مدل‌سازی اتورگرسیو براساس تابع تکیه‌گاه متغیرهای تصادفی فازی

حسین محمدی[1]، محمد قاسم اکبری[1]، غلامرضا حسامیان[2]

[1]گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

[2]گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور تهران

چکیده: در این مقاله ابتدا با استفاده از تابع تکیه‌گاه، یک متر را بین اعداد فازی تعریف نموده و سپس براساس آن مفاهیم واریانس، کواریانس و ضریب همبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی بیان شده و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس با استفاده از مفاهیم فوق، مدل اتورگرسیو فازی مرتبه p را براساس متغیرهای تصادفی فازی معرفی نموده و خواص مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت برای شرح بیشتر مسئله، مثال‌هایی ارائه و با استفاده از برخی از معیارهای نیکویی برازش، با مدل‌های مشابه مقایسه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تابع تکیه‌گاه، متغیر تصادفی فازی، اتورگرسیو فازی.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: نام نویسنده مسئول مقاله، hmohammadi152@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91G70، 91B16.

۱ مقدمه

در بسیاری از رویدادهای واقعی زندگی مجموعه مشاهدات داده‌های زبانی و نادقیق هستند مانند قیمت سهام، دما، رشد اقتصادی و غیره، در چنین مواردی دیدگاه‌های کلاسیک نمی‌توانند به مطالعه ساختار این مشاهدات بپردازند و با استفاده از نظریه مجموعه‌های فازی می‌توان به مدل‌بندی مشاهدات پرداخت. برای نخستین بار مفهوم مدل‌های سری‌زمانی فازی توسط سانگ و چیسام (۱۹۹۳) براساس مفاهیم مجموعه‌های فازی، برای پیش‌بینی پذیرش دانشگاه آلاباما ارائه گردید. سانگ و همکاران (۱۹۹۵) از طریق تعریف یک عملگر جمع و تفاضل فازی جدید، مدل سری زمانی ارائه کردند که برای مدل‌بندی سری زمانی فازی مانا کاربرد دارد. چن (۱۹۹۶) با ساده‌سازی عملگرهای جبری مدل سانگ و چیسام (۱۹۹۳) باعث بهبود و افزایش دقت محاسبات گردید و برد تغییرات متغیر را به هفت بازه مساوی تقسیم کرد و به عنوان نمایانگر متغیرهای زبانی "بسیار کم"، "کم"، "اندکی کم"، "متوسط"، "اندکی زیاد"، "زیاد" و "بسیار زیاد" قرار داد. هورنگ (۲۰۰۱) به بررسی و تعیین بازه‌های مناسب پرداخت. در ادامه افراد زیادی روی روش‌های بازه‌بندی مطالعه انجام دادند که می‌توان به روی (۲۰۰۵)، جیلانی و همکاران (۲۰۰۷) و چنگ و همکاران (۲۰۰۸) اشاره کرد.

در ادامه هونگ (۲۰۰۵) نتایج مربوط به مدل‌های سری زمانی فازی را به سری زمانی نامانا و سری زمانی در حالت کلی تعمیم داد. در سال‌های اخیر استفاده از این نظریه در مدل‌سازی سری زمانی فازی بسیار مورد توجه قرار گرفته است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. چنگ و همکاران (۲۰۱۶) برای پیش‌بینی شاخص بورس تایوان از سری‌زمانی فازی استفاده کرده‌اند به این صورت که ابتدا با بازه‌بندی مجموعه مرجع، هر داده واقعی را به داده فازی تبدیل می‌شود سپس براساس منطق فازی و الگوریتم خوشه بندی $K-means$، مجموعه‌های فازی خوشه‌بندی می‌شوند و مراکز خوشه‌ها محاسبه می‌شوند و در انتها مقادیر داده‌ها با استفاده از توابع و روابط تعریف شده (اندازه شباهت و ...)، پیش‌بینی می‌شوند.

حسامیان و اکبری (۲۰۱۸) مدل سری‌زمانی نیمه پارامتری فازی را به صورت رابطه

$$\widetilde{X}_i = \overset{p}{\underset{l=1}{\oplus}} (\theta_l \otimes \widetilde{X}_{i-l}) \oplus \widetilde{f}(t_i) \oplus \widetilde{\varepsilon}_i, \quad i = p+1, \ldots, T.$$

تعریف کرده‌اند، که در آن تابع هموارساز $\widetilde{f}(t_i)$، با استفاده از روش کرنل نادریا- واتسون برآورد شده و ضرایب مدل (θ_lها) با استفاده از متر تعریف شده در مقاله برآورد شده‌اند همچنین مرتبه مدل (p) با استفاده از الگوریتم بیان شده در مقاله برآورد شده و با استفاده از سه معیار نیکویی برازش، نتایج مدل با مدل‌های دیگر مقایسه شده است. زارعی و همکاران (۲۰۲۰) مدل اتورگرسیو مرتبه اول و مرتبه دوم نیمه پارامتری براساس داده‌های سری زمانی فازی را بررسی و با استفاده از تابع کرنل این مدل را با مدل‌های دیگر مقایسه نموده‌اند. این مدل برای حالت $p = ۲$ مشابه مدل حسامیان و اکبری (۲۰۱۸) بوده با این تفاوت که اولا یک خطای امکانی در مدل گنجانده شده و ثانیا آنها از یک متر متفاوت از حسامیان و اکبری که بر اساس انتگرال قدرمطلق بین آلفا شک های اعداد فازی است، برای برآورد ضرایب استفاده نموده‌اند.

حسامیان و همکاران (۲۰۲۲) مدل سری‌زمانی ناپارامتری فازی را برای داده‌های فازی به صورت $\widetilde{X}_i = \widetilde{\theta}_\circ \oplus (\overset{p}{\underset{l=۱}{\oplus}} (\theta_l \otimes \widetilde{X}_{i-l})) \oplus U_i$ تعریف کرده‌اند که در آن U_iها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس ثابت هستند. برای این مدل حدود پایین، مرکز و بالا به‌ترتیب به‌صورت

$$X_i^L = \theta_\circ^L + \sum_{l=۱}^{p} (k_i^l X_{i-l}^L - (۱ - k_i^l) X_{i-l}^U) + U_i,$$

$$X_i = \theta_\circ + \sum_{l=۱}^{p} X_{i-l}\theta_l + U_i,$$

$$X_i^U = \theta_\circ^U + \sum_{l=۱}^{p} (k_i^l X_{i-l}^U - (۱ - k_i^l) X_{i-l}^L) + U_i.$$

محاسبه شده است و مطابق چندک فازی تعریف شده در مقاله، حدود پایین، مرکز و بالای چندک فازی

مدل به‌ترتیب به‌صورت

$$Q_{X_i^L}(\tau) = \theta_\circ^L + \sum_{l=1}^{p}(k_i^l X_{i-l}^L - (1-k_i^l)X_{i-l}^U) + F_{U_i}^{-1}(\tau),$$
$$Q_{X_i}(\tau) = \theta_\circ + \sum_{l=1}^{p} X_{i-l}\theta_l + F_{U_i}^{-1}(\tau),$$
$$Q_{X_i^U}(\tau) = \theta_\circ^U + \sum_{l=1}^{p}(k_i^l X_{i-l}^U - (1-k_i^l)X_{i-l}^L) + F_{U_i}^{-1}(\tau).$$

به‌دست آمده است. در انتها با استفاده از بهینه‌سازی رابطه

$$\widetilde{\hat{\theta}}(\tau) = \arg \min_{\{\theta_\circ^*(\tau),\theta_1,\ldots,\theta_p,l_{\theta_\circ^*(\tau)}>\circ,r_{\theta_\circ^*(\tau)}>\circ\}} \sum_{i=p+1}^{T} \rho_\tau(D_S(\widetilde{X}_i, \widetilde{Q}_{\widetilde{X}_i}(\tau))),$$

برآورد ضرایب محاسبه شده است، که در آن $\rho(u) = u(\tau - I(u < \circ))$ تابع زیان چندکی است. در تمامی مدل‌های فوق که براساس داده‌های فازی زمانی هستند، از روش‌های ناپارامتری، نیمه پارامتری، منطق فازی و یا شبکه عصبی برای مدل‌بندی و پیش‌بینی این داده‌ها استفاده شده است.

طاهری و همکاران (۱۴۰۲) براساس متغیر فازی تعمیم‌یافته که به‌صورت یک میانگین حسابی از α و $1-\alpha$ شک متغیر تصادفی فازی است، یک تابع اتوکواریانس و خودهمبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی استفاده نموده‌اند. آن‌ها با استفاده از توابع گفته شده مدل میانگین متحرک مرتبه q را مورد بررسی قرار داده و ضرایب آن را محاسبه نموده‌اند. لازم به ذکر است که خطای مدل را به‌صورت متغیرهای تصادفی فازی LR با مراکز ناهمبسته و ابهام‌های مثبت و مستقل در نظر گرفته‌اند. در این مقاله سعی بر این است که با استفاده از مفهوم تابع تکیه‌گاه و روابط همبستگی بین داده‌ها، مدل‌بندی و پیش‌بینی الگوی اتورگرسیو برای داده‌ها صورت پذیرد.

چارچوب کلی این مقاله به این‌صورت است که در بخش ۲ مفاهیم مقدماتی فازی مطرح گردیده است. در بخش ۳، با استفاده از مفهوم تابع تکیه‌گاه مفاهیم واریانس، کواریانس و ضریب همبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی بیان شده و خواص آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴، مدل

سری‌زمانی اتورگرسیو فازی از مرتبه p معرفی شده و ضرایب مدل با روش گشتاوری برآورد شده است و در پایان با مثال‌های عددی به بررسی و کنکاش بیشتر نتایج پرداخته شده است.

۲ مفاهیم فازی

مجموعه مرجع $\mathbb{X}$ را در نظر بگیرید. اگر $\widetilde{A}(x)\mathbb{X} \longrightarrow [0, 1]$ آن‌گاه مجموعه $\widetilde{A}$ را یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\widetilde{A}(x)$ یا $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ نامیم و مجموعه فازی $\widetilde{A}$ به‌صورت $\{(x, \widetilde{A}(x)); x \in \mathbb{X}\}$نمایش داده می‌شود. مجموعه عناصری از $\mathbb{X}$ که درجه عضویت آن‌ها حداقل به بزرگی $\alpha \in (0, 1]$ باشد، α-برش $\widetilde{A}$ نامیده و با نماد $\widetilde{A}[\alpha]$ نمایش می‌دهند، به عبارت دیگر $\widetilde{A}[\alpha] = \{x \in \mathbb{X} \mid \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$ و همچنین می‌توان $\widetilde{A}[\alpha] = [\widetilde{A}^L_\alpha, \widetilde{A}^U_\alpha]$ تعریف کرد، که در آن $\widetilde{A}^L_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{X} \mid \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$ و $\widetilde{A}^U_\alpha = \sup\{x \in \mathbb{X} \mid \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$.

۱.۲ اعداد فازی

تعریف ۱. مجموعه فازی $\widetilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را عدد فازی گویند، هرگاه $\widetilde{A}$ تک‌نمایی باشد، یعنی حداقل یک $x_0 \in \mathbb{X}$ وجود داشته باشد که $\widetilde{A}(x_0) = 1$ و α-برش‌های $\widetilde{A}$ برای هر $\alpha \in (0, 1]$ بازه‌های بسته و کراندار باشند.

تعریف ۲. فرض کنید $\widetilde{A}$ یک عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشد. $\widetilde{A}$ را عدد فازی LR گویند، اگر تابع عضویت آن به‌صورت

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} L(\dfrac{a-x}{a-a^L}) & a^L \leq x \leq a, \\ R(\dfrac{x-a}{a^U-a}) & a < x \leq a^U, \end{cases}$$

باشد، که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$. عدد حقیقی a مقدار نما یا میانه، اعداد مثبت $a - a^L$ و $a^U - a$ به‌ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\widetilde{A}$ نامیده می‌شوند. عدد فازی LR با نماد $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_{LR}$ که $a^L < a < a^U$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳. اگر $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_{LR}$ و

$$\widetilde{A}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a^L}{a - a^L} & a^L \leq x \leq a \\ \dfrac{a^U - x}{a^U - a} & a < x \leq a^U, \\ \circ & x \in \mathbb{R} - [a^L, a^U], \end{cases}$$

آن‌گاه $\widetilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی نامیده و با نماد $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_T$ نمایش می‌دهند.

ملاحظه ۱. اگر $\widetilde{B} = (b^L, b, b^U)_T$ ، $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_T$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{B} = (a^L + b^L, a + b, a^U + b^U)_T$$

$$\widetilde{A} \ominus \widetilde{B} = (a^L - b^U, a - b, a^U - b^L)_T$$

$$\lambda \otimes \widetilde{A} = \begin{cases} (\lambda a^L, \lambda a, \lambda a^U)_T & \lambda > \circ \\ (\lambda a^U, \lambda a, \lambda a^L)_T & \lambda < \circ \end{cases}$$

ملاحظه ۲. اگر $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_T$ آن‌گاه α-برش آن به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\widetilde{A}[\alpha] = [a - (۱ - \alpha)(a - a^L), a + (۱ - \alpha)(a^U - a)].$$

تعریف ۴. اگر $\widetilde{B} = (b^L, b, b^U)_{LR}$ و $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند، آن‌گاه فاصله قدرمطلق خطا بین این دو عدد فازی به صورت

$$D(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = |a - b| + c_۱|a^L - b^L| + c_۲|a^U - b^U|.$$

تعریف می‌شود، که در آن $c_۱ = \int_\circ^۱ L^{-۱}(\alpha)d\alpha$ و $c_۲ = \int_\circ^۱ R^{-۱}(\alpha)d\alpha$.

تعریف ۵. (حسامیان و اکبری ، ۲۰۱۸) اگر $\widetilde{B} = (b^L, b, b^U)_T$ و $\widetilde{A} = (a^L, a, a^U)_T$ دو عدد فازی مثلثی باشند آن‌گاه تفاضل تعمیم‌یافته $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ عبارت است از

$$\widetilde{A} \ominus_G \widetilde{B} = (a - b - |(a - a^L) - (b - b^L)|, a - b, a - b + |(a^U - a) - (b^U - b)|)_T.$$

ملاحظه ۳. فرض کنید $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی باشد. برای $\widetilde{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$، نگاشت $\widetilde{A}_\alpha[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$، را α-شک $\widetilde{A}$ نامیده و به‌صورت $\widetilde{A}_\alpha = \begin{cases} \widetilde{A}^L_{2\alpha} & 0 \leq \alpha \leq 0/5 \\ \widetilde{A}^U_{2(1-\alpha)} & 0/5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$ بیان می‌شود، که در آن $\widetilde{A}^L_\alpha$ و $\widetilde{A}^U_\alpha$ مقادیر پایین و بالای α-برش عدد فازی $\widetilde{A}$ هستند. دقت شود که رابطه α-شک با α-برش به‌صورت $\widetilde{A}[\alpha] = [\widetilde{A}_{\frac{\alpha}{2}}, \widetilde{A}_{1-\frac{\alpha}{2}}]$ است، که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$.

لم ۱. به ازای هر $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0, 1]$ داریم

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_\alpha,$$
$$(\widetilde{A} \ominus \widetilde{B})_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + \widetilde{B}_{1-\alpha},$$
$$(\lambda \otimes \widetilde{A})_\alpha = \begin{cases} \lambda \widetilde{A}_\alpha & \lambda > 0 \\ 0 & \lambda = 0 \\ \lambda \widetilde{A}_{1-\alpha} & \lambda < 0. \end{cases}$$

۲.۲ متغیر تصادفی فازی

اولین بار مفهوم متغیر تصادفی فازی در فضای احتمال $(\Omega, \mathbb{F}, P)$، توسط واکرناک (۱۹۷۸) با استفاده از α-برش به صورت $\{(\omega, x)\widetilde{X}(\omega)[\alpha] \subseteq B\} \in \mathbb{F} \times \mathbb{B}$ معرفی شد که در آن $\alpha \in (0, 1]$، $B \in \mathbb{B}$، B مجموعه بورل و $\mathbb{B}$ سیگما جبر متشکل از زیرمجموعه‌های بورل $\mathbb{R}$، $\mathbb{F}$ سیگما جبر از زیرمجموعه‌های Ω است و $\omega \in \Omega$. و $\widetilde{X}(\omega)[\alpha] = \{x\widetilde{X}(\omega)(x) \geq \alpha\}$ تابعی مجموعه‌ای مقدار است. در ادامه تعاریف مختلفی برای متغیر تصادفی در محیط فازی بیان شده است، که دو مورد از این تعاریف در ادامه بیان می‌شود.

مقاله پذیرفته شده

تعریف ۶. (پوری و رالسکو ، ۱۹۸۶) در فضای احتمال $(\Omega, \mathbb{F}, P)$، $\widetilde{X}\Omega \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{F}(\mathbb{R})$ مجموعه تمام اعداد فازی روی $\mathbb{R}$) یک متغیر تصادفی فازی است اگر به ازای تمام $\alpha \in (0, 1]$، $\widetilde{X}_\alpha^L\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ و $\widetilde{X}_\alpha^U\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ متغیرهای تصادفی معمولی باشند. به‌طور معادل $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است، هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\{\omega x \in \widetilde{X}_\alpha^L(\omega) \in B\} \in \mathbb{F}$ و $\{\omega x \in \widetilde{X}_\alpha^U(\omega) \in B\} \in \mathbb{F}$.

تعریف ۷. (حسامیان و چاچی ، ۲۰۱۵) در فضای احتمال $(\Omega, \mathbb{F}, P)$، $\widetilde{X}\Omega \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ یک متغیر تصادفی فازی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\widetilde{X}_\alpha\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی معمولی باشد. به‌طور هم‌ارز $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است، هرگاه اندازه‌پذیر $\mathbb{F}$ باشد. یعنی برای هر $\alpha \in (0, 1]$، $\{\omega \widetilde{X}_\alpha(\omega) \in B\} \in \mathbb{F}$.

روابط بین α-شک و α-برش در تعاریف ۶ و ۷ به‌صورت زیر است.

$$\widetilde{X}_\alpha = \begin{cases} \widetilde{X}_{2\alpha}^L & 0 \leq \alpha \leq 0.5 \\ \widetilde{X}_{2(1-\alpha)}^U & 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad \widetilde{X}[\alpha] = [\widetilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}, \widetilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}}] \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

۳ همبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی مثلثی

در این بخش ابتدا مفهوم امید ریاضی متغیرهای تصادفی فازی مثلثی بیان می‌شود. در ادامه تعریف تابع تکیه‌گاه یک مجموعه تصادفی را بیان نموده و سپس با استفاده از آن به بررسی مفهوم ضریب همبستگی بین متغیرهای تصادفی فازی خواهیم پرداخت. لازم به ذکر است در این مقاله تمامی تعاریف و قضایا برای متغیرهای فازی مثلثی است.

تعریف ۸. (وو ، ۱۹۹۹) اگر $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی مثلثی باشد آن‌گاه امید ریاضی آن را با نماد $\widetilde{E}(\widetilde{X})$ نمایش داده و تابع عضویت آن به صورت $\mu_{\widetilde{E}(\widetilde{X})}(x) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1}(\alpha I_{[\widetilde{E}_\alpha^L(\widetilde{X}), \widetilde{E}_\alpha^U(\widetilde{X})]}(x))$

تعریف می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^L_\alpha(\widetilde{X}) &= \inf_{\alpha\le\beta\le 1}(\mathrm{E}(X)X\in[\widetilde{X}^L_\beta,\widetilde{X}^U_\beta]),\\ \widetilde{E}^U_\alpha(\widetilde{X}) &= \sup_{\alpha\le\beta\le 1}(\mathrm{E}(X)X\in[\widetilde{X}^L_\beta,\widetilde{X}^U_\beta]).\end{aligned}$$

از آنجا که امید ریاضی متغیرهای تصادفی X و Y که $P(X\le Y)=1$، به صورت $\mathrm{E}(X)\le\mathrm{E}(Y)$ است، بنابراین

$$\begin{aligned}\widetilde{E}^L_\alpha(\widetilde{X}) &= \inf_{\alpha\le\beta\le 1}(\mathrm{E}(X)X\in[\widetilde{X}^L_\beta,\widetilde{X}^U_\beta])\\ &= \inf_{\alpha\le\beta\le 1}(X\mathrm{E}(X)\in[\mathrm{E}(\widetilde{X}^L_\beta),\mathrm{E}(\widetilde{X}^U_\beta)])=\mathrm{E}(\widetilde{X}^L_\alpha)\end{aligned}$$

باید دقت شود که $[\mathrm{E}(\widetilde{X}^L_\alpha),\mathrm{E}(\widetilde{X}^U_\alpha)]$ به انتگرال آمان یا انتگرالی که روی بازه بسته‌ای از توابع گرفته شده، شناخته شده است. به صورت مشابه خواهیم داشت $\widetilde{E}^U_\alpha(\widetilde{X})=\mathrm{E}(\widetilde{X}^U_\alpha)$.

لم ۲. اگر $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی مثلثی باشد آن‌گاه

$$[\widetilde{E}^L_\alpha(\widetilde{X}),\widetilde{\mathrm{E}}^U_\alpha(\widetilde{X})]=[\mathrm{E}(\widetilde{X}^L_\alpha),\mathrm{E}(\widetilde{X}^U_\alpha)]=[\mathrm{E}(\widetilde{X}_{\frac{\alpha}{2}}),\mathrm{E}(\widetilde{X}_{1-\frac{\alpha}{2}})]$$

تساوی دوم از رابطه بین α-شک و α-برش به‌دست آمده که در ذیل تذکر ۳، اشاره شده است. همچنین براساس تعریف ۸ خواهیم داشت، $(\widetilde{E}(\widetilde{X}))_\alpha=\mathrm{E}(\widetilde{X}_\alpha)$.

تعریف ۹. فرض کنید $\widetilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی مثلثی باشد امید ریاضی $\widetilde{X}$ یک عدد فازی مثلثی است و به صورت $\widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{X})=(\mathrm{E}(X^L),\mathrm{E}(X),\mathrm{E}(X^U))_T$ تعریف می‌شود.

لم ۳. اگر $\widetilde{X}_1,\ldots,\widetilde{X}_n$ و $\widetilde{Y}_1,\ldots,\widetilde{Y}_n$ دو دنباله متناهی از متغیرهای تصادفی فازی با میانگین $\widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{X}_i)$

و $\widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{Y_i})$ باشند و a_i و b_i اعداد حقیقی باشند، آن‌گاه

$$\widetilde{\mathrm{E}}(\oplus_{i=1}^{n}((a_i \otimes \widetilde{X}_i) \oplus (b_i \otimes \widetilde{Y}_i))) = \oplus_{i=1}^{n}((a_i \otimes \widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{X}_i)) \oplus (b_i \otimes \widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{Y}_i))).$$

برهان: برای اثبات می‌توان از برابری α-شک و α-برش‌های دو طرف معادله فوق استفاده نمود. بدون اینکه درکلیت مسئله خللی وارد شود می‌توان برای X_1 و Y_1 رابطه را ثابت نمود. اگر $a_1 \geq 0$ و $b_1 \leq 0$ باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned}
(\widetilde{E}(a_1\widetilde{X}_1 \oplus b_1\widetilde{Y}_1))_\alpha &= \mathrm{E}((a_1\widetilde{X}_1)_\alpha + (b_1\widetilde{Y}_1)_\alpha) \\
&= \mathrm{E}(a_1\widetilde{X}_{1\alpha} + b_1\widetilde{Y}_{1(1-\alpha)}) \\
&= a_1(\widetilde{E}(\widetilde{X}_1))_\alpha + b_1(\widetilde{E}(\widetilde{Y}_1))_\alpha.
\end{aligned}$$

و در حالتی که a_1 و b_1 هر دو مثبت یا منفی باشند به حالت مشابه رابطه اثبات می‌شود.

تعریف ۱۰. (راکفلر ، ۱۹۷۰) تابع تکیه‌گاه برای مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}$، به صورت $S_A(x) = \sup\{ax\ a \in A,\ x \in [-1, 1]\}$ تعریف می‌شود.

لم ۴. (دایموند وکلودن ، ۱۹۹۴) اگر A و B دو زیرمجموعه $\mathbb{R}$ باشند آن‌گاه

الف- $A = B$ اگر و تنها اگر $S_A(x) = S_B(x)$.

ب- $S_{\mathrm{E}(\widetilde{X}[\alpha])}(x) = \mathrm{E}(S_{\widetilde{X}[\alpha]}(x))$.

تعریف ۱۱. (دایموند وکلودن ، ۱۹۹۴) برای مجموعه‌های فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ متعلق به $F(\mathbb{R})$، متریک L_2 برای اندازه‌گیری فاصله بین $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ بر فضای $F(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف شده است

$$\triangle(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{\int_0^1 \int_{-1}^{1} (S_{\widetilde{A}[\alpha]}(x) - S_{\widetilde{B}[\alpha]}(x))^2 dx d\alpha}.$$

مقاله پذیرفته شده

تعریف ۱۲. (نسر ، ۲۰۰۶) واریانس متغیر تصادفی فازی $\widetilde{X}$، کواریانس و ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی فازی $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ به ترتیب عباتند از

$$\mathrm{Var}(\widetilde{X}) = \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathrm{Var}(S_{\widetilde{X}[\alpha]}(x))dxd\alpha.$$
$$\mathrm{Cov}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \int_0^1 \int_{-1}^1 Cov(S_{\widetilde{X}[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Y}[\alpha]}(x))dxd\alpha.$$
$$\rho(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \frac{Cov(\widetilde{X},\widetilde{Y})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\widetilde{X})\mathrm{Var}(\widetilde{Y})}}.$$

قضیه ۱. فرض کنید $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ متغیرهای تصادفی فازی باشند، آن‌گاه

الف- اگر a و c اعداد حقیقی و $ac \geq 0$ باشد، $\mathrm{Cov}(a\otimes\widetilde{X}\oplus\widetilde{b}, c\otimes\widetilde{Y}\oplus\widetilde{d}) = ac\mathrm{Cov}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$.

ب- اگر $a \geq 0$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{Var}(a\otimes\widetilde{X}\oplus\widetilde{b}) = a^2\mathrm{Var}(\widetilde{X})$.

ج- اگر $a \geq 0$ و $c \geq 0$ باشند،

$\mathrm{Var}(a\otimes\widetilde{X}\oplus c\otimes\widetilde{Y}) = a^2\mathrm{Var}(\widetilde{X}) + c^2\mathrm{Var}(\widetilde{Y}) + 2ac\mathrm{Cov}(\widetilde{X},\widetilde{Y})$.

د- $\left|\rho(\widetilde{X},\widetilde{Y})\right| \leq 1$.

برهان: اثبات (الف) و (ب) مانند اثبات (ج) هستند و با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز درستی رابطه (د) نیز به سادگی نشان داده می‌شود. برای اثبات (ج)، با توجه به لم ۱ و خواص تابع تکیه‌گاه داریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(a\otimes\widetilde{X}\oplus c\otimes\widetilde{Y}) &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathrm{Var}(S_{(a\otimes\widetilde{X}\oplus c\otimes\widetilde{Y})[\alpha]}(x))dxd\alpha \\
&= a^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathrm{Var}(S_{\widetilde{X}[\alpha]}(x))dxd\alpha \\
&+ c^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathrm{Var}(S_{\widetilde{Y}[\alpha]}(x))dxd\alpha \\
&+ 2ac \int_0^1 \int_{-1}^1 \mathrm{Cov}(S_{\widetilde{X}[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Y}[\alpha]}(x))dxd\alpha \\
&= a^2\mathrm{Var}(\widetilde{X}) + c^2\mathrm{Var}(\widetilde{Y}) + 2ac\mathrm{Cov}(\widetilde{X},\widetilde{Y}).
\end{aligned}$$

۴ مدل سری‌زمانی اتورگرسیو فازی

برای یک سری‌زمانی فازی، مانای ضعیف، تابع اتوکواریانس و تابع خودهمبستگی مرتبه k را با استفاده از تابع تکیه‌گاه تعریف می‌کنیم. در ادامه مدل اتورگرسیو مرتبه p را معرفی نموده و شرایط مانایی بررسی می‌شود همچنین برآورد ضرایب حقیقی با استفاده از توابع اتوکواریانس و خودهمبستگی انجام خواهد شد.

تعریف ۱۳. فرض کنید $\{Z^L(t), t \in T\}$، $\{Z(t), t \in T\}$ و $\{Z^U(t), t \in T\}$ فرآیندهای تصادفی حقیقی مقدار باشند آن‌گاه $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی است که در آن $\widetilde{Z}(t) = (Z^L(t), Z(t), Z^U(t))_T$.

تعریف ۱۴. سری‌زمانی فازی مثلثی $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ را سری‌زمانی مانای ضعیف فازی گویند، هرگاه برای هر $t \in T$، $\widetilde{E}(\widetilde{Z}(t)) = \widetilde{\mu}$ و $\mathrm{Var}(\widetilde{Z}(t)) = \sigma^۲$.

تعریف ۱۵. اگر $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی باشد. تابع اتوکواریانس و تابع خودهمبستگی فرآیند به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(\widetilde{Z}(t), \widetilde{Z}(t-k)) = \int_۰^۱ \int_{-۱}^۱ \mathrm{Cov}(S_{\widetilde{Z}(t)[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Z}(t-k)[\alpha]}(x)) dx d\alpha,$$
$$\rho_k = Corr(\widetilde{Z}(t), \widetilde{Z}(t-k)) = \frac{\mathrm{Cov}(\widetilde{Z}(t), \widetilde{Z}(t-k))}{\sqrt{\mathrm{Var}(\widetilde{Z}(t))\mathrm{Var}(\widetilde{Z}(t-k))}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_۰}.$$

ملاحظه ۴. فرض کنید $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی باشد، آن‌گاه برای هر $t \in Z$، $\gamma_k = \gamma_{-k}$ و $|\rho_k| \leq ۱$.

تعریف ۱۶. فرض کنید $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی باشد آن‌گاه برآورد تابع اتوکواریانس فرآیند به صورت

$$\hat{\gamma}_k = \frac{۱}{T-k} \sum_{i=۱}^{T-k} \int_۰^۱ \int_{-۱}^۱ (S_{\widetilde{Z}(t)[i\alpha]}(x) - S_{\widetilde{\bar{Z}}[\alpha]}(x))(S_{\widetilde{Z}(t)[(i+k)\alpha]}(x) - S_{\widetilde{\bar{Z}}[\alpha]}(x)) dx d\alpha$$

تعریف می‌شود، که در آن $\widetilde{\bar{Z}}[\alpha] = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\widetilde{Z}(t)[\alpha]$، و همچنین برآورد تابع خود همبستگی فرآیند نیز به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\rho}_k = \frac{\frac{1}{T-k}\sum_{i=1}^{T-k}\int_0^1\int_{-1}^{1}(S_{\widetilde{Z}(t)[i\alpha]}(x) - S_{\widetilde{\bar{Z}}[\alpha]}(x))(S_{\widetilde{Z}(t)[(i+k)\alpha]}(x) - S_{\widetilde{\bar{Z}}[\alpha]}(x))dxd\alpha}{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\int_0^1\int_{-1}^{1}(S_{\widetilde{Z}(t)[i\alpha]}(x) - S_{\widetilde{\bar{Z}}[\alpha]}(x))^2 dxd\alpha}$$

می‌دانیم اگر $\gamma_k < \infty$، آن‌گاه طبق قانون قوی اعداد بزرگ برای $T \longrightarrow \infty$، $\hat{\gamma}_k$ به صورت قریب به یقین $(a.s.)$ به γ_k همگرا است.

ملاحظه ۵. فرض کنید $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی باشد، آن‌گاه برای هر $t \in Z$، $\hat{\gamma}_k = \hat{\gamma}_{-k}$ و $|\hat{\rho}_k| \leq 1$.

تعریف ۱۷. فرض کنید $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی باشد مدل سری‌زمانی اتورگرسیو فازی از مرتبه p $(FARTSM(p))$ به صورت

$$\widetilde{Z}(t) = \widetilde{\tau} \oplus (\theta_1 \otimes \widetilde{Z}(t-1)) \oplus (\theta_2 \otimes \widetilde{Z}(t-2)) \oplus \ldots \oplus (\theta_p \otimes \widetilde{Z}(t-p)) \oplus \widetilde{\varepsilon}(t)$$

تعریف می‌شود، که در آن $t = p+1, \ldots, T$ ، $Z(t) = (Z^L(t), Z(t), Z^U(t))_T$، $\widetilde{\varepsilon}(t) = \widetilde{\tau} \oplus \varepsilon(t)$ بطوری که $\varepsilon(t) \sim N(0, \sigma^2)$ و $\widetilde{\tau} = (\tau^L, 0, \tau^U)_T$. ضمنا برای $j = 1, \ldots, p$، θ_j ضرایب حقیقی مقدار نامعلوم هستند که باید برآورد شوند.

باید دقت شود که این مدل به واسطه $\varepsilon(t)$ احتمالی و به واسطه $\widetilde{\tau}$ و $\widetilde{Z}(t)$ امکانی است.

لم ۵. در مدل سری‌زمانی اتورگرسیو فازی از مرتبه p اگر $(1 + \sum_{j=1}^{p}\theta_j) < \infty$ باشد آن‌گاه مدل مانای ضعیف است یا به عبارت دیگر

الف- یک عدد فازی $\widetilde{\lambda}$ وجود دارد به طوری‌که $\widetilde{\mathrm{E}}(\widetilde{Z}(t)) = \widetilde{\lambda}$.

ب- یک عدد $k \in R^+$ وجود دارد به طوری‌که $\mathrm{Var}(\widetilde{Z}(t)) = k$.

برهان: از آنجایی که علامت ضرایب θ_jها ممکن است مثبت یا منفی باشد، رابطه

$$\theta_j B^j \widetilde{Z}_\alpha(t) = \begin{cases} \theta_j \widetilde{Z}_\alpha(t-j) & \theta_j > 0, \\ \theta_j \widetilde{Z}_{1-\alpha}(t-j) & \theta_j < 0, \end{cases}$$

برای $j = 1, \ldots, p$ تعریف می‌شود. بنابراین

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_\alpha(t) &= (\theta_1 \otimes \widetilde{Z}(t-1))_\alpha + \ldots + (\theta_p \otimes \widetilde{Z}(t-p))_\alpha + \widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t) \\ &= \theta_1 B^1 \widetilde{Z}_\alpha(t) + \ldots + \theta_p B^p \widetilde{Z}_\alpha(t) + \widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t) \\ &= (1 - \sum_{j=1}^{p} \theta_j B^j) \widetilde{Z}_\alpha(t) + \widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t) \\ &= (\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{1 - m_j^{-1*} B}) \widetilde{Z}_\alpha(t) + \widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t) \end{aligned}$$

که در آن برای $j = 1, \ldots, p$، $m_j^* = g_j(\theta_1, \ldots, \theta_p)$ ریشه‌های معادله $\sum_{j=1}^{p} \theta_j B^j = 1$ هستند و $a_j = f_j(m_1^*, \ldots, m_p^*)$. بافرض $\left|\frac{1}{m_j^*}\right| < 1$ برای $j = 1, \ldots, p$ و $0 \leq \alpha < 1$ داریم

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widetilde{Z}_\alpha(t)) &= \mathrm{E}(\frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{p} \theta_j B^j} (\widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t))) \\ &= \mathrm{E}(\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{1 - m_j^{-1*} B} (\widetilde{\tau}_\alpha + \varepsilon(t))) \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_j \mathrm{E}(\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{m_j^*})^i \widetilde{\tau}_\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{m_j^*})^i \varepsilon(t-j)) \\ &= \widetilde{\tau}_\alpha \sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{1 - \frac{1}{m_j^*}}. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathrm{E}(\widetilde{Z}(t)) = (\sum_{j=1}^{p} \frac{a_j}{1-\frac{1}{m_j^*}}) \otimes \widetilde{\tau}$ و اثبات (الف) کامل می‌شود. برای اثبات (ب) به طور

مشابه با استفاده از α-شک متغیر تصادفی فازی داریم

$$\mathrm{Var}(\widetilde{Z}_\alpha(t)) = \sum_{j=1}^{p} a_j^2 \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{m_j^*})^i \widetilde{\tau}_\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}(\frac{1}{m_j^*})^i \varepsilon(t-j)) = \sigma^2 \sum_{j=1}^{p}(\frac{a_j}{1-\frac{1}{m_j^*}})^2$$

و ملاحظه می‌شود که $\mathrm{Var}(\widetilde{Z}_\alpha(t))$ به α بستگی نداشته و لذا α-برش‌های آن هم به α بستگی نخواهد داشت و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

لم ۶. فرض کنید $\{\widetilde{Z}(t), t \in T\}$ سری‌زمانی فازی مثلثی از مدل $FARTSM(p)$ باشد، آن‌گاه $\rho_k^p = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \rho_{k-j}^p$.

برهان:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \int_0^1 \int_{-1}^{1} \mathrm{Cov}(S_{\widetilde{Z}(t)[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Z}(t-k)[\alpha]}(x)) dx d\alpha \\
&= \int_0^1 \int_{-1}^{1} \mathrm{Cov}(S_{(\theta_1 \otimes \widetilde{Z}(t-1))[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Z}(t-k)[\alpha]}(x)) dx d\alpha \\
&\quad + \ldots + \int_0^1 \int_{-1}^{1} \mathrm{Cov}(S_{(\theta_p \otimes \widetilde{Z}(t-p))[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Z}(t-k)[\alpha]}(x)) dx d\alpha \\
&\quad + \int_0^1 \int_{-1}^{1} \mathrm{Cov}(S_{\widetilde{\varepsilon}(t)[\alpha]}(x), S_{\widetilde{Z}(t-k)[\alpha]}(x)) dx d\alpha \\
&= \theta_1 \gamma_{k-1} + \theta_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \theta_p \gamma_{k-p}
\end{aligned}$$

و با تقسیم رابطه بالا بر γ_0 اثبات کامل می‌شود.

ملاحظه ۶. با توجه به اینکه $\hat{\rho}_k^p$ یک برآورد سازگار برای ρ_k^p است یعنی $\rho_k^p \xrightarrow{a.s.} \hat{\rho}_k^p$، بنابراین با استفاده از روش برآورد گشتاوری می‌توان پارامترهای مدل $FARTSM(p)$ را به صورت

$$\hat{\rho}_k^p = \sum_{j=1}^{p} \hat{\theta}_j \hat{\rho}_{k-j}^p \qquad k \geq 1,\ j = 1, \ldots, p$$

محاسبه کرد. بنابراین در حالت $p = ۱$ با شرط $|\theta_۱| < ۱$ داریم $\hat{\theta}_۱ = \hat{\rho}_۱$.

پس از محاسبه ضرایب از معادله تذکر ۶، در ادامه برخی از معیارهایی که برای مقایسه دقت پیش‌بینی مدل‌ها برای نیکویی برازش استفاده می‌شود، معرفی می‌شود.

میانگین خطای پیش‌بینی :

$$MFE = \frac{۱}{T-p} \sum_{t=p+۱}^{T} D^۲(\widetilde{\hat{Z}}(t), \widetilde{Z}(t))$$

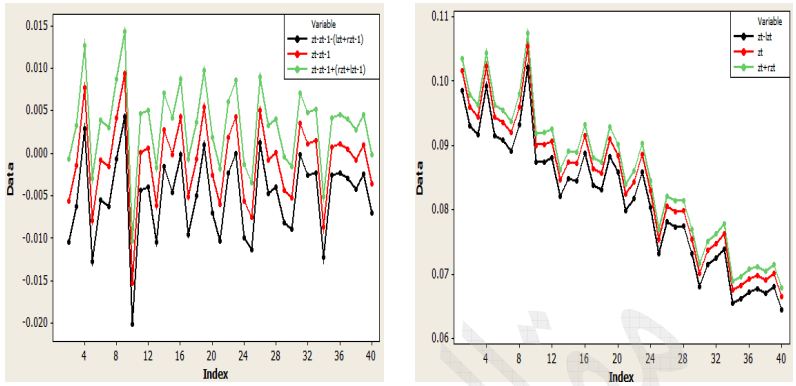
میانگین قدرمطلق مقیاسی خطا :

$$MASE = \frac{۱}{T-p} \sum_{t=p+۱}^{T} \frac{D^۲(\widetilde{\hat{Z}}(t), \widetilde{Z}(t))}{\frac{۱}{T-p} \sum_{s=p+۱}^{T} D^۲(\widetilde{Z}(s), \widetilde{Z}(s-۱))}$$

میانگین اندازه مشابهت :

$$MSM = \frac{۱}{T-p} \sum_{t=p+۱}^{T} \frac{\int \min\left\{(\widetilde{Z}(t))(x), (\widetilde{\hat{Z}}(t))(x)\right\} dx}{\int \max\left\{(\widetilde{Z}(t))(x), (\widetilde{\hat{Z}}(t))(x)\right\} dx}$$

مثال ۱. در این مثال میانگین غلظت سالانه ازون از سال ۱۹۸۰ تا ۲۰۱۹ در نظر گرفته شده است. این داده‌ها از سایت https//www.epa.gov/air-trends/ozone-trends (سایت حفاظت از محیط زیست) گردآوری شده است. غلظت ازون در هر سال را می‌توان به‌صورت داده‌های فازی مثلثی $\widetilde{Z}(t) = (۰/۹۷Z(t), Z(t), ۱/۰۲Z(t))_T$ در نظر گرفت. ابتدا نمودار سری‌زمانی فازی این داده‌ها را رسم نموده تا مانای در میانگین (روند) و مانای در واریانس (پراکندگی) آن را مورد بررسی قرار دهیم. با توجه به شکل ۱ـالف مشاهده می‌شود که داده‌ها دارای نوسانات زیادی نبوده اما می‌توان یک روند نزولی را برای آن متصور شد. با رسم داده‌های تفاضلی شده شکل ۱ـب حاصل شده و نشان می‌دهد که داده‌ها در



(ب) (الف)

شکل ۱: نمودار سری زمانی الف- میانگین غلظت سالانه ازون از سال ۱۹۸۰ تا سال ۲۰۱۹ و ب- یک بار تفاضلی داده‌ها

میانگین و واریانس مانا هستند. مدل اتورگرسیو با یک بار تفاضلی کردن بصورت

$$\Delta\widetilde{Z}(t) = \widetilde{Z}(t) \oplus (\ominus\widetilde{Z}(t-۱)) = \Delta\widetilde{\tau} \oplus (\theta_۱ \otimes \Delta\widetilde{Z}(t-۱)) \oplus \Delta\varepsilon(t)$$

خواهد بود. برای برآورد $\widetilde{Z}(t)$ها دو حالت غیرتفاضلی و تفاضلی را در نظر می‌گیریم.

الف- حالت غیر تفاضلی در این حالت برای $p = ۱$ و $t = ۲, \ldots, T$ داریم

$$\widetilde{\hat{Z}}(t) = \widetilde{\hat{\tau}} \oplus \hat{\theta}_{t-۱}\widetilde{Z}(۱), \quad \widetilde{\hat{\tau}} = \widetilde{\bar{Z}}(۱ - \hat{\theta}_۱), \quad \hat{\theta}_۱ = \hat{\rho}_۱$$

و به همین ترتیب برای پیش‌بینی داریم $\widetilde{\hat{Z}}(T+۱) = \widetilde{\hat{\tau}} \oplus \hat{\theta}_۱\widetilde{Z}(T)$.

ب- حالت تفاضلی در این حالت برای $p = ۱$ و $\Delta\widetilde{Z}(t) = \widetilde{Z}(t) \ominus \widetilde{Z}(t-۱), t = ۲, \ldots, T$ داریم

$$\Delta\widetilde{\hat{Z}}(t) \quad = \quad \Delta\widetilde{\hat{\tau}} \oplus \hat{\theta}_{t-۱}\widetilde{Z}(۱), \quad \Delta\widetilde{\hat{\tau}} = \widetilde{\hat{\tau}} \ominus \widetilde{\hat{\tau}}$$

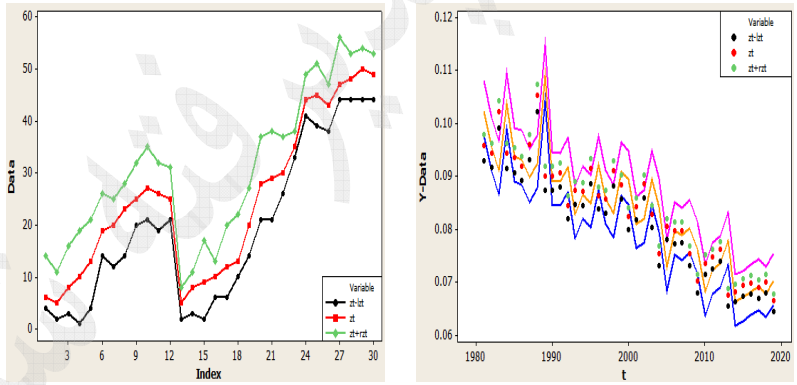
حال برای محاسبه $\widetilde{\hat{Z}}(t)$ با توجه به خاصیت $\ominus_G$ داریم

$$\widetilde{\hat{Z}}(t) \quad = \quad \Delta\widetilde{\hat{\tau}} \oplus \hat{\theta}_۱ \Delta\widetilde{Z}(t-۱) \ominus_G (\ominus\widetilde{Z}(t-۱))$$

و به همین ترتیب برای پیش‌بینی داریم

$$\widetilde{\hat{Z}}(T+۱) \quad = \quad \Delta\widetilde{\hat{\tau}} \oplus \hat{\theta}_۱ \Delta\widetilde{Z}(T) \ominus_G (\ominus\widetilde{Z}(T))$$

برای حالات $p = ۲, ۳, \ldots$ به‌صورت مشابه خواهد بود. در شکل ۲ـالف مقادیر $\widetilde{Z}(t)$ها به صورت نقطه و مقادیر $\widetilde{\hat{Z}}(t)$ها به صورت خط رسم شده‌اند. با توجه به جدول ۱ مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی



(ب) (الف)

شکل ۲: الف– نمودار داده‌ها (نقطه) و مقادیر برآوردها (خط) و ب– نمودار عملکرد نرم افزار در ۳۰ ماه

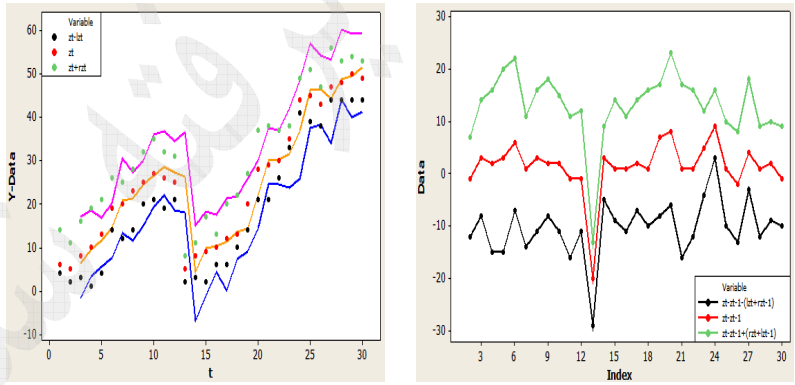
عملکرد بهتری نسبت به مدل دیگر دارد.

مثال ۲. (دورسو و گاستالدی ، ۲۰۰۲) یک تیم ارزیاب ۷ نفره در طول ۳۰ ماه به بررسی عملکرد یک نرم افزار در حال توسعه پرداخته‌اند و در هر گزارش ماهانه یک عدد فازی ارائه کرده‌اند. با توجه به شکل

جدول ۱: مقایسه نتایج مدل با سایر مدل‌ها

مدل	MFE	$MASE$	MSM
مدل پیشنهادی با یک بار تفاضلی $(p=۱)$ $\hat{\theta}_۱ = -۰/۳۴۱۲$ $\triangle\widetilde{\hat{\tau}} = (-۰/۰۰۰۹; ۰/۰۰۴۲, ۰/۰۰۴۲)$	۳/۸۲۴۵	۰/۹۷۵	۰/۵۸۹
مدل پیشنهادی با یک بار تفاضلی $(p=۲)$ $\hat{\theta}_۱ = -۰/۴۲۵ \quad \hat{\theta}_۲ = -۰/۴۴۲۷$ $\triangle\widetilde{\hat{\tau}} = (-۰/۰۰۰۵; ۰/۰۰۳۱, ۰/۰۰۳۲)$	۴/۱۲۳	۱/۰۰۱۵	۰/۵۷۶
حسامیان و اکبری (۲۰۲۲)	۴/۱۵۸	۱/۰۰۱۳	۰/۵۸۴
حسامیان و اکبری (۲۰۱۸)	۴/۷۰۰	۱/۵۲۴	۰/۵۲۷

۲ـالف مشاهده می‌شود که داده‌ها در میانگین مانا نیستند. با یک بار تفاضلی کردن داده‌ها شکل ۲ـب حاصل می‌شود که مشاهده می‌شود سری‌زمانی در میانگین و واریانس مانا است. در شکل ۳ـالف مقادیر



(ب) (الف)

شکل ۳: الف- سری‌زمانی داده‌های تفاضلی‌شده ، ب- نمودار داده‌ها (نقطه) و مقادیر برآوردها (خط)

داده‌ها در مقابل مقادیر برآوردها رسم شده است. با توجه به جدول ۲ مشاهده می‌شود که مدل پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به مدل دیگر دارد.

جدول ۲: مقایسه نتایج مدل با سایر مدل‌ها

مدل	MFE	$MASE$	MSM
مدل پیشنهادی با یک بار تفاضلی ($p = ۱$) $\hat{\theta}_۱ = ۰/۰۹۹۵$ $\triangle\widetilde{\hat{\tau}} = (۱/۴۸۳; ۱۱/۴۸۳, ۱۱/۵۵۲)$	۶/۴۲۸	۳/۲۹۸	۰/۴۷۳
مدل پیشنهادی با یک بار تفاضلی ($p = ۲$) $\hat{\theta}_۱ = ۰/۰۹۹۹$ $\hat{\theta}_۲ = ۰/۰۳۰۷$ $\triangle\widetilde{\hat{\tau}} = (۰/۸۵۲; ۱/۴۸۳, ۱۱/۵۵۲)$	۴/۱۲۳	۱/۰۰۱۵	۰/۵۷۶
حسامیان و اکبری (۲۰۲۲)	۶/۱۴۰	۳/۶۵۸	۰/۴۵۲
حسامیان و اکبری (۲۰۱۸)	۷/۳۸۴	۴/۲۰۱۳	۰/۳۷۲۹

بحث و نتیجه‌گیری

اصل سری‌های زمانی براساس همبستگی‌های بین مشاهدات است و ضرایب مدل با توجه به این همبستگی‌ها به دست می‌آیند در مقالات گذشته مربوط به سری‌های زمانی فازی، برای برآورد ضرایب مدل، به همبستگی بین مشاهدات توجهی نشده و از روش‌های فازی، ناپارامتری، بردار پشتیبان و غیره استفاده شده است ما در این مقاله به معرفی مدل اتورگرسیو فازی بر مبنای مفهوم تابع تکیه‌گاه پرداخته‌ایم و برای برآورد ضرایب از همبستگی بین مشاهدات استفاده کرده‌ایم و مدل را برازش داده‌ایم و مدل برازش شده در مقایسه با مدل‌های دیگر عملکرد بهتری دارد البته ممکن است روش‌های دیگری باشند که عملکرد بهتری نسبت به این مدل داشته باشند اما مزیت این مدل نسبت به سایر مدل‌ها این است که باتوجه به همبستگی بین مشاهدات، به برآورد ضرایب می‌پردازد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله کمال قدردانی و تشکر را از پیشنهادات ارزنده داوران، سردبیر و ویراستار محترم مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، دارند.

مراجع

طاهری، س.، اکبری، م. و حسامیان، غ. (۱۴۰۲)، مدل‌سازی میانگین متحرک براساس $\alpha-$شک متغیرهای تصادفی فازی، مجله علوم آماری، **۱۸**(۱).

Chen, S. (1996), Forecasting Enrollments Based on Fuzzy Time Series, *Fuzzy Sets and Systems*, **81**, 311–319.

Cheng, C. H., Chen, T. L., Teoh, H.J., and Chiang, C. H. (2008), Fuzzy Time-Series Based on Adaptive Expectation Model for TAIEX Forecasting, *Expert Systems with Applications*, **34**, 1126-1132.

Cheng, S. H., Chen, S.M., and Jian W.S. (2016), Fuzzy Time Series Forecasting Based on Fuzzy Logical Relationships and Similarity Measures, *Information Sciences*, **327**, 272-287.

Diamond, P. and Kloeden, P. (1994), *Metric Spaces of Fuzzy Sets Theory and Applications*, World Scientific.

D'Urso, P. and Gastaldi, T. (2002), An Orderwise Polynomial Regression Procedure for Fuzzy Data, *Fuzzy Sets and Systems*, **130**, 1-19.

Hesamian, G., and Akbari, M. G. (2018), A Semi-Parametric Model for Time Series Based on Fuzzy Data, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **26**, 2953-2666.

Hesamian, G., and Akbari, M. G. (2022), A Fuzzy Quantile Method for AR Time Series Model Based on Triangular Fuzzy Random Variables, *Computational and Applied Mathematics*, **41**(123), https//doi.org/10.1007/s40314-022-01826-1.

Hesamian, G. R., and Chachi, J. (2015), Two-Sample Kolmogorov–Smirnov Fuzzy Test for Fuzzy Random Variables, *Statistical Papers*, **56**, 61–82.

Hesamian, G., Torkian, F. and Yarmohammadi, M. (2022), A Fuzzy non-Parametric Time Series Model Based on Fuzzy Data, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **19**, 61-72.

Hong, D. (2005), A Note on Fuzzy Time-Series Model, *Fuzzy Sets and Systems*, **155**, 309–316.

Huarng, K. (2001), Effective Lengths of Intervals to Improve Forecasting in Fuzzy Time Series, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**, 387-394.

Jilani, T. A. and Burney, S. M. A. and Ardil, C. (2007), Multivariate High Order Fuzzy Time Series Forecasting for Car Road Accidents, *International Journal of Computational Intelligence*, **4**, 15-20.

Kwakernaak, H. (1978), Fuzzy Random Variables-I. Definition and Theorem, *Information Sciences*, **15**, 1-29.

Näther. W. (2006), Regression with Fuzzy Random Data, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 235–252.

Puri, M. L., and Ralescu, D. A. (1986), Fuzzy Random Variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409-422.

Rockafellar, R. T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press.

Ruey, C.T. (2005), Fuzzy Relation Analysis in Fuzzy Time Series Model, *Computers and Mathematics with Applications*, **49**, 539-548.

Song, Q., and Chissom, B. S. (1993), Fuzzy Time Series and Its Models, *Fuzzy Sets and Systems*, **54**, 269-277.

Song, Q., and Leland, R. P., and Chissom, B. S. (1995), A New Fuzzy Time-Series Model of Fuzzy Number Observations, *Fuzzy Sets and Systems*, **73**, 341–348.

Wu, H. C. (1999), The Central Limit Theorems for Fuzzy Random Variables, *Information Sciences*, **120**, 239-256.

Zarei, R., Akbari, M. G., and Chachi, J. (2020), Modeling Autoregressive Fuzzy Time Series Data Based on Semi-Parametric Methods, *Soft Computing*, **24**, 7295–7304.

مقاله پذیرفته شده

Autoregressive Modeling Based on the Support Function of Fuzzy Random Variables

Mohammadi[1], H., Akbari, M.GH.[1],Hesamian, GH.[2]

[1]Department of Statistics, Birjand University, Birjand, Iran.

[2]Department of Statistics, Payame Noor University of Tehran, Tehran, Iran.

Abstract First, this article defines a meter between fuzzy numbers using the support function. Then, based on the support function, the concepts of variance, covariance, and correlation coefficient between fuzzy random variables are expressed, and their properties are investigated. Then, using the above concepts, the p-order fuzzy autoregressive model is introduced based on fuzzy random variables, and its properties are investigated. Finally, to explain the problem further, examples will be presented and compared with similar models using some goodness of fit criteria.

Keywords Support function,Fuzzy random variable, Fuzzy autoregressive.

Mathematics Subject Classification (2010) 62J07, 62J07.