $p_i>0$ و $\sum_{i=1}^{n}p_ig_j(X_i;\mu,\lambda)=0$ از ماکسیمم کردن تابع درستنمایی تجربی مقید[5] $L(\mu,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p_i$ به صورت $p_i=\left[1+w_1g_1^2(X_i;\mu,\lambda)+w_2g_2^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1}$ به‌دست می‌آیند (بیاتی و همکاران، ۲۰۲۱)، به‌عبارتی تابع درستنمایی تجربی مقید برابر خواهد بود با

$$L(\mu,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left[1+w_1g_1^2(X_i;\mu,\lambda)+w_2g_2^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1}.\qquad(5)$$

[4]Estimating functions
[5]Restricted empirical likelihood

از آنجا که در تابع درستنمایی تجربی مقید (۵) از ترکیب $1 + w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda) + w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)$ استفاده می‌شود، ممکن است در آن اثر یکی از توابع برآوردساز (در اینجا g_1 به عنوان تابعی از پارامتر μ) تحت تأثیر تابع برآوردساز دیگر (g_2 به عنوان تابعی از میانگین μ و واریانس‌های حاشیه‌ای $A_i + \lambda$) قرار گیرد و در عمل نقشی در برآورد ابرپارامترها نداشته باشد. بنابراین تابع درستنمایی تجربی جدید به صورت

$$\begin{aligned} L_R(\mu,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left[1 + w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1} \left[1 + w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1} \\ \times \prod_{i=1}^{n} \left[1 + w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left[1 + w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)\right]^{-1}, \end{aligned} \tag{6}$$

تعریف می‌شود که با استفاده از حاصل‌ضرب $\left(1 + w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)\right)\left(1 + w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)\right)$ نقش هر تابع برآوردساز در برآورد پارامترها به‌طور مجزا شرکت داده می‌شود. چون تابع درستنمایی (۶) متشکل از ضرب دو تابع درستنمایی تجربی مقید جزئی است، به آن تابع درستنمایی تجربی توأم مقید گوییم.

قضیه ۱. برای توابع درستنمایی *(۵)* و *(۶)* برای هر μ و λ داریم $L_R(\mu,\lambda) \le L(\mu,\lambda)$.

برهان: با فرض $a_{1i} = w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)$ و $a_{2i} = w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)$ و استفاده از نامساوی $(1 + a_{1i})(1 + a_{2i}) \ge 1 + a_{1i} + a_{2i}$ قضیه ثابت می‌شود.

طبق نامساوی در قضیه ۱ مقادیری از μ و λ که تابع $L_R(\mu,\lambda)$ را ماکسیمم می‌کنند تابع $L(\mu,\lambda)$ را نیز به سمت مقدار ماکسیمم خود سوق می‌دهند.

برآوردهای ماکسیمم درستنمایی تجربی μ و λ به‌صورت $(\hat{\mu}^E, \hat{\lambda}^E) = \arg\min_{\mu,\lambda} L_R(\mu,\lambda)$ حاصل می‌شوند. جذابیت استفاده از روش REML $L_R(\mu,\lambda)$ در این است که برای داده‌های پرت احتمال کوچک‌تری برآورد می‌شود. به عبارتی تأثیر داده‌های پرت در برآورد پارامترهای مدل کمتر می‌شود (بیاتی و همکاران، ۲۰۲۱). با این وجود یکی از چالش‌های اساسی در محاسبه برآوردهای ابر پارامترهای ماکسیمم درستنمایی تجربی $(\hat{\mu}^E, \hat{\lambda}^E)$، وابستگی آنها به کمیت‌های ثابت w_1 و w_2 است که مجهول هستند. در عمل می‌توان به دو روش بیزی (با فرض چگالی پیشین برای w_1 و w_2) و روش کلاسیک،

اعتبارسنجی متقابل[6]، این دو کمیت ثابت را برآورد نمود. پس از محاسبه برآورد ابرپارامترها، برآورد انقباضی θ_i به روش REML برابر $\hat{\theta}_i^E = \dfrac{\hat{\lambda}^E}{\hat{\lambda}^E + A_i} X_i + \dfrac{A_i}{\hat{\lambda}^E + A_i}\hat{\mu}^E$ خواهد بود.

قضیه ۲. تحت شرایط نظم برای توابع $g_1(X_i;\mu,\lambda)$ و $g_2(X_i;\mu,\lambda)$، توزیع مجانبی توأم $(\hat{\mu}^E, \hat{\lambda}^E)$ نرمال دو متغیره است.

برهان: از درستنمایی $L_R(\mu,\lambda) = \prod_{i=1}^n [1+w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)]^{-1}[1+w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda)]^{-1}$ داریم:

$$\ell(\mu,\lambda) = \ln L_R(\mu,\lambda) = -\sum_{i=1}^n \left[\ln(1+w_1 g_1^2(X_i;\mu,\lambda)) + \ln(1+w_2 g_2^2(X_i;\mu,\lambda))\right].$$

با محاسبه ماتریس هسین متناظر با تابع $\ell(\mu,\lambda)$ و استفاده از قضیه حد مرکزی، توزیع $(\hat{\mu}^E, \hat{\lambda}^E)$ برای $n \to \infty$ نرمال دو متغیره با میانگین (μ,λ) و ماتریس کوواریانس زیر خواهد بود

$$I^{-1}(\mu,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \ell(\mu,\lambda)}{\partial \mu \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \ell(\mu,\lambda)}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در بخش قبل سه روش گشتاوری، SURE و REML برای یافتن برآوردهای انقباضی در مدل‌های سلسله مراتبی نیم–پارامتری استفاده گردید. در آنجا توضیح داده شد که برآوردگر SURE دارای خاصیت مینیمم مخاطره است. اما اینکه در عمل کدامیک از روش‌های فوق عملکرد بهتری را به نمایش می‌گذارد نیاز به تحقیقات وسیع‌تری دارد که در این بخش به روش شبیه‌سازی به آن پرداخته خواهد شد. در اینجا چهار حالت مختلف زیر در نظر گرفته شد.

حالت اول: فرض می‌شود علاوه بر سطح اول، توزیع سطح دوم مدل سلسله مراتبی (۳) نیز نرمال است، یعنی $X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i)$ و $\theta_i \sim N(\mu,\lambda)$.

[6] Cross validation

حالت دوم: توزیع سطح دوم مدل سلسله مراتبی (۳)، نسبت به توزیع نرمال پراکندگی بیشتری دارد و از توزیع لاپلاس پیروی می‌کند، به عبارتی داریم $X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i)$ و $\theta_i \sim L(\mu, ۲\lambda)$.

حالت سوم: توزیع سطح دوم مدل سلسله مراتبی (۳) نسبت به توزیع نرمال پراکندگی کمتری داشته و از توزیع یکنواخت پیروی می‌کند، یعنی $X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i)$ و $\theta_i \sim U(\mu - \sqrt{۳}\lambda, \mu + \sqrt{۳}\lambda)$.

حالت چهارم: با فرض آنکه X دارای داده پرت است، ابتدا توزیع سطح دوم مدل سلسله مراتبی (۳) نرمال فرض می‌شود سپس ۱۰ درصد از داده‌ها با مقدار ثابت ۲۰ جایگزین می‌گردد، به عبارتی داریم $X_i \mid \theta_i \sim N(\theta_i, A_i)$، که در آن

$$\theta_i \sim N(۲۰, \lambda), \qquad i = ۱, \ldots, [\frac{n}{۱۰}]$$
$$\theta_i \sim N(\mu, \lambda), \qquad i = [\frac{n}{۱۰}] + ۱, \ldots, n,$$

و $[\cdot]$ نشان دهنده جزء صحیح است.

به منظور مقایسه حالت‌های مختلف، مطالعه شبیه‌سازی برای حجم نمونه‌های ۵۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ انجام شد. در هر مرحله شبیه‌سازی از مقادیر $A_i \sim U(۰/۰۱, ۱)$، $\mu = ۲$، $\lambda_۰ = ۰/۴$، و $w_۱ =$ $w_۲ = ۰/۵$ برای استخراج نتایج استفاده گردید. شبیه‌سازی به تعداد $M = ۵۰۰$ مرتبه انجام شد و برای ارزیابی کارآمدی روش‌های مختلف، از معیار $MSE = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(\hat{\theta}_i - \theta_i)^۲$ استفاده شد. در هر مرحله از شبیه‌سازی MSE مقادیر واقعی θ_i با برآورد اراکل[۷] متناظر، $\hat{\theta} = \frac{\lambda}{\lambda+A_i}Y_i + \frac{A_i}{\lambda+A_i}\mu$، که دارای کمترین مقدار میانگین توان دوم خطا است، نیز به‌دست آمد. این مقدار برای ارزیابی دقیق‌تر روش‌های مختلف برآورد مورد نیاز است. نتایج مطالعه شبیه‌سازی در جدول ۱ آمده است. در این جدول به ازای nهای مختلف مقدار MSE برآوردگرهای انقباضی $\hat{\theta}_i$ تحت حالت‌های مختلف گزارش شده است. براساس نتایج این جدول ملاحظه می‌شود تحت حالت‌های دوم و چهارم که داده‌ها پراکندگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال دارند برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تجربی عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای حاصل از روش‌های مختلف، به‌ویژه زمانی که داده‌ها شامل تعدادی داده‌های پرت هستند، دارند.

---
[7] Oracle

جدول ۱: مقادیر MSE برای حالت‌ها و روش‌های مختلف

حالت	روش	n: ۵۰۰	۱۰۰۰	۵۰۰۰
اول	Oracle	۰/۳۲۱۴	۰/۳۳۹۸	۰/۳۲۵۱
	SURE	۰/۴۵۹۳	۰/۴۶۲۸	۰/۴۶۳۶
	REML	۰/۳۹۸۹	۰/۴۱۸۵	۰/۴۲۴۳
	گشتاوری	۰/۴۴۹۷	۰/۴۵۸۳	۰/۴۷۲۹
دوم	Oracle	۰/۳۱۷۱	۰/۳۰۶۸	۰/۳۴۶۱
	SURE	۰/۴۵۹۴	۰/۴۶۰۳	۰/۴۶۳۹
	REML	۰/۳۶۳۴	۰/۳۹۱۰	۰/۴۳۸۱
	گشتاوری	۰/۴۳۷۷	۰/۴۴۹۰	۰/۴۷۵۸
سوم	Oracle	۰/۳۱۷۰	۰/۳۰۶۹	۰/۳۴۶۱
	SURE	۰/۴۵۹۹	۰/۴۶۰۸	۰/۴۶۳۹
	REML	۰/۴۰۶۵	۰/۴۰۹۴	۰/۴۱۴۰
	گشتاوری	۰/۴۴۰۹	۰/۴۵۰۸	۰/۴۷۶۵
چهارم	Oracle	۰/۲۷۲۹	۰۲۳۰۵۶	۰/۳۴۰۸
	SURE	۰/۰۱۱۳	۰/۱۱۳	۰/۰۱۱۲
	REML	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۴۲
	گشتاوری	۰/۰۱۱۳	۰/۰۱۱۱	۰/۰۱۱۲

۵ مثال کاربردی

طبق گزارش خبرگزاری جمهوری اسلامی ایران میزان تأخیر بیست شرکت هواپیمایی در چهارماه ابتدای سال ۱۴۰۲ در جدول ۲ آمده است. این داده‌ها شامل تعداد کل پروازهای شرکت هواپیمایی و تعداد پروازها با تأخیرشان می‌باشد. N نمایانگر تعداد پروازها و X مشخص‌کننده تعداد پروازها با تأخیر است. توزیع X_i به‌صورت $X_i \sim B(N_i, p_i)$ است که در آن $i = 1, \dots, 20$ مشخص کننده تعداد شرکت هواپیمایی است. همانند براون (۲۰۰۸) از تبدیل ثابت‌سازی واریانس برای داده‌ها استفاده شد تا مقادیر Y به صورت $Y_i = Arcsin\sqrt{\frac{X_i+0/25}{N_i+0/4}}$ به‌دست آیند، که دارای توزیع نرمال به‌صورت $Y_i \sim N(\theta_i, \frac{1}{4N_i})$ می‌باشد و در آن $\theta_i = Arcsin(\sqrt{p_i})$. سپس با استفاده از تابع درستنمایی تجربی توأم مقید برای تحلیل داده‌های Y_i استفاده شد و برآوردهای $\hat{\theta}_i$ از رابطه $\hat{\theta}_i = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+\frac{1}{4N_i}}Y_i + \frac{\frac{1}{4N_i}}{\hat{\lambda}+\frac{1}{4N_i}}\hat{\mu}$ به‌دست آمدند. نتایج در جدول ۲ گزارش شده و برآوردهای ابرپارامترهای متناظر با $\hat{\lambda} = 0/016$ و $\hat{\mu} = 0/525$ به‌دست آمدند.

جدول ۲: داده‌های واقعی، تبدیل شده و برآورد θ_i

شرکت هواپیمایی	پرواز خروجی	پرواز خروجی تأخیردار	Y_i	$\hat{\theta}_i$
تابان	۱۵۹۵	۶۸۲	۰/۷۱۲۸	۰/۷۱۱۰
آتا ایر	۵۶۱۰	۱۶۰۶	۰/۵۶۴۶	۰/۵۶۴۵
چابهار ایر	۱۰۹۵	۳۲۰	۰/۵۷۱۳	۰/۵۷۰۶
ساها	۱۶۶۲	۵۶۹	۰/۶۲۵۱	۰/۶۲۴۲
ایرتور	۲۷۳۸	۹۱۶	۰/۶۱۶۸	۰/۶۱۶۳
آسمان	۵۵۴۹	۱۷۸۶	۰/۶۰۳۳	۰/۶۰۳۱
کیش ایر	۳۶۴۲	۱۳۹۶	۰/۶۶۷۶	۰/۶۶۷۰
وارش	۳۵۲۷	۹۸۸	۰/۵۵۷۸	۰/۵۵۷۶
ایران ایر	۵۱۰۱	۱۵۱۲	۰/۵۷۵۷	۰/۵۷۵۶
کارون	۳۵۵۳	۱۲۷۳	۰/۶۴۱۷	۰/۶۴۱۲
کاسپین	۲۹۵۶	۷۸۳	۰/۵۴۰۷	۰/۵۴۰۶
قشم ایر	۲۸۶۷	۷۵۳	۰/۵۳۸۱	۰/۵۳۸۱
پارس ایر	۱۷۲۰	۳۲۷	۰/۴۵۱۳	۰/۴۵۲۰
سپهران	۲۹۲۲	۶۸۵	۰/۵۰۵۵	۰/۵۰۵۶
معراج	۱۰۱۲	۲۹۴	۰/۵۶۹۴	۰/۵۶۸۷
زاگرس	۲۰۹۰	۳۶۸	۰/۴۳۳۱	۰/۴۳۳۸
پویا ایر	۱۰۴۷	۱۴۱	۰/۳۷۶۰	۰/۳۷۸۲
آساجت	۴۷۹	۲۲	۰/۲۱۷۱	۰/۲۲۶۹
فلای پرشیا	۱۵۳۰۳	۳۶۳۲	۰/۵۰۸۹	۰/۵۰۸۹
ماهان	۶۰۱۲	۳۹۳	۰/۲۵۸۶	۰/۲۵۹۳

۶ بحث و نتیجه‌گیری

از روش‌های گشتاوری، SURE و روش پیشنهادی REML برای برآورد پارامترهای انقباضی مدل سلسله مراتبی نیم-پارامتری استفاده شد. در یک مطالعه شبیه‌سازی نشان داده شد که روش REML به‌ویژه وقتی تعدادی داده پرت در جمع داده‌ها وجود دارد عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. این مهم به دلیل آن است که برخلاف توابع درستنمایی مرسوم، در ساختار این تابع، توابع برآوردساز به صورت مجزا نقش آفرینی می‌کنند. بنابراین پیشنهاد می‌شود که از این تابع به عنوان یک روش مفید برای تحلیل مدل‌های سلسله مراتبی ناهمگن با ساختار نیم-پارامتری استفاده شود.

۷ تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی و سپاس خود را از پیشنهادات ارزنده داوران، سردبیر و ویراستار محترم مجله که باعث افزایش سطح کیفی مقاله شده است، اعلام می‌دارند.

مراجع

کرمی‌کبیر، ح. و آرشی، م. (۱۳۹۳)، برآوردگر انقباضی در توزیع نرمال چند متغیره تحت فضای پارامتر محدود، مجله علوم آماری، ۸، ۷۵–۹۲.

Baranchik A. J. (1970), A Family of Minimax Estimators of the Mean of a Multivariate Normal Distribution, *The Annals of Mathematical Statistics*, **41**, 642-645.

Bayati, M., Ghoreishi, S. K., and Wu, J. (2021), Bayesian Analysis of Restricted Penalized Empirical Likelihood, *Computational Statistics*, **36**, 1321-1339.

Berger, J. and Strawderman, W. E. (1996), Choice of Hierarchical Priors: Admissibility in Estimation of Normal Means, *The Annals of Statistics*, **24**, 931-951.

Brown, L. D. (1971), Admissible Estimators, Recurrent Diffusions, and Insoluble Boundary Value Problems, *The Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 855-903.

Brown, L. D. (2008), In-season Prediction of Batting Average: A Field Test of Empirical Bayes and Bayes Methodologies, *The Annals of Applied Statistics*, **2**, 113-152.

Ghoreishi, S. K. (2017), Bayesian Analysis of Hierarchical Heteroscedastic Linear Models Using Dirichlet-Laplace Priors, *Journal of statistical Theory and Applications*, **16**, 53-64.

James, W. and Stein, C. M. (1961), Estimation With Quadratic Loss. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Probability and Statistics*, **I**, 367-379.

Stein, C. M. (1962), Confidence Sets for the Mean of a Multivariate Normal Distribution (With Discussion), *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, **24**, 265-296.

Strawderman, W. E. (1971), Proper Bayes Minimax Estimators of the Multivariate Normal Mean, *The Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 385-388.

Xie, X., Kou, S. C. and Brown, L. D. (2012), SURE Estimates for a Heteroscedastic Hierarchical Model, *Journal of the American Statistical Association*, **107**, 1465-1479.

Xie, X., Kou, S. C. and Brown, L. D. (2016), Optimal Shrinkage Estimation of Mean Parameters in Family of Distributions With Quadratic Variance, *The Annals of Statistics*, **44**, 564.

Shrinkage Estimators in Semi-Parametric Heteroscedastic Hierarchical Models Using Restricted Joint Empirical likelihood

Shantia[1]**, V., Ghoreishi, S. K.**[2]

[1]Department of Statistics, Islamic Azad University, Tehran , Iran.

[2]Department of Statistics, University of Qom, Qom , Iran.

Abstract: In this paper, we first introduce semi-parametric heteroscedastic hierarchical models. Then, we define a new version of the empirical likelihood function (Restricted Joint Empirical likelihood) and use it to obtain the shrinkage estimators of the models' parameters in these models. Under different assumptions, a simulation study investigates the better performance of the restricted joint empirical likelihood function in the analysis of semi-parametric heterogeneity hierarchical models. Furthermore, we analyze an actual data set using the RJEL method.

Keywords:: Moment estimator, Stein's unbiased risk estimator, Estimating equations, Empirical maximum likelihood estimator.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F15, 62J07.