مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۹
جلد ۴، شماره ۲، ص ۲۵۳-۲۶۷

معرفی یک شرط لازم در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های دو سطحی

هاله نکوئی، هوشنگ طالبی
گروه آمار، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۶/۱۰ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۸۹/۱۱/۱۵

چکیده : دو طرح هم‌ارز هستند هرگاه یک طرح با نامگذاری مجدد عامل‌ها، جایگشت در مرتبهٔ اجرای ترکیبات تیماری یا برچسب‌گذاری مجدد سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به‌دست آید. مسئله تشخیص هم‌ارزی دو طرح با N اجرا و k عامل دو سطحی، هنگامی که N و k افزایش یابد، بسیار پیچیده و تقریباً ناممکن خواهد بود. از این رو، وجود شرط لازمی که قادر به تشخیص و جداسازی حداکثری طرح‌های غیرهم‌ارز در مدت زمان کوتاه‌تر باشد به شدت احساس می‌شود. اکثر شرط‌های لازم موجود در ادبیات موضوع دو هدف جداسازی حداکثری در زمان کوتاه‌تر را به صورت هم‌زمان برآورده نمی‌سازند. در این مقاله روش جدیدی برای تشخیص غیر هم‌ارزی دو طرح طراحی و ارائه شده که براساس انتخاب و مقایسه یک یا چند سطر از ماتریس طرح است. این روش نسبت به سایر روش‌ها به طور نسبی از قابلیت جداسازی بالاتر و سرعت بیشتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی : طرح‌های عاملی دو سطحی، طرح‌های ناهم‌ارز، شرط‌های لازم هم‌ارزی

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هوشنگ طالبی، h-talebi@sci.ui.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲K۱۵

۱ مقدمه

گاهی آزمایشگر برای اجرای یک طرح، در صنعت یا آزمایشگاه، با محدودیت‌هایی مواجه است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به قابل اجرا نبودن یا هزینه‌های گزاف برخی ترکیبات تیماری طرح یا تأثیر بیش از حد متغیرهای اغتشاش بر اجراها اشاره کرد. در چنین مواردی لازم است طرحی هم‌ارز با طرح قبلی پیشنهاد شود تا علاوه بر حفظ ویژگی‌های طرح قبلی تمام ترکیبات تیماری طرح پیشنهادی قابل اجرا باشد و موجب کاهش هزینه‌ها و همچنین پراکندگی مؤثر بر اجراهای طرح گردد. از این رو، شناسایی و تشخیص طرح‌های هم‌ارز امری ضروری است.

دو طرح با تعداد عامل‌ها، اجراها و سطوح یکسان هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه طرحی با تغییر در نام عوامل، مرتبهٔ اجرای ترکیبات تیماری یا تغییر در سطوح یک یا چند عامل از طرح دیگر به دست آید. به عنوان مثال سان و همکاران (۲۰۰۲) نشان دادند که طرح‌های پلاکت-برمن که بر روی چهار ستون تصویر شده باشند یک کلاس شامل ۳۳۰ طرح هم‌ارز را تشکیل می‌دهند که با تغییر عوامل، مرتبه اجرای ترکیبات تیماری یا تغییر در سطوح یک یا چند عامل طرح دیگری از طرح‌های پلاکت- برمن تصویر شده بر روی چهار عامل، به دست می‌آید.

با توجه به ضرورت تشخیص طرح‌های هم‌ارز، نیاز به روش‌هایی که این طرح‌ها را شناسایی کنند، احساس می‌شود. اولین روش، روش مستقیم است که با استفاده از تعریف به آن پرداخته می‌شود. برای تشخیص دو طرح با N اجرا و k عامل که در s سطح تغییر می‌کنند، تعداد $N!k!(s!)^k$ جایگشت ممکن برای تشخیص هم‌ارزی یا عدم هم‌ارزی دو طرح وجود خواهد داشت که در این حالت تمام آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این روش با وجود این‌که هم‌ارزی دو طرح به صورت قطعی تشخیص داده می‌شود ولی در حالتی که تعداد اجراها و عوامل موجود در طرح افزایش یابد سرعت تشخیص بسیار کُند شده و استفاده از این روش را تقریباً غیر ممکن می‌کند. بنابراین، با توجه به محاسبات طولانی و زمان‌بر بودن روش مستقیم، محققان زیادی در سال‌های گذشته به دنبال شرط‌های لازم و کافی، برای تشخیص هم‌ارزی دو طرح بودند. در این میان کلارک و دین (۲۰۰۱)، چنگ و یه (۲۰۰۴) و

در راستای تحقیقات کلارک و دین و کوتاه کردن روش آن‌ها، کاتسونیس و دین (۲۰۰۸) در حالت کلی توانستند سه شرط لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی دو طرح ارائه دهند.

شرط‌های لازم و کافی با رویکرد جستجوی سطرها، ستون‌ها و علامت سطوح برای تبدیل طرحی به طرح هم‌ارز دیگری در تشخیص هم‌ارزی دو طرح بسیار کُند عمل می‌کنند. علی‌رغم تلاش صورت گرفته برای کاهش محاسبات تعیین هم‌ارزی یا عدم هم‌ارزی حتی برای روزها زمان‌بر است. در این حالت ممکن است نتیجه تشخیص، غیرهم‌ارز بودن دو طرح باشد که در این صورت محاسبات زمان‌بر انجام شده برای تشخیص هم‌ارزی اضافه به نظر می‌رسد. از این رو برای صرفه جویی در زمان محاسبات، تنها استفاده از شرط‌های لازم در ابتدا برای جداسازی رده‌ای از طرح‌های غیرهم‌ارز ضروری است.

توجه شود که شرط‌های لازم تنها عدم هم‌ارزی دو طرح را تشخیص می‌دهند. بسیاری از محققان تلاش کرده‌اند شرط‌های لازمی ارائه دهند که به صورت همزمان به دو هدف زیر دست یابند. اول این که توانایی تشخیص و جداسازی تعداد رده‌ها از طرح‌های غیرهم‌ارز تا حد امکان بیشینه شود و دوم این‌که بتواند زمان محاسبات را کمینه کند. در این مقاله با ارائه شرط لازم جدید هدف کمینه کردن زمان ممکن حاصل شده‌است. همچنین این روش به طور نسبی حداکثر جداسازی میان طرح‌های ناهم‌ارز را انجام می‌دهد.

بخش‌های این مقاله به این ترتیب تنظیم شده‌اند که در بخش ۲ سه شرط لازم و پرکاربرد در تعیین عدم هم‌ارزی دو طرح معرفی شده‌اند. در بخش ۳ روش جدید برای تشخیص عدم هم‌ارزی معرفی شده و ثابت می‌شود این روش یک شرط لازم در تعیین طرح‌های غیرهم‌ارز است. سپس کاربرد عملی و محاسباتی آن در تشخیص عدم هم‌ارزی طرح‌ها بیان می‌شود. در بخش ۴ نشان داده می‌شود روش جدید، علاوه بر این‌که قادر به تشخیص عدم هم‌ارزی طرح‌هایی است که روش‌های قبلی آن‌ها را جدا نمی‌ساختند، بلکه با محاسبات سریع‌تر نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۲ شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی

روش‌های متفاوتی برای تشخیص عدم هم‌ارزی دو طرح وجود دارد. در این بخش به معرفی مختصری از سه روش فاصله همینگ (کلارک و دین، ۲۰۰۱)، تصویر انحراف گشتاوری (زو، ۲۰۰۳) و وزن همینگ (کاتسونیس و دین، ۲۰۰۸) اکتفا می‌شود.

روش فاصله همینگ: کلارک و دین (۲۰۰۱) اولین شرط لازم و کافی در تشخیص هم‌ارزی دو طرح عاملی در حالت کلی را با تعریف و مقایسه ماتریس فاصله همینگ در تمام ابعاد ارائه دادند. منظور از فاصله همینگ این است که هر عنصر (i,j) از ماتریس فاصله همینگ تعداد ستون‌های ماتریس طرح که دارای سطح‌های متفاوت در سطر i و j هستند را می‌شمارد. کلارک و دین ثابت کردند در صورتی که دو طرح D_1 و D_2 هم‌ارز باشند آنگاه دو ماتریس فاصله همینگ به دست آمده از این دو طرح نیز هم‌ارز هستند و با جایگشت در اجراها و ستون‌ها ماتریس فاصله همینگ طرح دوم به دست می‌آید. بنابراین دو ماتریس فاصله همینگ از دو طرح هم‌ارز باید دارای مقدار عناصر یکسان و با تعداد تکرارهای مشابه باشند. از این رو اگر دو ماتریس فاصله همینگ از دو طرح دارای عناصر یکسانی نبودند یا تعداد تکرار عناصر آن‌ها با هم برابر نباشند، دو طرح غیر هم‌ارز تشخیص داده می‌شوند. براساس نتیجه بالا کلارک و دین برنامه دِسِک [1] را به زبان برنامه‌نویسی فُرترن برای تشخیص عدم هم‌ارزی طرح‌ها ارائه دادند.

روش تصویر انحراف گشتاوری: زو (۲۰۰۳) ملاک p–اُمین گشتاور توانی طرح D، $k_p(D)$ را برای دسته‌بندی طرح‌های نامنظم معرفی و پس از بیان رابطه آن با فاصله همینگ از آن برای تشخیص سریع عدم هم‌ارزی در طرح‌ها استفاده کردند.

$$k_p(D) = \sum_{\ell=0}^{k} (k-\ell)^p E_\ell(D), \quad p \in N$$

که در آن k تعداد عامل‌ها و E_ℓ تعداد جفت سطرهایی از طرح با فاصله همینگ ℓ را نشان می‌دهد. در صورتی که برای دو طرح، p–اُمین گشتاور توانی برای هر p

[1] Deseq1

دلخواه یکسان نباشد می‌توان نتیجه گرفت که دو طرح نمی‌توانند هم‌ارز باشند. با استفاده از این روش زو (۲۰۰۳) الگوریتم مام-یو[۲] را برای تشخیص عدم هم‌ارزی دو طرح ارائه کرد.

روش تصویر وزن همینگ : کاتسونیس و دین (۲۰۰۸) براساس تعریف وزن فاصله همینگ که تعداد یک‌ها در هر سطر را می‌شمارد به عنوان معیاری برای تشخیص عدم‌هم‌ارزی استفاده کرد. سپس تعداد سطرهای ماتریس طرح که دارای وزن همینگ فرد هستند را با $n_O(D)$ و سطرهای دارای وزن همینگ زوج را با $n_E(D)$ نشان داد. براین اساس کاتسونیس و دین یک شرط لازم برای تشخیص هم‌ارزی ارائه و اثبات کردند که اگر دو طرح هم‌ارز باشند دارای مقادیر یکسانی از توزیع فراوانی مجموعه $\{n_E, n_O\}$ هستند. براساس این شرط، کاتسونیس الگوریتمی به نام دبلیو-تی[۳] طراحی کرد.

۳ شرط لازم جدید

در این بخش یک شرط لازم جدید برای تشخیص ناهم‌ارزی دو طرح ارائه می‌شود. ابتدا ملاکی جدید برای تشخیص غیرهم‌ارزی ارائه و ثابت می‌شود این ملاک یک شرط لازم برای تشخیص ناهم‌ارزی است. قضیه‌ای که در این بخش ارائه می‌شود روند محاسبات تعیین عدم‌هم‌ارزی را کوتاه‌تر و سرعت تشخیص را افزایش می‌دهد.

طرح D با N اجرا و k عامل دو سطحی با ماتریس طرح $N \times k$، T_D را در نظر بگیرید. سطرهای ماتریس طرح D را به صورت $\{x_{\ell 1}, \ldots, x_{\ell k}\}$، $\ell = 1, \ldots, N$ نمایش داده به طوری که $x_{\ell i}$ ها، $i = 1, \ldots, k$ با مقادیر ۱+ و ۱-، سطح عامل i در اجرای ℓ را نشان می‌دهند.

براساس ماتریس طرح T_D ماتریس $T_D^t T_D$، یک ماتریس $k \times k$ با درایهٔ (i, j) به صورت زیر است:

$$[T_D^t T_D]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{k} x_{\ell i} x_{\ell j}.$$

---

۲ mom^u

۳ wt

ماتریس $T_D^t T_D$ در برابر جایگشت سطرهای ماتریس طرح T_D پایا است، یا به عبارت دیگر اگر موقعیت مکانی اجراهای ماتریس T_D تغییر داده شود، ماتریس $T_D^t T_D$ بدون تغییر باقی می‌ماند.

در این مقاله از ماتریس $T_D^t T_D$ و ویژگی‌های آن برای ارائه شرط لازم جدید در تشخیص هم‌ارزی طرح‌های عاملی دو سطحی استفاده می‌شود.

قضیه ۱ : اگر دو طرح $N \times k$، D_1 و D_2 هم ارز باشند. آنگاه یک ماتریس جایگشت ستونی $k \times k$، C و یک جایگشت سطری $\{r_1, \ldots, r_\ell\}$ از $\{1, \ldots, \ell\}$ وجود دارد، به صورتی که به‌ازای $\ell = 1, \ldots, N$

$$T_{D_1}^{t\{1,\ldots,\ell\}} T_{D_1}^{\{1,\ldots,\ell\}} = C^t (T_{D_2}^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}} T_{D_2}^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}}) C \qquad (1)$$

در این حالت $T_D^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}}$ ماتریس متناظر با سطرهای $\{r_1, \ldots, r_\ell\}$ از ماتریس طرح T_D و $T_D^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}}$ ترانهادهٔ آن است.

برهان : برای اثبات شرط لازم فرض کنید دو طرح D_1 و D_2 هم ارز هستند. بنابراین اگر ماتریس‌های جایگشت سطری و ستونی و ماتریس مربوط به تغییر علامت‌های سطوح در یکی از ماتریس‌ها ضرب شود ماتریس دیگر حاصل می‌شود. در این حالت بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که نمادهای سطوح عوامل دو طرح D_1 و D_2 یکسان هستند. بنابراین

$$T_{D_1} = R T_{D_2} C,$$

که در آن R ماتریس جایگشت سطری متناظر با جایگشت $\{r_1, \ldots, r_\ell\}$ است که جایگاه اجراهای طرح D_2 را به طرح D_1 برمی‌گرداند و C ماتریس جایگشت ستونی است که عوامل طرح D_2 را شبیه عوامل طرح D_1 می‌سازد.

از این رو برای هر $\ell = 1, \ldots, N$

$$x_{\ell i} x_{\ell j} = [T_{D_1}^{t\{\ell\}} T_{D_1}^{\{\ell\}}]_{i,j} \quad = \quad [C^t (T_{D_2}^{t\{\ell\}} R^t R T_{D_2}^{\{\ell\}}) C]_{i,j}$$

$$
\begin{aligned}
&= [T_{D_2}^{t\{r_\ell\}} T_{D_2}^{\{r_\ell\}}]_{c_i,c_j} \\
&= x_{r_i c_q} x_{r_j c_q}
\end{aligned}
$$

از طرفی می‌توان نشان داد که یک دنباله ثابت از ماتریس‌های $C^t(T_D^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}} T_D^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}})C$ برای $\ell = 1,\ldots,N$ ، دنباله ثابت از ماتریس‌های $C^t(T_D^{t\{r_\ell\}} T_D^{\{r_\ell\}})C$ را نتیجه می‌دهد. در صورتی که قرار داده شود $W^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}} = T_D^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}}C$، داریم:

$$
\begin{aligned}
[C^t(T_D^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}} T_D^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}})C]_{i,j} &= [W^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}} W^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}}]_{i,j} \\
&= \sum_{m=1}^{\ell-1} w_{r_m i} w_{r_m j} + w_{r_\ell i} w_{r_\ell j} \\
&= [W^{t\{r_1,r_2,\ldots,r_{\ell-1}\}} W^{\{r_1,r_2,\ldots,r_{\ell-1}\}}]_{i,j} \\
&+ [W^{t\{r_\ell\}} W^{\{r_\ell\}}]_{i,j} \\
&= [C^t(T_D^{t\{r_1,\ldots,r_{\ell-1}\}} T_D^{\{r_1,\ldots,r_{\ell-1}\}})C]_{i,j} \\
&+ [C^t(T_D^{t\{r_\ell\}} T_D^{\{r_\ell\}})C]_{i,j}
\end{aligned}
$$

در نتیجه برای اثبات شرط لازم این قضیه از این واقعیت استفاده می‌شود که برای هر $\ell = 1,\ldots,N$

$$
\begin{aligned}
T_{D_1}^{t\{1,\ldots,\ell\}} T_{D_1}^{\{1,\ldots,\ell\}} &= \sum_{m=1}^{\ell} T_{D_1}^{t\{m\}} T_{D_1}^{\{m\}}, \\
&= \sum_{m=1}^{\ell} C^t(T_{D_2}^{t\{r_m\}} T_{D_2}^{\{r_m\}})C \\
&= C^t(T_{D_2}^{t\{r_1,\ldots,r_\ell\}} T_{D_2}^{\{r_1,\ldots,r_\ell\}})C
\end{aligned}
$$

و اثبات شرط لازم تمام می‌شود.

در قضیه ۱ ثابت شد که اگر ماتریس $T_D^t T_D$ به ازای هر ℓ سطر برای دو طرح تشکیل داده شود، در صورتی که دو طرح هم‌ارز باشند صرف نظر از جایگشت نمادهای درون ستون‌ها، می‌توان یک جایگشت سطری و یک جایگشت ستونی یافت که ماتریس $T_D^t T_D$ از یک طرح به طرح دیگر تبدیل شود. بنابراین اگر دو

ماتریس $T_D^t T_D$ حاصل از دو طرح دارای عناصر مشابه با تعداد تکرارهای یکسان نباشند دو طرح هم‌ارز نیستند. بنابراین از ملاک پیشنهادی می‌توان برای تشخیص غیر هم‌ارزی دو طرح استفاده نمود.

ربن‌امز ی‌مک رطس رهـ ی‌ازا ـه‌ب $T_D^t T_D$ س‌یر.تام ی‌سر ربـ ،ن‌اسآ ت‌ا‌بساحم م‌غری‌لاع
راربقرب)۱(ـه‌طبار ـدیاب‌ح رط‌س‌یر.تام زا رطس رهـ ی‌ارب ـه‌ک‌ت‌سا الدیپ ۱ ـه‌یضق زا .ت‌سا
ـه‌سیاقم ا‌ب‌ا‌مهنت ـه‌ک دوشی‌م ـت‌باثت‌ا‌بساحم ـدنور و ن‌امز ش‌ها‌ک ی‌ارب ن‌یا‌ربانب .ـدشاب
ن‌یا ـه‌ب .داد ص‌یخشت‌ار ح‌رط ود ی‌زرام‌هـ م‌دع ن‌او.تی‌م س‌یر.تام ود رهـ زا رطس ک‌ی‌ب
.ـدبایی‌م ش‌ها‌ک ی‌زرام‌ها‌ن ص‌یخشت ن‌امز ب‌یترت

فرع ۱ : اگر دو طرح $N \times k$، D_1 و D_2 هم ارز باشند. آنگاه یک ماتریس جایگشت ستونی $k \times k$، C و یک جایگشت سطری $\{r_1, \ldots, r_\ell\}$ از $\{1, \ldots, \ell\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $\ell = 1, \ldots, N$ داریم:

$$T_{D_1}^{t\{\ell\}} T_{D_1}^{\{\ell\}} = C^t (T_{D_2}^{t\{r_\ell\}} T_{D_2}^{\{r_\ell\}}) C \qquad (2)$$

که در آن $T_D^{\{r_\ell\}}$ بردار متناظر با سطر ℓ از طرح D است.

برهان : با توجه به تساوی

$$\begin{aligned} [C^t (T_D^{t\{r_1,\ldots,r_l\}} T_D^{\{r_1,\ldots,r_l\}}) C]_{i,j} &= [C^t (T_D^{t\{r_1,\ldots,r_{l-1}\}} T_D^{\{r_1,\ldots,r_{l-1}\}}) C]_{i,j} \\ &+ [C^t (T_D^{t\{r_l\}} T_D^{\{r_l\}}) C]_{i,j} \end{aligned}$$

و قضیه ۱، رابطهٔ (۲) به راحتی اثبات می‌شود.

این روش تشخیص عدم هم‌ارزی بسیار سریع و در زمان کوتاه‌تری نسبت به بررسی برقراری شرط در قضیه ۱، در حالت کلی از طرح‌های دو سطحی، قابل اجرا است. اما در برخی از طرح‌ها این روش قادر به تشخیص عدم هم‌ارزی دو طرح در مراحل اولیه بررسی نیست. در صورت نیاز به استفاده از شرط قوی‌تر می‌توان از روش مطرح شده در قضیه ۱ استفاده کرد و برای هر ℓ سطر از طرح، ماتریس $T_D^t T_D$ را تشکیل و مورد مقایسه قرار داد. در صورتی که مقدار درایه‌ها و تعداد تکرار آن‌ها برای دو طرح متفاوت باشد، روش بیان شده در فرع ۱ می‌تواند بسیار سریع‌تر از روش‌های بخش ۲ عدم هم‌ارزی در دو طرح عاملی دو سطحی را تشخیص دهد.

مقایسه روش جدید با روش‌های موجود در بخش ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد. واضح است در حالتی که مقدار درایه‌ها و تعداد تکرار آن‌ها برای دو طرح برابر باشد، باید از شرط‌های لازم و کافی موجود برای تشخیص کامل‌تر استفاده کرد.

۴ ارزیابی و مقایسه روش‌های تشخیص هم‌ارزی

علاوه بر روش‌های مطرح شده در بخش ۲، لین و همکاران (۱۹۹۳) برای تشخیص عدم هم‌ارزی در طرح‌های هادامارد دو سطحی، چهار الگوریتم ۴آر-پروف[۴]، ۸آر-پروف[۵]، جن-۴آر[۶] و اِکست-۴آر[۷] را معرفی کردند. کاتسونیس و دین (۲۰۰۸) علاوه بر روش وزن همینگ دبلیو-تی در راستای شرط لازم و کافی کلارک و دین (که با الگوریتم دِسِک۲[۸] شناخته می‌شود) تنها با محدود کردن روند محاسباتی الگوریتم دِسِک۳[۹] را معرفی کردند. ما و همکاران (۲۰۰۱) از توان دوم اختلاف $L_۲$ مرکزی شده، که ملاکی در اندازه‌گیری طرح‌های یکنواخت است برای تعیین طرح‌های غیر هم‌ارز استفاده و الگوریتم سی-دی-۲[۱۰] را پیشنهاد دادند. از دیگر شرط‌های لازم و کافی برای تشخیص هم‌ارزی می‌توان به روش چنگ و یه (۲۰۰۴) اشاره نمود، که با استفاده از تابع نشانگر ارائه شده و با نام ایندیک[۱۱] نمایش داده می‌شود. شرط لازم این الگوریتم را با سی-اف-وی-پی[۱۲] و سی-اف-وی۴[۱۳] نشان می‌دهند. تانگ و دنگ (۱۹۹۹) و همچنین زو و دنگ (۲۰۰۴) توزیع مقادیر K_p در بُعد q را به عنوان ملاکی در تشخیص عدم هم‌ارزی معرفی کردند که با توجه به طولانی بودن این روش تنها سومین و چهارمین گشتاور توانی ملاکی برای مقایسه

---

۴ $۴R-prof$
۵ $۸R-prof$
۶ $gen-۴r$
۷ $ext-۴r$
۸ $Deseq۲$
۹ $Deseq۳$
۱۰ $CD_۲^۲$
۱۱ $Indic$
۱۲ CFV_p
۱۳ $CFV_۴$

تعیین شد که این الگوریتم تشخیص هم‌ارزی را مام-پی[۱۴] نامیدند.

کاتسونیس در رساله دکتری خود با ارائه شرط لازم وزن همینگ، این روش را برای چند طرح که تشخیص هم ارزی یا عدم هم ارزی آن‌ها بسیار مشکل است با مابقی روش‌های موجود مورد مقایسه قرار داد. در این‌جا از مقایسه‌های کاتسونیس برای چند طرح خاص استفاده نموده و به مقایسه روش جدید معرفی شده در بخش ۳، با روش‌های دیگر پرداخته می‌شود. برنامه محاسبات در محیط R نوشته و اجرا شده است.

جدول ۱: دو طرح dfa80 و dfa82

dfa82									dfa80								
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱

ابتدا به مقایسه دو طرح dfa80 و dfa82 پرداخته می‌شود. کاتسونیس طرح dfa80 را به وسیلهٔ یک جستجوی رایانه‌ای با استفاده از طرح doe6 به عنوان یک طرح جزئی تولید کرد. طرح doe6 تصویر ماتریس هادامارد $had.$ ۱۶.۲ است که از وب سایت $http://www.research.att.com/njas$ قابل دریافت است. در جدول ۱

[۱۴] mom^p

طرح dfa80 به صورت کامل آمده است. طرح دوم که کاتسونیس آن را با dfa82 نشان داده است، طرحی است که از تصویر آرایه متعامد $OA(۱۶, ۱۵, ۲, ۲, ۴)$ (این طرح نیز در وب سایت $http://www.research.att.com/njas$ قابل دریافت است.) بر روی ستون‌های $(۱, ۳, ۵, ۶, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۵)$ به‌دست آمده است. طرح dfa82 نیز در جدول ۱ به صورت کامل آمده است.

جدول ۲: زمان و نرخ تشخیص عدم هم ارزی دو طرح dfa80 و dfa82 (برحسب ثانیه)

روش	نرخ تشخیص	کمترین زمان	بیشترین زمان
$Deseq۲$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۳
$Indic$	۱۰۰	> ۶۰	> ۶۰
$Deseq۱$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۴
$Deseq۳$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۴
$CD_۲^۲$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۳
mom^u	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۱۱
mom^p	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۳
$۴R-prof$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۶
$۸R-prof$	۱۰۰	۰/۰۴	۰/۰۵
$Gen-۴R$	۱۰۰	۰/۰۲	۰/۳
$Ext-۴R$	۱۰۰	۰/۰۲	۰/۰۴
CFV_p	۱۰۰	۰/۰۲	۰/۰۲
$CFV_۴$	۱۰۰	۰/۰۲	۰/۰۲
wt	۱۰۰	۰/۰۲	۰/۰۲
T^tT	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۵

در جدول ۲ روش‌های مختلف تشخیص هم‌ارزی و روش جدید ارائه شده است. در این جدول علاوه بر درصد تشخیص عدم هم‌ارزی دو طرح، کمترین و بیشترین زمان تشخیص نیز گزارش شده است. به این دلیل که کاتسونیس در رساله خود برای کاهش زمان در هر مرحله به صورت تصادفی ۵۰ جایگشت از سطر یا ستون را انتخاب و براساس آن به بررسی هم‌ارزی یا عدم هم‌ارزی دو طرح پرداخته است. همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود تمام روش‌های موجود غیرهم‌ارزی این دو طرح را تشخیص داده‌اند. روش جدید نیز می‌تواند غیرهم‌ارز

بودن این دو طرح را در مدت زمان کوتاه‌تری تشخیص دهد.

علاوه بر این که یک شرط لازم در تشخیص هم‌ارزی باید قادر باشد در زمان کوتاه‌تری به نتیجه برسد باید توانایی ماکسیمم جداسازی ممکن را نیز داشته باشد. در دو طرح قبل، روش جدید توانست در زمان کوتاه‌تری و تنها با یک محاسبه سریع غیرهم‌ارزی دو طرح را تشخیص دهد. علاوه بر ویژگی فوق، روش جدید قادر است برای طرح‌هایی که سایر روش‌ها قادر به تعیین غیرهم‌ارزی این دو طرح نیستند، غیرهم‌ارزی دو طرح را به سرعت تشخیص دهد. از میان طرح‌های موجود دو طرح da7 و da8 به عنوان نمونه مطرح می‌شود.

طرح‌های da7 و da8 که به وسیله یک جستجوی کامپیوتری با استفاده از طرح doe5 به عنوان یک طرح جزئی تولید می‌شوند. طرح doe5 تصویر ماتریس هادامارد $had.۱۶.۱$ است که از وب سایت $http://www.research.att.com/njas$ قابل دریافت است. در جدول ۳ طرح da7 و da8 به صورت کامل آمده است.

جدول ۳: دو طرح da7 و da8

da8				da7			
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۰
۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱
۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۰	۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱
۱	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۰	۱	۱	۱

با توجه به جدول ۴ تمام روش‌های موجود به جز روش دِسِک۲ و دِسِک۳ که شرط‌های لازم در تشخیص هم‌ارزی هستند قادر به تشخیص عدم‌هم‌ارزی این دو طرح نیستند، در صورتی که روش جدید علاوه بر اینکه می‌تواند عدم هم‌ارزی دو طرح را تشخیص دهد این تشخیص را در زمان کوتاه‌تری انجام می‌دهد.

دو مثال مطرح شده نمونه‌ای از طرح‌هایی هستند که کاتسونیس در رساله دکتری خود مطرح کرده است. علاوه بر این دو مثال، طرح‌های متفاوت دیگری هستند که روش جدید علاوه بر اینکه می‌تواند غیرهم‌ارزی دو طرح را تشخیص دهد، این تشخیص در کوتاه‌ترین زمان ممکن رخ می‌دهد. بنابراین روش پیشنهادی در تشخیص غیرهم‌ارزی دو طرح مطلوب است.

جدول ۴: زمان و نرخ تشخیص عدم هم‌ارزی دو طرح da7 و da8 (برحسب ثانیه)

روش	نرخ تشخیص	کمترین زمان	بیشترین زمان
$Deseq۲$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۱
$Indic$	۱۰۰	$>$ ۶۰	$>$ ۶۰
$Deseq۱$	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۱۱
$Deseq۳$	۰	۰/۰۱	۰/۰۲
$CD_۲^۲$	۰	۰/۰۱	۰/۱۲
mom^u	۰	۰/۰۱	۰/۱۲
mom^p	۰	۰/۰۱	۰/۱
$۴R-prof$	۰	۰/۰۱	۰/۱۶
$۸R-prof$	۰	۰/۰۵	۰/۱۵
$Gen-۴R$	۰	۰/۰۱	۰/۱۲
$Ext-۴R$	۰	۰/۰۱	۰/۱۲
CFV_p	۰	۰/۰۱	۰/۱
$CFV_۴$	۰	۰/۰۱	۰/۱۳
wt	۰	۰/۰۱	۰/۱۱
T^tT	۱۰۰	۰/۰۱	۰/۰۵

بحث و نتیجه‌گیری

مزیت شرط‌های لازم و کافی این است که به‌صورت قطعی هم‌ارزی یا غیرهم‌ارزی دو طرح را مشخص می‌کنند. اما از آنجایی که مدت زمان تعیین هم‌ارزی طرح‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، ایراد اساسی شرط‌های لازم و کافی زمان بر بودن این روش‌ها است. از این رو، شرط‌های لازم برای تشخیص عدم هم‌ارزی معرفی شدند. شرط‌های لازم سرعت تعیین غیرهم‌ارز بودن طرح‌ها را افزایش می‌دهند. اما این شرط‌ها علاوه بر آن‌که سرعت اجرا را افزایش می‌دهند باید قادر به تشخیص و جداسازی حداکثری طرح‌های غیرهم‌ارز نیز باشند.اکثر روش‌های موجود برای تشخیص غیرهم‌ارزی قادر به اجرای دو هدف فوق نیستند و در انجام یک یا هر دو هدف دچار مشکل می‌شوند.

در این مقاله براساس انتخاب یک یا چند سطر از ماتریس طرح روشی معرفی شد تا طرح‌هایی که با استفاده از روش‌های موجود تشخیص غیرهم‌ارزی، قادر به تعیین ناهم‌ارزی آن‌ها نیستیم، با به کارگیری این روش جدید قابل شناسایی باشند. از دیگر مزایای روش جدید این است که به علت روند محاسباتی کوتاه این روش بسیار سریع‌تر از روش‌های دیگر، غیرهم‌ارز بودن دو طرح را اعلام می‌کند. بنابراین ترکیب روش جدید با یک شرط لازم و کافی گام مؤثری در کاهش زمان تشخیص هم‌ارزی خواهد بود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مراتب قدردانی و تشکر خود را از داوران محترم برای ارائه نقطه نظراتشان و هیئت تحریریه محترم مجله علوم آماری اعلام می‌دارند.

مراجع

Cheng, S. W. and Ye, K. (2004), Geometric Isomorphism and Minimum Aberration for Factorial Designs with Quantitative Factors, *Annals of Statistics*, **32**, 2168-2185.

Clark, J. B. and Dean, A. M. (2001), Equivalence of Fractional Factorial Designs. *Statistica Sinica*, **11**, 537-547.

Katsaounis, T. and Dean, A. M. (2008), A Survey and Evaluation of Methods for Determination of Combinatorial Equivalence of Factorial Designs, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 245-258.

Katsaounis, T. (2007), Equivalence of Symmetric Factorial Designs and Characterization and Ranking of Two Level Spilit-plot Designs. Ph.D. dessertion, The Ohio State University.

Lin, C.,Wallis, W. D. and Zhu, L. (1993), Generalized 4-profiles of Hadamard Matrices, *Journal of Complexity*, **18**, 397-400.

Ma, C. X., Fang, K. T. and Lin, D. K. J. (2001), On the Isomorphism of Fractional Factorial Designs. *Journal of Complexity*, **17**, 86-97.

Sun, D., Li, W., and Ye, K. Q. (2002), An Algorithm for Sequntially Constructing Non-Isomorphic Orthogonal Designs and its Applications. Technical Report, Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York at Stony Brook, SUNYSB- AMS-01- 13 http://www.ams.sunysb.edu/papers/papers02.html.

Tang, B. and Deng, L. Y. (1999), Minimum G2-aberration for Nonregular Fractional Factorial Designs. *Annals of Statistics*, **27**,1914-1926.

Xu, H. and Deng, L. Y. (2004), Moment Aberration Projection for Nonregular Fractional Factorial Designs, *Technometrics*, **47**, 121-131.

Xu, H. (2003), Minimum Moment Aberration for Nonregular Designs and Supersaturated Designs, *Statistica Sinica*, **13**, 691-708.

Journal of Statistical Sciences, Autumn & Winter 2010 **268**
Vol. 4, No. 2, pp 253-267.

A Necessary Condition in Discriminating Non-Isomorphic 2-Level Factorial Designs

Nekoee, H. and Talebi, H.

Deptartment of Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

Abstract: Two designs, with N runs and k factors all at two levels are said to be isomorphic or equivalent if one is obtained from another by permuting rows, columns or changing the levels of one or more factors. Checking the equivalence of two designs get more complicated and time consuming by increasing N and k. Therefore, it is essential to employ necessary conditions which allow to recognize and separate non-isomorphic designs in a class of designs with the same N and k. Most of the existed necessary conditions in the literature can not meet the two goals, i.e. as much as maximum separation at the minimum time.

In this paper, a new method has been proposed to present non-equivalent designs. This new method chooses and compares for one or more rows of the given design matrices, to recognize non-equivalent designs. Further, this method has a fewer calculation and thus is able to determine non-equivalence of two designs in a shorter time.

Keywords: 2-level factorial designs, Non-equivalence designs, Necessary condition.

Mathematics Subject Classification (2000): 62K15