قابلیت اطمینان شبکه‌ها تحت شوک‌های وابسته زمانی: شکست‌های آبشاری و تعمیر ناقص

ابراهیم امینی سرشت[1]، حامد لروند[2]

[1]گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی سینا

[2]گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده: زیرساخت‌های بزرگ مهندسی مانند شبکه‌های برق، سامانه‌های ارتباطی و سامانه‌های سایبر فیزیکی در معرض شوک‌هایی با شدت و گستره متفاوت قرار دارند که در اثر وابستگی میان مؤلفه‌ها می‌توانند موجب خرابی‌های زنجیروار در کل شبکه شوند. مدل‌های کلاسیک قابلیت اطمینان عموماً با فرض استقلال میان اجزاء و شوک‌ها ساخته شده‌اند و از این‌رو در توصیف رفتار واقعی سامانه‌ها با محدودیت مواجه‌اند. در این مقاله چارچوبی جامع برای تحلیل قابلیت اطمینان شبکه‌ها در حضور شوک‌های علامت‌دار زمانی وابسته ارائه می‌شود. در این چارچوب، هر گره شبکه با فرآیندی علامت‌دار مدل می‌شود که شدت و زمان وقوع شوک‌ها را به‌صورت هم‌زمان در بر می‌گیرد و ساختار وابستگی میان مؤلفه‌ها از طریق تابع مفصل توصیف می‌گردد. مدل پیشنهادی افزون بر وابستگی آماری، مکانیزم شکست تجمعی، تعمیر ناقص و سیاست‌های تخصیص منابع تقویتی را نیز در بر دارد.

واژه‌های کلیدی: قابلیت اطمینان شبکه، شوک‌های وابسته زمانی، شکست‌های آبشاری، تعمیر ناقص، ترتیب‌های تصادفی .

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم امینی سرشت، e.amini@basu.ac.ir

۱ مقدمه

افزایش پیچیدگی زیرساخت‌های حیاتی، شبکه‌های بزرگ صنعتی و خدماتی را در برابر شوک‌های محیطی و درونی آسیب‌پذیرتر کرده است. وقوع حوادث طبیعی، نوسانات بار یا حملات سایبری معمولاً چندین مؤلفه را به‌طور هم‌زمان تحت تأثیر قرار می‌دهند. در صورت وجود وابستگی میان اجزا، شکست یک بخش می‌تواند به سایر بخش‌ها منتقل شده و موجب خرابی‌های آبشاری شود. از این رو، تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های پیچیده و طراحی سیاست‌های تعمیر و تخصیص بهینه منابع در صنایعی مانند نیروگاه‌ها، حمل‌ونقل و نفت و گاز، نیازمند مدل‌هایی است که شدت، زمان وقوع و وابستگی میان شوک‌ها را به‌طور هم‌زمان لحاظ کنند. در ادبیات قابلیت اطمینان، نخستین مدل‌های شوک بر پایه فرآیندهای تجدیدشونده و فرض استقلال توسط شانتیکومار و سومیتا (۱۹۸۳) مطرح شد و سپس مدل‌های آستانه‌ای و تجمعی مانند مدل دلتاشوک توسط وانگ و ژانگ (۲۰۰۱) گسترش یافتند. در دهه‌های اخیر، معرفی مفهوم سیستم‌های چندحالتی گامی مهم در ارزیابی واقع‌گرایانه‌تر سیستم‌ها بود که در این راستا مطالعات گسترده‌ای لیسنیانسکی و همکاران (۲۰۱۰)؛ اریلماز (۲۰۱۵)؛ پورسعید (۲۰۱۸)؛ لروند و همکاران (۲۰۲۰)؛ اوزکات و همکاران (۲۰۲۴) صورت گرفت. هم‌زمان، بلزونسه و همکاران (۲۰۰۹) و ناوارو (۲۰۱۶) با بهره‌گیری از توابع مفصل (مفصل‌ها)، وابستگی میان مؤلفه‌ها را در مدل‌های چندمتغیره وارد کردند و پورسعید و اسدیان (۱۳۹۹) نیز یک مدل شوک گردشی را در حالت گسسته برای بررسی کارایی چندحالتی سیستم ارائه داد.

تحقیقات اخیر تمرکز ویژه‌ای بر مدل‌سازی شکست‌های آبشاری و تعاملات میان مؤلفه‌ها داشته‌اند؛ اقبالی بابادی و همکاران (۱۳۹۵) قابلیت اطمینان یک سیستم مهندسی را با فرض شکست‌های آبشاری بررسی کردند و مرتضوی و کرباسیان (۱۳۹۸) روش جدیدی را بر پایه شبکه‌های بیزی پویا برای سیستم‌های چندوضعیتی تعمیرپذیر ارائه دادند. همچنین جین و ژانگ (۲۰۲۴) نشان دادند که به دلیل همبستگی

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۲۰): 62P05, 60E15..

شکست، فرض استقلال اجزا دقیق نیست و چالش‌های مدل‌سازی اثرات ترکیبی تخریب و شوک را تبیین کردند. در حوزه وابستگی به بار نیز ژائو و همکاران (۲۰۲۴الف) به ارزیابی سیستم‌های وابسته به بار و مرور جامع مفاهیم وابستگی شکست پرداختند. افزون بر این، سانگ و همکاران (۲۰۲۵) مدلی برای خرابی‌های آبشاری ناشی از نوسانات بار پواسون معرفی کرده و یک روش بازیابی متوالی مبتنی بر تاب‌آوری و محدودیت منابع پیشنهاد دادند.

با وجود توسعه مستقل مفاهیم وابستگی مؤلفه‌ها، خرابی‌های آبشاری و مدل‌های تعمیر ناقص (نظیر مدل‌های کایجیما)، بررسی ادبیات نشان می‌دهد که ترکیب هم‌زمان این سه عامل در قالب یک چارچوب تحلیلی یکپارچه در سطح سیستم و در مسائل بهینه‌سازی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در اغلب مطالعات گذشته، یا وابستگی شوک‌ها نادیده گرفته شده یا فرض تعمیر ناقص و تحلیل‌های سطح سیستم جامع اعمال نشده‌اند. نوآوری اصلی این مقاله، ارائه یک چارچوب تحلیلی جامع است که در آن وابستگی شوک‌ها (با استفاده از توابع مفصل)، رفتار آبشاری خرابی‌ها و تعمیر ناقص مؤلفه‌ها به‌طور هم‌زمان در سطح سیستم مدل‌سازی می‌شوند. این امر امکان مطالعه اثرات تجمعی این عوامل بر شاخص‌های قابلیت اطمینان و توسعه ابزار تصمیم‌گیری عملی برای تخصیص بهینه منابع را فراهم می‌سازد.

ساختار ادامه مقاله به این صورت است: در بخش ۲، مدل ریاضی، فرآیند علامت‌دار، ساختار وابستگی مفصلی و مکانیسم شکست‌های تجمعی تشریح می‌شود. بخش ۳ به ارائه نتایج نظری، حدود تحلیلی احتمال بقا و مقایسه‌های تصادفی اختصاص دارد. در بخش ۴، تحلیل تعمیر ناقص و مدل‌سازی تخصیص بهینه منابع بررسی می‌شود. بخش ۵ به شبیه‌سازی‌های عددی و تحلیل اثر پارامتر وابستگی و سیاست‌های تعمیر بر تاب‌آوری شبکه می‌پردازد و در نهایت، بخش ۶ جمع‌بندی مقاله را ارائه می‌دهد.

۲ مدل ریاضی و مفاهیم مورد نیاز

در این بخش، چارچوب ریاضی مدل پیشنهادی برای تحلیل قابلیت اطمینان شبکه‌ای تحت شوک‌های علامت‌دار زمانی وابسته ارائه می‌شود. در این مدل، هر گره از شبکه به عنوان مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود که تحت تأثیر شوک‌هایی با زمان و شدت متغیر قرار دارد. وابستگی آماری میان مؤلفه‌ها از طریق تابع

مفصل نمایش داده می‌شود و شکست سامانه هنگامی رخ می‌دهد که انباشت شدت شوک‌ها از حد آستانه فراتر رود. افزون بر این، امکان تعمیر ناقص مؤلفه‌ها نیز لحاظ می‌شود تا رفتار واقعی شبکه در طول زمان به‌درستی منعکس گردد.

فرض کنید شبکه شامل n گره باشد که مجموعه آن‌ها با $\boldsymbol{N} = \{۱, \ldots, n\}$ نمایش داده می‌شود. ارتباط میان گره‌ها توسط ماتریس مجاورت $A = [v_{ij}]_{n\times n}$ تعریف می‌گردد که در آن

$$v_{ij} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر میان گره‌های } j \text{ و } i \text{ اتصال وجود داشته باشد،} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

برای هر گره i، وضعیت عملکردی آن در زمان t را با متغیر تصادفی $X_i(t)$ نشان می‌دهیم، به‌گونه‌ای که $X_i(t) = ۱$ به معنای فعال بودن و $X_i(t) = ۰$ به معنای از کار افتادن گره است. بردار وضعیت کل شبکه در زمان t با $\boldsymbol{X}(t) = (X_۱(t), \ldots, X_n(t))$ نمایش داده می‌شود. قابلیت اطمینان کل شبکه به‌صورت تابعی از این بردار بیان می‌شود. برای مثال، اگر شبکه از نوع منسجم باشد، تابع ساختار آن را با $\phi(\boldsymbol{x})$ نشان می‌دهیم که تابعی صعودی از مؤلفه‌هاست و مقدار آن مشخص‌کننده وضعیت کارکرد کل سیستم است. تابع قابلیت اطمینان شبکه در زمان t با $R(t) = \boldsymbol{P}\big(\phi(\boldsymbol{X}(t)) = ۱\big)$ نمایش داده می‌شود. شوک‌هایی که به گره‌ها وارد می‌شوند، دارای دو ویژگی اساسی‌اند: زمان وقوع و شدت اثرگذاری آن‌ها. برای گره i، مجموعه شوک‌های واردشده را به‌صورت $\mathcal{S}_i = \{(T_{i۱}, Y_{i۱}), (T_{i۲}, Y_{i۲}), \ldots\}$ تعریف می‌کنیم، که در آن T_{ik} زمان وقوع k–اُمین شوک و Y_{ik} شدت همان شوک است. فرض می‌شود که برای هر i، توالی زمان‌ها $\{T_{i۱}, T_{i۲}, \ldots\}$ افزایشی و شمارش‌پذیر است و فرآیند شمارشگر شوک‌ها برای گره i به‌صورت $N_i(t) = \sum_{k=۱}^{\infty} I_{\{T_{ik}\le t\}}$ تعریف می‌شود. به این ترتیب، برای هر گره، یک فرآیند نقطه‌ای علامت‌دار داریم که آن را با $\{(T_{ik}, Y_{ik})\}_{k\ge ۱}$ نمایش می‌دهیم. بردار کلی شوک‌ها در شبکه در زمان t بصورت $\boldsymbol{N}(t) = (N_۱(t), \ldots, N_n(t))$ است.

در بیشتر شبکه‌های واقعی، شوک‌های واردشده به گره‌ها مستقل از یکدیگر نیستند. برای مدل‌سازی این وابستگی، از تابع مفصل استفاده می‌شود. اگر تابع توزیع حاشیه‌ای زمان‌های شوک برای گره i را با

$F_i(t)$ و تابع توزیع شدت آن را با $G_i(y)$ نشان دهیم، آنگاه توزیع مشترک بردار $(T_1, \ldots, T_n)$ به‌صورت $H_T(t_1, \ldots, t_n) = C_T\big(F_1(t_1), \ldots, F_n(t_n)\big)$ تعریف می‌شود، که در آن C_T تابع مفصل زمانی است که ساختار وابستگی بین زمان‌های وقوع شوک را تعیین می‌کند. به‌طور مشابه، توزیع مشترک برای شدت‌ها نیز بصورت $H_Y(y_1, \ldots, y_n) = C_Y\big(G_1(y_1), \ldots, G_n(y_n)\big)$ است که در آن C_Y تابع مفصل شدت‌ها است.

۱.۲ شکست آبشاری

فرض کنیم که هر گره i دارای آستانه‌ای ثابت به نام τ_i است که مجموع شدت شوک‌ها تا زمان t نباید از آن تجاوز کند. اگر $S_i(t) = \sum_{k:T_{ik}\leq t} Y_{ik}$ مجموع شدت شوک‌های واردشده تا زمان t باشد، آنگاه گره i در زمانی که $S_i(t) \geq \tau_i$ رخ دهد از کار می‌افتد. زمان خرابی گره i را با T_i^* بصورت $T_i^* = \inf\{t > 0 : S_i(t) \geq \tau_i\}$ نشان می‌دهیم. خرابی یک گره می‌تواند بر گره‌های مجاور تأثیر بگذارد. فرض می‌کنیم هنگامی که گره i از کار می‌افتد، کسری از بار یا تنش آن به گره‌های مجاور j منتقل می‌شود. میزان انتقال بار را با ضرایب $v_{ij} \in [0, 1]$ نمایش می‌دهیم، به‌گونه‌ای که برای هر i، $\sum_{j\neq i} v_{ij} \leq 1$ باشد. در نتیجه، پس از خرابی گره i، آستانه مؤثر گره‌های مجاور کاهش یافته و احتمال خرابی آن‌ها افزایش می‌یابد. این پدیده منجر به شکست‌های زنجیروار در شبکه می‌شود که به آن شکست آبشاری گفته می‌شود.

۲.۲ مدل تعمیر ناقص

فرض کنید پس از خرابی هر گره، فرایند تعمیر با احتمال موفقیت جزئی انجام می‌شود. اگر R_i میزان بازیابی کارایی گره i پس از تعمیر باشد، آنگاه $0 < R_i < 1$ نشان‌دهنده تعمیر ناقص و $R_i = 1$ نشان‌دهنده تعمیر کامل است. در این حالت، پس از تعمیر، آستانه جدید گره i برابر با $\tau_i^{(r)} = R_i\tau_i$ است، به بیان دیگر، هر چه R_i کوچکتر باشد، گره پس از تعمیر در برابر شوک‌های بعدی آسیب‌پذیرتر است. مدل تعمیر ناقص به ما اجازه می‌دهد تا اثر سیاست‌های نگهداری ناقص یا محدودیت منابع تعمیر را در تحلیل قابلیت اطمینان لحاظ کنیم. زمان خرابی کل شبکه را با T_{sys} نمایش می‌دهیم که بسته به ساختار شبکه و تابع ساختار $\phi(\cdot)$

تعیین می‌شود. برای مثال، برای شبکه‌ای منسجم بصورت $T_{\text{sys}} = \sup\{t > ۰ : \phi(\mathbf{X}(t)) = ۱\}$ می باشد. تابع قابلیت اطمینان این شبکه به‌صورت $R(t) = \mathbb{P}(T_{\text{sys}} > t)$ تعریف می‌شود و تابع نرخ خطر آن برابر با $r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ است، که در آن $f(t)$ تابع چگالی احتمال زمان خرابی شبکه است.

۳.۲ ترتیب‌های تصادفی

تعریف ۱. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی غیرمنفی بترتیب با توابع توزیع F_X و F_Y باشند. می‌گوییم X از نظر ترتیب تصادفی معمولی از Y کوچکتر است و می‌نویسیم $X \leq_{st} Y$، اگر برای هر $t \geq ۰$ داشته باشیم $\bar{F}_X(t) = \mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(Y > t) = \bar{F}_Y(t)$.

تعریف ۲. فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_۱, \ldots, X_n)$ و $\boldsymbol{Y} = (Y_۱, \ldots, Y_n)$ دو بردار تصادفی باشند. می‌گوییم $\boldsymbol{X}$ از نظر ترتیب سوپرمودالر از $\boldsymbol{Y}$ کوچکتر است و می‌نویسیم $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$، اگر برای هر تابع سوپرمودالر $\psi : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ (یعنی تابعی که برای هر $i \neq j$، ψ در (x_i, x_j) سوپرمودالر است) داشته باشیم: $\mathbb{E}[\psi(\boldsymbol{X})] \leq \mathbb{E}[\psi(\boldsymbol{Y})]$.

توجه کنیم که تابع ψ سوپرمودالر است اگر برای هر $i \neq j$ و هر $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$، تابع

$$(t, s) \mapsto \psi(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, t, x_{i+۱}, \ldots, x_{j-۱}, s, x_{j+۱}, \ldots, x_n)$$

سوپرمودالر باشد، یعنی داشته باشیم $\psi(t \vee s) + \psi(t \wedge s) \geq \psi(t) + \psi(s)$.

ترتیب تصادفی $\leq_{sm}$ بیان‌کننده وابستگی بیشتر مؤلفه‌های $\boldsymbol{Y}$ نسبت به $\boldsymbol{X}$ است. به عبارتی اگر فرض کنیم خانواده‌ای از توزیع‌های مشترک $\{H_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ وجود داشته باشد و اگر برای $\theta_۱ \leq \theta_۲$ داشته باشیم $H_{\theta_۲}$ بزرگ‌تر از $H_{\theta_۱}$ به‌معنی ترتیب سوپرمودالر (یا ترتیب همبستگی مثبت) باشد، آنگاه برای هر تابع صعودی چند متغیره ی g نامساوی $\mathbb{E}_{\theta_۱}(g(\boldsymbol{Y})) \leq \mathbb{E}_{\theta_۲}(g(\boldsymbol{Y}))$ برقرار می‌شود. همچنین اگر تابع g تابعی نزولی باشد آنگاه خواهیم داشت

$$\mathbb{E}_{\theta_۱}(g(\boldsymbol{Y})) \geq \mathbb{E}_{\theta_۲}(g(\boldsymbol{Y})). \tag{۱}$$

۳ قابلیت اطمینان شبکه تحت شوک‌های وابسته

در این بخش، نتایج اصلی مربوط به قابلیت اطمینان شبکه تحت شوک‌های وابسته را ارائه می‌دهیم. ابتدا کران‌هایی برای تابع قابلیت اطمینان شبکه استخراج می‌کنیم و در ادامه، به بررسی تأثیر پارامترهای کلیدی مدل از جمله آستانه‌ها، ضرایب انتقال بار و پارامتر وابستگی مفصل بر قابلیت اطمینان شبکه می‌پردازیم و نتایج مقایسه‌ای را بیان می‌کنیم. با استفاده از حدود فرشه–هوفدینگ برای توابع توزیع چندمتغیره، می‌توان کران‌های مفیدی برای تابع قابلیت اطمینان شبکه $R(t)$ ارائه داد.

قضیه ۱. فرض کنید وابستگی شدت شوک‌ها مثبت باشد. آنگاه برای هر $t > ۰$، کران پایین بهبودیافته‌ای بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$R(t) \geq \prod_{i=۱}^{n}(۱ - F_{i,t}(\tau_i)) + \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}\big(I_{\{S_i(t)>\tau_i\}}, I_{\{S_j(t)>\tau_j\}}\big).$$

برهان: برای اثبات این قضیه از بسط‌های احتمالی و ویژگی‌های کوواریانس استفاده می‌کنیم. ابتدا برای سادگی پیشامد $A_i = \{S_i(t) > \tau_i\}, i = ۱, \ldots, n$ را تعریف می‌کنیم. تابع قابلیت اطمینان شبکه را می‌توان به صورت $R(t) = \mathbb{E}\big(\prod_{i=۱}^{n} I_i\big)$ نوشت، که در آن $I_i := I_{A_i}$ تابع نشانگر است. از طرفی برای n متغیر تصادفی، بسط

$$\mathbb{E}\big(\prod_{i=۱}^{n} I_i\big) = \prod_{i=۱}^{n}\mathbb{E}(I_i) + \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mathbb{E}\big(\prod_{k\neq i,j} I_k\big)\mathrm{Cov}(I_i, I_j) + R_n, \qquad (۲)$$

را داریم، که در آن R_n شامل کوواریانس‌های مرتبه بالاتر است.

اکنون از فرض وابستگی مثبت استفاده می‌کنیم. اگر شوک‌ها وابستگی مثبت داشته باشند، آنگاه رویدادهای بقای گره‌ها نیز وابستگی مثبت خواهند داشت. این یعنی برای هر زیرمجموعه‌ای از شاخص‌ها،

کوواریانس‌های مرتبه بالاتر نامنفی هستند، به عبارتی برای هر $S \subseteq \{۱, \dots, n\}$ داریم

$$\mathrm{Cov}(I_i, I_j) \geq ۰ \quad \text{و} \quad \mathbb{E}\big(\prod_{k\in S}(I_k - \mathbb{E}(I_k)\big) \geq ۰,$$

در نتیجه، جمله باقیمانده R_n در معادله (۲) نامنفی است. حال کران پایین را با حفظ تنها جمله‌های کوواریانس جفتی به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$R(t) = \mathbb{E}\big(\prod_{i=۱}^{n} I_i\big) \geq \prod_{i=۱}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}(I_i, I_j),$$

اما توجه کنیم که $\mathbb{E}(I_i) = ۱ - F_{i,t}(\tau_i)$ و همچنین $\mathrm{Cov}(I_i, I_j) = \mathrm{Cov}\big(I_{\{S_i(t)>\tau_i\}}, I_{\{S_j(t)>\tau_j\}}\big)$ است. بنابراین خواهیم داشت

$$R(t) \geq \prod_{i=۱}^{n}(۱ - F_{i,t}(\tau_i)) + \sum_{۱\leq i<j\leq n} \mathrm{Cov}\big(I_{\{S_i(t)>\tau_i\}}, I_{\{S_j(t)>\tau_j\}}\big).$$

توجه کنیم که این کران زمانی محافظه‌کارانه‌تر از کران فرشه–هوفدینگ است که وابستگی بین مؤلفه‌ها را نادیده می‌گیرد. در واقع، کران فرشه–هوفدینگ به صورت $R(t) \geq \max\left\{۱ - \sum_{i=۱}^{n} F_{i,t}(\tau_i), ۰\right\}$ است، که وقتی وابستگی مثبت قوی وجود دارد می‌تواند بسیار محافظه‌کارانه باشد. همچنین لازم به ذکر است که، کران ارائه شده هنگامی مفید است که توزیع‌های حاشیه‌ای $F_{i,t}$ به راحتی در دسترس یا قابل محاسبه باشند و در حالت خاص وقتی مؤلفه‌ها مستقل باشند، تمام کوواریانس‌ها صفر شده و کران به حالت مستقل بصورت $R(t) \geq \prod_{i=۱}^{n}(۱ - F_{i,t}(\tau_i))$ کاهش می‌یابد. همچنین اگر وابستگی منفی باشد، کوواریانس‌ها منفی شده و این کران ممکن است محافظه‌کارانه نباشد. در آن صورت باید از کران‌های دیگری استفاده کرد.

قضیه ۲. فرض کنید دو شبکه یکسان از نظر توپولوژی و شوک‌ها داشته باشیم اما آستانه‌های گره‌ها در شبکه اول برابر τ و در شبکه دوم برابر τ' و $\tau_i \leq \tau'_i$ برای همه i ها برقرار باشد. آنگاه برای هر $t > ۰$،

داریم $T_{Sys} \geq_{st} T'_{Sys}$، که در آن T_{Sys} زمان خرابی شبکه است.

برهان: برای اثبات این قضیه، از روش کوپلینگ و ویژگی‌های ترتیب تصادفی استفاده می‌کنیم. با استفاده از روش کوپلینگ، فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را طوری می‌سازیم که هر دو شبکه در معرض دقیقاً دنباله یکسانی از شوک‌ها قرار گیرند. یعنی برای هر $\omega \in \Omega$ داریم:

- زمان‌های وقوع شوک‌ها: $\{T_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ یکسان برای هر دو شبکه باشد.
- بردارهای شدت شوک: $\{Y_k(\omega) = (Y_{1k}(\omega), \ldots, Y_{nk}(\omega))\}_{k=1}^{\infty}$ یکسان برای هر دو شبکه باشد.

برای هر ثابت ω، فرآیندهای تجمعی شدت شوک را به صورت

$$\begin{aligned} S_i(t,\omega) &= \sum_{k:T_k(\omega)\leq t} Y_{ik}(\omega) \quad \text{برای شبکه اول}, \\ S'_i(t,\omega) &= \sum_{k:T_k(\omega)\leq t} Y_{ik}(\omega) \quad \text{برای شبکه دوم} \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنیم که برای هر i و هر t، $S_i(t,\omega) = S'_i(t,\omega)$ است، زیرا شوک‌ها یکسان هستند. حال پیشامدهای بقا را در هر شبکه تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A(t,\omega) &:= \{S_i(t,\omega) > \tau_i, \forall i = 1, \ldots, n\} \quad \text{(بقای شبکه اول)}, \\ A'(t,\omega) &:= \{S_i(t,\omega) > \tau'_i, \forall i = 1, \ldots, n\} \quad \text{(بقای شبکه دوم)}, \end{aligned}$$

می‌دانیم که برای هر ω و هر زمان $t > 0$، $A'(t,\omega) \subseteq A(t,\omega)$ است، لذا از رابطه بین پیشامدها خواهیم داشت $\mathbb{P}(A'(t)) \leq \mathbb{P}(A(t))$ است و این معادل با $R(t;\tau') \leq R(t;\tau)$ است. بنابراین خواهیم داشت $\mathbb{P}(T_{sys} > t) \geq \mathbb{P}(T'_{sys} > t)$ است، که این دقیقاً تعریف ترتیب تصادفی معمولی است و اثبات تمام است.

مقاله پذیرفته شده

در قضیه بعدی نشان می‌دهیم افزایش ضرایب انتقال بار، قابلیت اطمینان شبکه را کاهش می‌دهد و به عبارتی اثر مستقیم مکانیزم شکست آبشاری را نشان می‌دهیم. برای صراحت، دو مدل زیر با هم مقایسه می‌شوند:

- مدل بدون انتقال بار: همهٔ $v_{ij} = ۰$ است.
- مدل با انتقال بار: مقادیری $v_{ij} \in [۰, ۱]$ وجود دارند و انتقال بار صورت می‌گیرد.

قضیه ۳. فرض کنید دو مدل شبکه با توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان برای شوک‌ها و آستانه‌های یکسان τ_i داشته باشیم. ماتریس‌های انتقال بار به ترتیب $V = [v_{ij}]$ و $V' = [v'_{ij}]$ باشند، به طوری که برای هر i, j داشته باشیم $v_{ij} \geq v'_{ij} \geq ۰$. آنگاه برای هر $t \geq ۰$ داریم $R(t; V) \leq R(t; V')$.

برهان: برای اثبات این قضیه، از روش کوپلینگ و تحلیل مسیر به مسیر استفاده می‌کنیم. دو سیستم زیر را در نظر می‌گیریم:

- سیستم V با ماتریس انتقال بار $V = [v_{ij}]$ باشد.
- سیستم V' با ماتریس انتقال بار $V' = [v'_{ij}]$ باشد.
- شرط $v_{ij} \geq v'_{ij} \geq ۰$ برای همه i, j برقرار باشد.

هر دو سیستم دارای توزیع‌های حاشیه‌ای یکسان برای شوک‌ها، آستانه‌های یکسان τ_i برای هر گره i و توپولوژی یکسان شبکه هستند. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را طوری می‌سازیم که هر دو سیستم در معرض دقیقاً دنباله یکسانی از شوک‌ها قرار گیرند. برای هر ثابت $\omega \in \Omega$ داریم:

- زمان‌های وقوع شوک‌ها: $\{T_k(\omega)\}_{k=۱}^{\infty}$ یکسان است.
- بردارهای شدت شوک: $\{Y_k(\omega) = (Y_{۱k}(\omega), \ldots, Y_{nk}(\omega))\}_{k=۱}^{\infty}$ یکسان است.
- توالی خرابی‌های اولیه یکسان است.

مقاله پذیرفته شده

بار مؤثر روی هر گره j در زمان t به صورت

$$\begin{aligned} L_j(t,\omega) &= S_j(t,\omega) + \sum_{i\neq j} v_{ij} B_i(t,\omega) I_{\{T_i^*(\omega)\leq t\}}, \\ L'_j(t,\omega) &= S_j(t,\omega) + \sum_{i\neq j} v'_{ij} B'_i(t,\omega) I_{\{T_i^{*\prime}(\omega)\leq t\}}, \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود، که در آن

- $S_j(t,\omega) = \sum_{k:T_k(\omega)\leq t} Y_{jk}(\omega)$: مجموع شدت شوک‌های مستقیم است،
- $B_i(t,\omega)$: میزان بار انتقال‌یافته از گره i است (مثلاً $B_i(t,\omega) = S_i(T_i^*(\omega),\omega)$)،
- $T_i^*(\omega)$: زمان خرابی گره i در سیستم V است و $T_i^* = \inf\{t > \circ : L_i(t) \geq \tau_i\}$ است و
- $T_i^{*\prime}(\omega)$: زمان خرابی گره i در سیستم V' است.

اکنون ادعا می‌کنیم برای هر ثابت ω و هر زمان $t \geq \circ$ و هر گره j، $L_j(t,\omega) \leq L'_j(t,\omega)$ است. این رابطه را با استقرا روی رویدادهای خرابی اثبات می‌کنیم. فرض کنید در $t = \circ$، هیچ گره‌ای خراب نیست، بنابراین، $L_j(\circ,\omega) = S_j(\circ,\omega) = L'_j(\circ,\omega)$. اکنون فرض کنید تا قبل از زمان t، برای همه گره‌ها برای همه j ها داشته باشیم $L_j(s,\omega) \leq L'_j(s,\omega)$. در زمان t، اگر هیچ خرابی رخ ندهد، بارها تغییر نمی‌کنند. اگر خرابی رخ دهد، دو حالت داریم: حالت ۱: اگر گره i در سیستم V در زمان t خراب شود اما در سیستم V' خراب نشود، آنگاه

$$L_j(t,\omega) = L_j(t^-,\omega) + v_{ij}B_i(t,\omega) = L_j(t^-,\omega) + v_{ij}(S_i(t) - \tau_i),$$

است و همچنین $L'_j(t,\omega) = L'_j(t^-,\omega)$ است. از فرض استقرا $L_j(t^-,\omega) \geq L'_j(t^-,\omega)$ و از آنجایی که $v_{ij} \geq \circ$ و $S_i(t) - \tau_i \geq \circ$ است، داریم $L_j(t,\omega) \leq L'_j(t,\omega)$ است. حالت ۲: اگر گره i در هر دو سیستم در زمان t خراب شود، آنگاه $L_j(t,\omega) = L_j(t^-,\omega) + v_{ij}B_i(t,\omega)$ و $L'_j(t,\omega) = L'_j(t^-,\omega) + v'_{ij}B'_i(t,\omega)$ است. از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که $L_j(t^-,\omega) \leq L'_j(t^-,\omega)$ و از $v_{ij} \leq v'_{ij}$ و $B_i(t,\omega) \leq B'_i(t,\omega)$ (چون بار تجمعی در سیستم V زودتر به آستانه

می‌رسد)، نتیجه می‌گیریم $L_j(t,\omega) \leq L'_j(t,\omega)$ است. از رابطه $L_j(t,\omega) \leq L'_j(t,\omega)$ نیز برای هر j، نتیجه می‌شود $\{L_j(t,\omega) > \tau_j, \forall j\} \subseteq \{L'_j(t,\omega) > \tau_j, \forall j\}$. یعنی اگر سیستم V' در زمان t سالم باشد، سیستم V نیز قطعاً سالم است، لذا

$$R(t;V') = \mathbb{P}(L'_j(t,\omega) > \tau_j) \geq \mathbb{P}(L_j(t,\omega) > \tau_j) = R(t;V).$$

توجه کنید که به طور دقیق‌تر، می‌توان نشان داد توالی خرابی‌ها در سیستم V زودتر از سیستم V' رخ می‌دهد. یعنی اگر $\mathcal{F}_t$ و $\mathcal{F}'_t$ به ترتیب مجموعه گره‌های خراب شده تا زمان t در سیستم‌های V و V' باشند، آنگاه برای هر $t \geq 0$، $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}'_t$ است. این رابطه قوی‌تر، نتیجه مورد نظر را به صورت مستقیم نتیجه می‌دهد. در حالت خاص نیز اگر اگر برای همه i,j داشته باشیم $v'_{ij} = 0$ (عدم انتقال بار)، آنگاه $R(t;V) \leq R(t;0)$ است.

فرع ۱. اگر V و V' ماتریس‌های انتقال بار باشند با $v_{ij} \geq v'_{ij}$، آنگاه زمان خرابی سیستم‌ها رابطه $T_{sys}(V) \leq_{st} T_{sys}(V')$ را تایید می‌کنند.

برهان: از آنجایی که $R(t;V') \geq R(t;V)$ برای همه $t \geq 0$ (طبق قضیه ۳)، و با توجه به تعریف ترتیب تصادفی معمولی، نتیجه مستقیماً حاصل می‌شود.

۱.۳ تأثیر پارامتر وابستگی مفصل

برای تحلیل اثر پارامتر وابستگی θ، خانواده‌ای از مفصل‌ها را در نظر می‌گیریم که با θ مرتب شده‌اند. ابتدا در قضیه زیر تاثیر وابستگی را در مدل تک شوک مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۴. فرض کنید در مدل تک‌شوک، توزیع مشترک شدت‌های وارد بر گره‌ها با یک تابع مفصل C_θ مدلبندی شده باشد. اگر تابع مفصل C_θ به صورت نقطه‌ای نسبت به θ صعودی باشد، آنگاه تابع قابلیت اطمینان شبکه در این مدل، $R(\theta)$، نسبت به θ نزولی است.

برهان: برای اثبات این قضیه، ساختار مدل تک‌شوک را به دقت تحلیل کرده و از ویژگی‌های توابع مفصل استفاده می‌کنیم. در مدل تک‌شوک، فرض می‌کنیم تنها یک شوک در زمان مشخص (مثلاً $t = 0$)

مقاله پذیرفته شده

به شبکه وارد می‌شود. بردار شدت شوک‌های وارد شده بر گره‌ها را با $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ نشان می‌دهیم که دارای توزیع مشترک $H(\boldsymbol{y}) = C_\theta(G_1(y_1), \ldots, G_n(y_n))$ است. تابع قابلیت اطمینان شبکه به صورت $R(\theta) = \mathbb{P}(Y_1 > \tau_1, \ldots, Y_n > \tau_n)$ تعریف می‌شود. بنابراین می‌توان نوشت $R(\theta) = 1 - C_\theta(u_1, \ldots, u_n)$، که در آن برای هر $i = 1, \ldots, n$، $u_i = G_i(\tau_i)$ است. فرض قضیه بیان می‌کند که تابع مفصل C_θ نسبت به θ صعودی است. یعنی برای هر $\theta_1 \leq \theta_2$ و برای هر بردار $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in [0, 1]^n$، $C_{\theta_1}(\boldsymbol{u}) \leq C_{\theta_2}(\boldsymbol{u})$ است. در نتیجه خواهیم داشت

$$R(\theta_1) = 1 - C_{\theta_1}(u_1, \ldots, u_n) \geq 1 - C_{\theta_2}(u_1, \ldots, u_n) = R(\theta_2),$$

که نشان می‌دهد $R(\theta)$ نسبت به θ نزولی است و اثبات تمام است.

این نتیجه از نظر احتمالی نشان میدهد که افزایش θ منجر به افزایش وابستگی بین مؤلفه‌ها می‌شود. در مدل تک‌شوک، وقتی وابستگی افزایش می‌یابد، احتمال اینکه همه مؤلفه‌ها همزمان بیشتر از آستانه باشند کاهش می‌یابد. این به این دلیل است که وابستگی مثبت باعث می‌شود مؤلفه‌ها تمایل داشته باشند با هم رفتار کنند یا همه با هم کمتر از آستانه باشند یا همه با هم بیشتر از آستانه باشند. اگر تابع مفصل نسبت به θ مشتق‌پذیر باشد، می‌توان نوشت $\frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{\partial C_\theta(u_1, \ldots, u_n)}{\partial \theta}$ و برای خانواده‌های معروف مفصل‌های زیر تابع $\frac{\partial R(\theta)}{\partial \theta}$ منفی است:

- مفصل گامبل–هوگارد: $C_\theta(u, v) = \exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right)$ برای $\theta \geq 1$
- مفصل کلیتون: $C_\theta(u, v) = \max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0\right)$ برای $\theta > 0$
- مفصل فرانک: $C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$ برای $\theta \neq 0$

در همه این موارد، با افزایش θ، وابستگی افزایش یافته و $C_\theta(u, v)$ برای u, v ثابت افزایش می‌یابد، بنابراین $R(\theta)$ کاهش می‌یابد.

گزاره ۱. جهت تغییر $R(\theta)$ به نوع توزیع مورد بررسی بستگی دارد. برای توزیع های دم بالا (همه مؤلفه‌ها بیشتر از آستانه)، افزایش وابستگی معمولاً منجر به کاهش قابلیت اطمینان می‌شود. برای توزیع های دم پایین (همه مؤلفه‌ها کمتر از آستانه)، افزایش وابستگی ممکن است منجر به افزایش احتمال آن رویداد

شود. در عمل، افزایش وابستگی معمولاً باعث افزایش احتمال رخداد همزمان شوک‌های بزرگ می‌شود و در نتیجه قابلیت اطمینان سیستم کاهش می‌یابد. با این حال، اگر آستانه‌ها در نواحی پایینی توزیع قرار داشته باشند، وابستگی مثبت ممکن است مفید واقع شود.

توجه کنیم حالت مهم برای بررسی اثر وابستگی شوک‌ها، زمانی است که شوک‌ها بر اساس یک فرآیند پواسون همگن با نرخ λ رخ می‌دهند. بنابراین در ادامه به بررسی تأثیر وابستگی در مدل پواسون مرکب پرداخته می‌شود. برای مدل خاص مرکب پواسون با نرخ λ و آمیخته های مستقل و همسان با توزیع مشترک H_θ، داریم

$$R(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} F_\theta^{(m)}(\tau).$$

که در آن $F_\theta^{(m)}(\tau) = \mathbb{P}\big(\sum_{k=1}^m Y_{1k} \leq \tau_1, \ldots, \sum_{k=1}^m Y_{nk} \leq \tau_n\big)$ است.

لم ۱. اگر ترتیب‌های تصادفی $\boldsymbol{X} \leq_{sm} \boldsymbol{Y}$ و $\boldsymbol{U} \leq_{sm} \boldsymbol{V}$ برقرار باشند و همچنین متغیرها از هم مستقل باشند، آنگاه خواهیم داشت $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} \leq_{sm} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{V}$.

برهان: برای هر تابع سوپرمودالر ψ، داریم

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\psi(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U})) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{U}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{X}}(\psi(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u}))) \\
&\leq \mathbb{E}_{\boldsymbol{U}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}(\psi(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{u}))) \quad \text{(چون } \psi(\cdot+\boldsymbol{u}) \text{ سوپرمودالر است)} \\
&= \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{U}}(\psi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{U}))) \\
&\leq \mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{V}}(\psi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{V}))) \quad \text{(چون } \psi(\boldsymbol{y}+\cdot) \text{ سوپرمودالر است)} \\
&= \mathbb{E}(\psi(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{V}))
\end{aligned}$$

بنابراین $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} \leq_{sm} \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{V}$ است و سپس با استقرا روی m، نتیجه کلی برای جمع m متغیر مستقل بدست می‌آید.

مقاله پذیرفته شده

قضیه ۵. فرض کنید شوک‌ها بر اساس یک فرآیند پواسون همگن با نرخ λ رخ بدهند و بردارهای شدت $\boldsymbol{Y}_k$ مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک $H_\theta(\boldsymbol{y}) = C_\theta(G_1(y_1), \ldots, G_n(y_n))$ باشند. اگر برای هر $\theta_1 \leq \theta_2$ داشته باشیم $H_{\theta_1} \leq_{sm} H_{\theta_2}$، آنگاه تابع قابلیت اطمینان شبکه تابعی نزولی از θ است.

برهان: توجه کنیم که مدل مورد بررسی دارای ویژگی‌های زیر است:

- شوک‌ها در زمان‌های $T_1, T_2, \ldots$ رخ می‌دهند که یک فرآیند پواسون همگن با نرخ λ تشکیل می‌دهند.
- در هر وقوع شوک k، بردار شدت $\boldsymbol{Y}_k = (Y_{1k}, \ldots, Y_{nk})$ به گره‌ها وارد می‌شود.
- بردارهای $\boldsymbol{Y}_k$ مستقل و هم‌توزیع با توزیع مشترک H_θ هستند.
- توزیع مشترک با مفصل مدل شده: $H_\theta(\boldsymbol{y}) = C_\theta(G_1(y_1), \ldots, G_n(y_n))$.

تابع قابلیت اطمینان شبکه در زمان t به صورت $R(t;\theta) = \mathbb{P}\big(S_1(t) > \tau_1, \ldots, S_n(t) > \tau_n\big)$ است، که در آن $S_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_{ik}$ و $N(t)$ دارای توزیع پواسون با پارامتر λt است. با شرطی کردن روی تعداد شوک‌ها داریم

$$R(t;\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = m)\mathbb{P}\big(S_1(t) \leq \tau_1, \ldots, S_n(t) \leq \tau_n \mid N(t) = m\big),$$

از آنجایی که $N(t)$ مستقل از $\boldsymbol{Y}_k$ها است و $\mathbb{P}(N(t) = m) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}$ است، داریم

$$R(t;\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!} G_\theta^{(m)}(\tau_1, \ldots, \tau_n),$$

که در آن

$$G_\theta^{(m)}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbb{P}\big(\sum_{k=1}^{m} Y_{1k} \leq \tau_1, \ldots, \sum_{k=1}^{m} Y_{nk} \leq \tau_n\big) = \mathbb{E}\big(\phi\big(\boldsymbol{S}_\theta^{(m)}\big)\big)$$

به طوری که $\boldsymbol{S}_\theta^{(m)} = \big(\sum_{k=1}^{m} Y_{1k}, \ldots, \sum_{k=1}^{m} Y_{nk}\big)$ و $\phi(\boldsymbol{x}) = I_{\{x_1 \leq \tau_1, \ldots, x_n \leq \tau_n\}}$.

مقاله پذیرفته شده

با استفاده از فرض قضیه برای $\theta_1 \leq \theta_2$ داریم $H_{\theta_1} \leq_{sm} H_{\theta_2}$، بنابراین با توجه به لم ۱ برای هر $m \geq 1$ داریم $\boldsymbol{S}_{\theta_1}^{(m)} \leq_{sm} \boldsymbol{S}_{\theta_2}^{(m)}$. اکنون با توجه به اینکه تابع $\phi(\boldsymbol{x})$ یک تابع نزولی است و با استفاده از رابطه (۱) خواهیم داشت $\mathbb{E}[\phi(\boldsymbol{S}_{\theta_1}^{(m)})] \geq \mathbb{E}[\phi(\boldsymbol{S}_{\theta_2}^{(m)})]$، که معادل با $G_{\theta_1}^{(m)}(\boldsymbol{\tau}) \geq G_{\theta_2}^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ است. برای $m = 0$ (هیچ شوکی رخ ندهد)، بنابراین $G_{\theta}^{(0)}(\boldsymbol{\tau}) = 1$، که نسبت به θ ثابت است. حال با در نظر گرفتن بسط $R(t;\theta)$ خواهیم داشت

$$R(t;\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} G_{\theta}^{(m)}(\boldsymbol{\tau}),$$

و با توجه به اینکه برای هر $m \geq 1$، $G_{\theta}^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ نسبت به θ نزولی است و ضرایب مثبت و مستقل از θ هستند، برای $\theta_1 \leq \theta_2$، $R(t;\theta_1) \geq R(t;\theta_2)$ است و اثبات تمام است.

این نتیجه نشان می‌دهد که تحت شرایط وابستگی مثبت (سوپرمودالر)، افزایش وابستگی بین شدت شوک‌ها منجر به کاهش قابلیت اطمینان شبکه می‌شود. این به این دلیل است که وابستگی مثبت باعث می‌شود شوک‌ها تمایل داشته باشند همزمان بزرگ یا کوچک باشند و از آنجایی که ما به رخدادن همه مؤلفه‌ها بیشتر از آستانه (رویداد دم بالا) علاقه‌مندیم، این وابستگی مضر است. در واقع، وابستگی مثبت احتمال وقوع همزمان شوک‌های بزرگ را افزایش داده و در نتیجه احتمال شکست سیستم را بالا می‌برد.

فرع ۲. اگر توابع حاشیه‌ای G_i یکسان باشند و مفصل از خانواده کلیتون با پارامتر $\theta > 0$ باشد، آنگاه $R(t;\theta)$ نسبت به θ نزولی است.

۴ تعمیر ناقص و تخصیص بهینه منابع

در این بخش، ابتدا مدل ریاضی تعمیر ناقص را به صورت دقیق تعریف می‌کنیم و سپس تأثیر آن بر تابع نرخ خطر و تابع قابلیت اطمینان شبکه را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در ادامه، با در نظر گرفتن محدودیت بودجه، مسئله تخصیص بهینه منابع را برای دو حالت تقویت آستانه‌ها و بهبود ضریب تعمیر ارزیابی می‌کنیم.

مقاله پذیرفته شده

تعریف ۳. فرض کنید هر گره i در شبکه دارای تابع نرخ خطر پایه $r_i(t)$ باشد که تابعی صعودی است. پس از هر خرابی، تعمیر ناقص با ضریب بازیابی $q_i \in (0, 1]$ انجام می‌شود. تحت مدل کایجیما نوع I، سن مؤثر گره i پس از kامین تعمیر به صورت

$$V_{i,k} = q_i V_{i,k-1} + X_{i,k}, \quad V_{i,0} = 0,$$

محاسبه می‌شود، که در آن $X_{i,k}$ زمان بین خرابی $(k-1)$ام و kام است.

تابع قابلیت اعتماد شرطی پس از $(k-1)$امین تعمیر برابر است با

$$\mathbb{P}(X_{i,k} > t \mid V_{i,k-1} = v) = \exp\big(-\int_v^{v+t} r_i(u)\, du\big).$$

لذا تابع نرخ خطر مؤثر در بازه kام برابر با $r_{i,k}(t) = r_i(V_{i,k-1} + t)$ می‌شود.

در مدل پیشنهادی پس از هر شکست گره i تعمیر ناقص انجام می‌شود که سن مجازی گره را کاهش می‌دهد اما به حالت اولیه بازنمی‌گرداند. از مدل کایجیما نوع I استفاده می‌کنیم، که در آن عامل تعمیر $q \in (0, 1]$ نشان‌دهنده درجه ناقصی تعمیر است ($q = 1$ تعمیر کامل و برای $q \to 0$ تعمیر بسیار ناقص است.).

فرض کنید $T_{i,k}$ زمان وقوع شکست kـام گره i باشد و $X_{i,k} = T_{i,k} - T_{i,k-1}$ زمان بین دو شکست متوالی ($T_{i,0} = 0$) باشد. سن مجازی پس از تعمیر kـام برابر با $V_{i,k} = qV_{i,k-1} + X_{i,k}$ می‌باشد، که در آن $V_{i,0} = 0$ است. بنابراین، به طور بازگشتی خواهیم داشت

$$V_{i,k} = X_{i,k} + qX_{i,k-1} + q^2 X_{i,k-2} + \cdots + q^{k-1} X_{i,1}.$$

اکنون فرض کنید تابع نرخ خطر پایه گره i برابر $r_i(t)$ و تابعی صعودی باشد. آنگاه توزیع شرطی زمان بین شکست kـام یعنی $X_{i,k}$ به شرط $V_{i,k-1} = v$، دارای تابع قابلیت اعتماد $\mathbb{P}(X_{i,k} > t \mid V_{i,k-1} = v) = \exp\big(-\int_v^{v+t} r_i(s)\, ds\big)$ باشد. توجه کنیم که در مدل کایجیما، نرخ خطر مؤثر پس از تعمیر

$(k-1)$-ام برابر $r_i(v+t)$ است، حالتی که $v = V_{i,k-1}$ است. بنابراین، تابع تجمعی خطر شرطی برابر $\int_v^{v+t} r_i(s)\,ds$ است و لذا تابع قابلیت اعتماد به صورت فوق حاصل می‌شود.

قضیه ۶. اگر $r_i(t)$ تابعی صعودی باشد، آنگاه برای همه $k \geq 1$ داریم $\mathbb{E}(X_{i,k+1}) \leq \mathbb{E}(X_{i,k})$.

برهان: ابتدا برای $k = 1$ نشان می‌دهیم که $\mathbb{E}(X_{i,2}) \leq \mathbb{E}(X_{i,1})$ است. برای زمان بین خرابی‌های اول و دوم به ترتیب داریم

$$\mathbb{E}(X_{i,1}) = \int_0^\infty \exp\big(-\int_0^t r_i(s)\,ds\big)dt.$$
$$\mathbb{E}(X_{i,2}) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X_{i,2} \mid V_{i,1})\big] = \mathbb{E}\big[\int_0^\infty \exp\big(-\int_{V_{i,1}}^{V_{i,1}+t} r_i(s)\,ds\big)dt\big].$$

از آنجایی که $V_{i,1} = X_{i,1} \geq 0$ و $r_i(t)$ صعودی است، لذا برای هر $v \geq 0$ و $t \geq 0$، رابطه $\int_v^{v+t} r_i(s)\,ds \geq \int_0^t r_i(s)\,ds$ برقرار می‌باشد. بنابراین

$$\exp\big(-\int_v^{v+t} r_i(s)\,ds\big) \leq \exp\big(-\int_0^t r_i(s)\,ds\big),$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \exp\big(-\int_v^{v+t} r_i(s)\,ds\big)dt \leq \int_0^\infty \exp\big(-\int_0^t r_i(s)\,ds\big)dt = \mathbb{E}(X_{i,1}).$$

پس برای هر $v \geq 0$ رابطه $\mathbb{E}(X_{i,2} \mid V_{i,1} = v) \leq \mathbb{E}(X_{i,1})$ برقرار می‌شود و با گرفتن امید ریاضی از دو طرف خواهیم داشت، $\mathbb{E}(X_{i,2}) \leq \mathbb{E}(X_{i,1})$ است. حال با استقرا فرض می‌کنیم برای $k = m$ رابطه برقرار باشد، یعنی $\mathbb{E}(X_{i,m+1}) \leq \mathbb{E}(X_{i,m})$ باشد. اکنون برای $k = m+1$ داریم

$$\mathbb{E}(X_{i,m+2}) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(X_{i,m+2} \mid V_{i,m+1})\big].$$

مقاله پذیرفته شده

از آنجایی که $V_{i,m+1} = qV_{i,m} + X_{i,m+1} \geq X_{i,m+1}$ (چون $q > 0$ و $V_{i,m} \geq 0$) و با توجه به فرض استقرا $\mathbb{E}(X_{i,m+1}) \leq \mathbb{E}(X_{i,m})$ است و همچنین با توجه به صعودی بودن $r_i(t)$، برای هر $v \geq v'$ رابطه $\mathbb{E}(X_{i,m+2} \mid V_{i,m+1} = v) \leq \mathbb{E}(X_{i,m+1} \mid V_{i,m} = v')$ بدست می‌آید، که منجر به برقراری رابطه $\mathbb{E}(X_{i,m+2}) \leq \mathbb{E}(X_{i,m+1})$ می‌شود. بنابراین با استقرا، رابطه برای همه $k \geq 1$ برقرار است و اثبات تمام می‌شود.

فرع ۳. اگر $q > 0$، و $N_i(t)$ تعداد تعمیرات تا زمان t (تعداد شکست‌ها) باشد، آنگاه

$$\mathbb{E}(N_i(t)) \leq \frac{\Lambda_i(t)}{1-q}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

که در آن $\Lambda_i(t) = \int_0^t r_i(s)\, ds$ تابع تجمعی نرخ خطر پایه است.

برهان: برای اثبات این کران، از مقایسه با یک فرآیند پواسون غیرهمگن استفاده می‌کنیم. فرآیند خرابی‌های گره i تحت تعمیر ناقص را با $N_i(t)$ نشان می‌دهیم. یک فرآیند پواسون غیرهمگن $M_i(t)$ با شدت $\mu_i(t) = \frac{r_i(t)}{1-q}$ تعریف می‌کنیم. بنابراین، کافی است نشان دهیم $N_i(t) \leq_{st} M_i(t)$ است. برای این منظور، از ساختار مدل کایجیما استفاده می‌کنیم. فرآیند $N_i(t)$ دارای زمان‌های خرابی $T_{i,1}, T_{i,2}, \ldots$ است که در آن

$$\mathbb{P}(X_{i,k} > t \mid V_{i,k-1} = v) = \exp\big(-\int_v^{v+t} r_i(s)\, ds\big).$$

از طرفی، برای فرآیند $M_i(t)$ با شدت $\mu_i(t) = \frac{r_i(t)}{1-q}$، تابع بقای زمان بین رویدادها به صورت

$$\mathbb{P}(S_{i,k} - S_{i,k-1} > t \mid S_{i,k-1} = s) = \exp\big(-\int_s^{s+t} \frac{r_i(u)}{1-q}\, du\big).$$

است. حال با استقرا روی k نشان می‌دهیم که برای هر $k \geq 0$، $T_{i,k} \geq_{st} S_{i,k}$ است. فرض کنید $k = 0$ باشد، بنابراین خواهیم داشت $T_{i,0} \geq_{st} S_{i,0}$ است. اکنون فرض می‌کنیم برای هر k داشته باشیم $T_{i,k} \geq_{st} S_{i,k}$ است. لذا باید نشان دهیم $T_{i,k+1} \geq_{st} S_{i,k+1}$ است. برای این منظور، کافی است

نشان دهیم که برای هر $u > ۰$ داریم

$$\mathbb{P}(T_{i,k+۱} - T_{i,k} > u \mid T_{i,k} = s) \geq \mathbb{P}(S_{i,k+۱} - S_{i,k} > u \mid S_{i,k} = s).$$

از مدل کایجیما داریم

$$\mathbb{P}(T_{i,k+۱} - T_{i,k} > u \mid T_{i,k} = s) = \exp\big(-\int_s^{s+u} r_i(w)\, dw\big).$$

از طرفی برای فرآیند $M_i(t)$ خواهیم داشت

$$\mathbb{P}(S_{i,k+۱} - S_{i,k} > u \mid S_{i,k} = s) = \exp\big(-\int_s^{s+u} \frac{r_i(w)}{۱-q}\, dw\big).$$

برای هر $۰ < q < ۱$ داریم

$$\exp\big(-\int_s^{s+u} r_i(w)\, dw\big) \geq \exp\big(-\int_s^{s+u} \frac{r_i(w)}{۱-q}\, dw\big).$$

بنابراین $T_{i,k+۱} - T_{i,k} \geq_{st} S_{i,k+۱} - S_{i,k}$. با استقرا و خاصیت حفظ ترتیب تصادفی معمولی تحت جمع برای متغیرهای مستقل، نتیجه می‌گیریم $T_{i,k+۱} \geq_{st} S_{i,k+۱}$ و در نهایت، از آنجایی که $N_i(t) \geq k$ اگر و تنها اگر $T_{i,k} \leq t$ برقرار باشد، برای هر t خواهیم داشت

$$N_i(t) \leq_{st} M_i(t), \quad i = ۱, ۲, \ldots.$$

بنابراین

$$\mathbb{E}(N_i(t)) \leq \mathbb{E}(M_i(t)), \quad i = ۱, ۲, \ldots,$$

از طرفی برای فرآیند پواسون غیرهمگن $M_i(t)$ داریم

$$\mathbb{E}(N_i(t)) \leq \mathbb{E}(M_i(t)) = \int_{\circ}^{t} \mu_i(s)\, ds = \int_{\circ}^{t} \frac{r_i(s)}{۱-q}\, ds = \frac{\Lambda_i(t)}{۱-q},$$

و اثبات تمام است.

توجه کنیم که این کران زمانی محافظه‌کارانه است که تعمیر بسیار ناقص باشد (q نزدیک به ۰ باشد). در حالت تعمیر کامل ($q = ۱$)، کران برابر با $\Lambda_i(t)$ می‌شود.

فرع ۴. اگر نرخ خطر پایه ثابت باشد ($r_i(t) = \lambda_i$)، آنگاه $\mathbb{E}(N_i(t)) \leq \frac{\lambda_i t}{۱-q}$.

برای یک مؤلفه با تابع قابلیت اطمینان $R(t)$، میانگین زمان بین خرابی‌ها به صورت $\text{MTBF} = \int_{\circ}^{\infty} R(t)\, dt$ تعریف می‌شود. در مدل تعمیر ناقص کایجیما نوع I میانگین زمان بین خرابی‌ها به تعداد تعمیرهای انجام شده بستگی دارد. برای گره i پس از k تعمیر، میانگین زمان بین خرابی kام و $(k+۱)$ام به صورت $\text{MTBF}_{i,k} = \mathbb{E}(X_{i,k+۱}) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X_{i,k+۱} \mid V_{i,k})\big)$ است، که در آن

$$\mathbb{E}(X_{i,k+۱} \mid V_{i,k} = v) = \int_{\circ}^{\infty} \exp\big(-\int_{v}^{v+t} r_i(s)\, ds\big) dt.$$

گزاره ۲. اگر تابع نرخ خطر پایه $r_i(t)$ صعودی باشد، آنگاه برای $k \geq ۱$، $MTBF_{i,k} \leq MTBF_{i,k-۱}$.

برهان: اثبات از قضیه ۶ حاصل می‌شود، زیرا $\text{MTBF}_{i,k} = \mathbb{E}(X_{i,k+۱})$ و $\text{MTBF}_{i,k-۱} = \mathbb{E}(X_{i,k})$.

گزاره ۳. اگر توزیع زمان خرابی اولیه نمایی با نرخ خطر ثابت باشد، آنگاه میانگین زمان بین خرابی‌ها مستقل از تعداد تعمیرها است.

برهان: اگر $r_i(t) = \lambda_i$ ثابت باشد، آنگاه برای هر $v \geq \circ$ داریم

$$\mathbb{E}(X_{i,k+۱} \mid V_{i,k} = v) = \int_{\circ}^{\infty} \exp\big(-\int_{v}^{v+t} \lambda_i\, ds\big) dt = \int_{\circ}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\, dt = \frac{۱}{\lambda_i}.$$

مقاله پذیرفته شده

پس برای همه kها داریم، $\mathrm{MTBF}_{i,k} = \mathbb{E}(X_{i,k+1}) = \frac{1}{\lambda_i}$ است.

در حالت توزیع نمایی، تعمیر ناقص تأثیری بر میانگین زمان بین خرابی‌ها ندارد، زیرا خاصیت فقدان حافظه باعث می‌شود سن مؤثر گره تأثیری بر توزیع زمان تا خرابی بعدی نداشته باشد.

۱.۴ تأثیر تعمیر ناقص بر قابلیت اطمینان شبکه

در ادامه، مسئله تخصیص منابع تقویتی به گره‌ها برای بیشینه‌سازی تاب‌آوری شبکه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید با تخصیص منبع x_i به گره i، آستانه تحمل آن از τ_i به $\tau_i + \beta_i x_i$ افزایش یابد، که $\beta_i > 0$ بازدهی تخصیص منبع است. هدف، بیشینه‌سازی احتمال بقای شبکه در زمان T تحت محدودیت بودجه کل B است، به عبارتی دیگر

$$\max_{x_i \geq 0} R(T; \boldsymbol{x}) = \mathbb{P}\big(S_1(T) > \tau_1 + \beta_1 x_1, \ldots, S_n(T) > \tau_n + \beta_n x_n\big)$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq B.$$

برای تحلیل اثر تعمیر ناقص در سطح شبکه، فرض می‌کنیم هر گره به طور مستقل و با توجه به مدل کایجیما نوع I تعمیر می‌شود. در ادامه یک تقریب برای بررسی قابلیت اعتماد سیستم ارائه می‌کنیم که برای تحلیل و بهینه‌سازی قابلیت اطمینان شبکه‌های پیچیده تحت تعمیر ناقص بسیار مفید است.

قضیه ۷. اگر شبکه از نوع منسجم باشد و اهمیت هر گره i با $w_i(t)$ نشان داده شود، آنگاه نرخ خطر کل شبکه تحت تعمیر ناقص را می‌توان به صورت تقریبی $r_{sys}(t) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\mathbb{E}\big(r_i(V_i(t)+t)\big)$ بیان کرد، که در آن $V_i(t)$ سن مؤثر گره i در زمان t است.

برهان: برای شبکه‌های منسجم، نرخ خطر سیستم را می‌توان به صورت ترکیب خطی وزن‌دار از نرخ خطر مؤلفه‌ها تقریب زد. لذا خواهیم داشت $r_{\text{sys}}(t) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(t) r_i(t)$ است، که در آن $w_i(t)$ اهمیت مؤلفه i در زمان t است و به صورت $w_i(t) = \mathbb{E}\big(\phi(1_i, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i, \boldsymbol{X}(t)) \mid \boldsymbol{X}(t)\big)$ تعریف می‌شود، که در آن $\phi(1_i, \boldsymbol{X}(t))$ وضعیت سیستم را وقتی مؤلفه i–ام سالم باشد را نشان می‌دهد و همچنین

$\phi(\circ_i, \boldsymbol{X}(t))$ وضعیت سیستم را وقتی مؤلفه i–ام خراب باشد را نشان می‌دهد. در مدل کایجیما نوع نرخ خطر مؤثر گره i در زمان t به سن مؤثر آن بستگی دارد و به عبارتی $r_i(t) = r_{i,\circ}(V_i(t)+t)$ است، که در آن $V_i(t)$ سن مؤثر گره i در زمان t است و به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود.

برای به دست آوردن یک تقریب خوب، میانگین تابع نرخ خطر مؤلفه i–ام را بصورت $\mathbb{E}(r_i(t)) = \mathbb{E}\big(r_{i,\circ}(V_i(t)+t)\big)$ در نظر می‌گیریم. با ترکیب نتایج مراحل قبل داریم

$$r_{\text{sys}}(t) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\mathbb{E}(r_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\mathbb{E}\big(r_{i,\circ}(V_i(t)+t)\big).$$

برای ساده‌سازی بیشتر، می‌توان از تقریب $\mathbb{E}\big(r_{i,\circ}(V_i(t)+t)\big) \approx r_{i,\circ}\big(\mathbb{E}(V_i(t))+t\big)$ استفاده کرد، که منجر به تقریب ساده‌تر $r_{\text{sys}}(t) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(t) r_{i,\circ}\big(\mathbb{E}(V_i(t))+t\big)$ می‌شود. لازم به ذکر است که، میانگین سن مؤثر $\mathbb{E}(V_i(t))$ را نیز می‌توان از رابطه بازگشتی

$$\mathbb{E}(V_i(t)) \approx q_i\mathbb{E}(V_i(t-\Delta t)) + \mathbb{E}(X_i(t)),$$

تقریب زد، که در آن $\mathbb{E}(X_i(t))$ میانگین زمان بین خرابی‌ها است.

فرع ۵. تحت شرایط تعمیر ناقص، نرخ خطر سیستم با گذشت زمان افزایش می‌یابد، زیرا سن مؤثر گره‌ها به تدریج افزایش می‌یابد و با توجه به صعودی بودن تابع نرخ خطر پایه، نرخ خطر مؤثر نیز افزایش می‌یابد.

در ادامه، مسئله تخصیص بهینه منابع با بودجه محدود در دو حالت مجزا بررسی می‌شود: حالت اول تقویت آستانه‌های تحمل شوک و حالت دوم مربوط به بهبود ضریب بازسازی در تعمیر ناقص است.

قضیه ۸. اگر متغیرهای تصادفی $S_i(T)$ مستقل باشند، آنگاه شرط لازم بهینگی برای مسئله (؟؟) وجود ثابت $\mu > \circ$ است به طوری که $\beta_i f_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i^*) \prod_{j\neq i} \bar{F}_{j,T}(\tau_j + \beta_j x_j^*) = \mu c_i$، که در آن $f_{i,T}$ و $\bar{F}_{i,T}$ بترتیب تابع چگالی احتمال و تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی $S_i(T)$ است.

مقاله پذیرفته شده

برهان: با فرض استقلال متغیرهای $S_i(T)$، تابع هدف به صورت

$$R(T;\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \bar{F}_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i)$$

ساده می‌شود. لاگرانژین مسئله به صورت

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\mu,\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} \bar{F}_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i) - \mu\big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i - B\big) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

تعریف می‌شود، که در آن $\mu \geq 0$ و $\lambda_i \geq 0$ است.

شرایط لازم بهینگی برای نقطه بهینه $(\boldsymbol{x}^*, \mu^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ برای هر $i = 1, \ldots, n$ برابر است با

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} &= 0, \\
\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* &\leq B, \quad x_i^* \geq 0, \\
\mu^* &\geq 0, \quad \lambda_i^* \geq 0, \\
\mu^*\big(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* - B\big) &= 0, \\
\lambda_i^* x_i^* &= 0.
\end{aligned}$$

مشتق جزئی لاگرانژین نسبت به x_i را محاسبه می‌کنیم و داریم

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\beta_i f_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i) \prod_{j \neq i} \bar{F}_{j,T}(\tau_j + \beta_j x_j) - \mu c_i + \lambda_i.$$

مقاله پذیرفته شده

در نقطه بهینه $\boldsymbol{x}^*$، برای هر $i = ۱, \ldots, n$ داریم

$$-\beta_i f_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i^*) \prod_{j \neq i} \bar{F}_{j,T}(\tau_j + \beta_j x_j^*) - \mu^* c_i + \lambda_i^* = ۰.$$

برای تحلیل حالات مختلف برای قیدهای غیر منفی داریم:

حالت ۱ ($x_i^* > ۰$) : در این حالت از شرط مکمل داریم $\lambda_i^* = ۰$ است، بنابراین

$$\beta_i f_{i,T}(\tau_i + \beta_i x_i^*) \prod_{j \neq i} \bar{F}_{j,T}(\tau_j + \beta_j x_j^*) = -\mu^* c_i.$$

از آنجایی که $\mu^* > ۰$ و $c_i > ۰$، این معادله تنها زمانی معنی دارد که سمت چپ مثبت باشد. اما توجه داریم که برای رویدادهای دم بالا، جهت بهینه‌سازی معکوس می‌شود.

حالت ۲ ($x_i^* = ۰$) : در این حالت $\lambda_i^* \geq ۰$ است، بنابراین

$$\beta_i f_{i,T}(\tau_i) \prod_{j \neq i} \bar{F}_{j,T}(\tau_j + \beta_j x_j^*) = -\mu^* c_i + \lambda_i^* \leq -\mu^* c_i.$$

با توجه به اینکه $\mu^* > ۰$ و $c_i > ۰$ است و از آنجایی که سمت چپ معادلات مثبت است، این شرایط بهینگی نشان می‌دهد که برای مسئله بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان، شرط بهینگی به صورت ارائه شده در قضیه برقرار است و اثبات تمام است.

توجه داشته باشید که در مسئله بیشینه‌سازی قابلیت اطمینان بر اساس رویدادهای دم بالا ($S_i(T) > \tau_i$)، شرایط بهینگی ممکن است پیچیده‌تر از حالتی باشد که بر اساس رویدادهای دم پایین فرمول‌بندی شده باشد.

در حالت دوم، منبع x_i به بهبود ضریب بازیابی q_i گره i اختصاص می‌یابد، به طوری که

$$q_i' = q_i + \gamma_i x_i, \quad \text{و} \quad ۰ < q_i' \leq ۱,$$

و $\gamma_i > 0$ بازدهی بهبود بازیابی است. هدف، کمینه‌سازی نرخ خطر سیستم در زمان T است، یعنی

$$\min_{x_i \geq 0} r_{\text{sys}}(T; \boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^{n} w_i(T) \mathbb{E}\big(r_{i,0}(\mathbb{E}(V_i(T)) + T)\big) \tag{۳}$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq B.$$

قضیه ۹. فرض کنید برای هر i، تابع $r_{i,0}(t)$ تابعی صعودی و محدب باشد، آنگاه شرط لازم بهینگی برای مسئله (۳) وجود ثابت $\mu > 0$ است به طوری که برای هر i با $x_i^* > 0$ و $q_i + \gamma_i x_i^* < 1$ داریم

$$w_i(T) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}\big(r_{i,0}(V_i(T) + T)\big) = \mu c_i.$$

برهان: تابع هدف $J(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(T) \mathbb{E}\big(r_{i,0}(V_i(T; q_i + \gamma_i x_i) + T)\big)$ است، که در آن $V_i(T; q_i)$ سن مؤثر گره i در زمان T با ضریب بازیابی q_i است. مشتق این تابع نسبت به x_i به صورت

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = w_i(T) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}\big(r_{i,0}(V_i(T; q_i + \gamma_i x_i) + T)\big).$$

است، که برای محاسبه آن از رابطه بین سن مؤثر و ضریب بازیابی استفاده می‌کنیم. از مدل کایجیما نوع I می‌دانیم $V_i(T) = \sum_{k=1}^{N_i(T)} (q_i + \gamma_i x_i)^{k-1} X_{i,k}$. بنابراین میانگین سن مؤثر را می‌توان به صورت $\mathbb{E}(V_i(T)) \approx \frac{\Lambda_i(T)}{1-(q_i+\gamma_i x_i)}$ تقریب زد، که در آن $\Lambda_i(T) = \int_0^T \mathbb{E}(r_{i,0}(V_i(s) + s)) ds$. در نتیجه

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{E}(V_i(T)) \approx \frac{\partial}{\partial x_i} \Big[\frac{\Lambda_i(T)}{1 - (q_i + \gamma_i x_i)}\Big] = \frac{\Lambda_i(T) \gamma_i}{(1 - (q_i + \gamma_i x_i))^2}.$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbb{E}\big(r_{i,\circ}(V_i(T)+T)\big) &\approx \mathbb{E}\big(r'_{i,\circ}(V_i(T)+T)\big)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbb{E}(V_i(T)) \\ &\approx \mathbb{E}\big(r'_{i,\circ}(V_i(T)+T)\big)\frac{\Lambda_i(T)\gamma_i}{(۱-(q_i+\gamma_i x_i))^۲}.\end{aligned}$$

بنابراین لاگرانژین مسئله تحت شرایط $\mu \geq \circ$، $\lambda_i \geq \circ$ و $\nu_i \geq \circ$، به صورت

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\mu,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}) = J(\boldsymbol{x}) - \mu\big(\sum_{i=۱}^{n} c_i x_i - B\big) + \sum_{i=۱}^{n}\lambda_i x_i + \sum_{i=۱}^{n}\nu_i(۱-q_i-\gamma_i x_i),$$

خواهد بود. در این‌صورت، شرایط لازم بهینگی در نقطه $(\boldsymbol{x}^*,\mu^*,\boldsymbol{\lambda}^*,\boldsymbol{\nu}^*)$ عبارتند از

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial J}{\partial x_i} - \mu^* c_i + \lambda_i^* - \nu_i^*\gamma_i = \circ \quad i = ۱,\ldots,n,\\ &\sum_{i=۱}^{n} c_i x_i^* \leq B, \quad x_i^* \geq \circ, \quad q_i + \gamma_i x_i^* \leq ۱,\\ &\mu^* \geq \circ, \quad \lambda_i^* \geq \circ, \quad \nu_i^* \geq \circ,\\ &\mu^*\big(\sum_{i=۱}^{n} c_i x_i^* - B\big) = \circ, \quad \lambda_i^* x_i^* = \circ, \quad \nu_i^*(۱-q_i-\gamma_i x_i^*) = \circ.\end{aligned}$$

حالت ۱: ($x_i^* > \circ$ و $q_i + \gamma_i x_i^* < ۱$): در این حالت، از شرط مکمل داریم $\lambda_i^* = \circ$ و $\nu_i^* = \circ$ است. بنابراین $\frac{\partial J}{\partial x_i} = \mu^* c_i$ و با جایگذاری آن خواهیم داشت

$$w_i(T)\mathbb{E}\big(r'_{i,\circ}(V_i(T)+T)\big)\frac{\Lambda_i(T)\gamma_i}{(۱-(q_i+\gamma_i x_i^*))^۲} = \mu^* c_i.$$

حالت ۲: ($x_i^* > \circ$ و $q_i + \gamma_i x_i^* = ۱$): در این حالت، $\lambda_i^* = \circ$ اما $\nu_i^* \geq \circ$ است. بنابراین $\frac{\partial J}{\partial x_i} = \mu^* c_i + \nu_i^*\gamma_i \geq \mu^* c_i$.

مقاله پذیرفته شده

حالت ۳: ($x_i^* = ۰$ و $q_i < ۱$): در این حالت، $\lambda_i^* \geq ۰$ و $\nu_i^* = ۰$ است. بنابراین $\frac{\partial J}{\partial x_i} = \mu^* c_i - \lambda_i^* \leq \mu^* c_i$.

اکنون برای اطمینان از کافی بودن شرایط، تحدب تابع هدف را بررسی می‌کنیم. اگر $r_{i,۰}(t)$ تابعی صعودی و محدب باشد، آنگاه تابع هدف $J(\boldsymbol{x})$ محدب خواهد بود و شرایط هم لازم و هم کافی برای بهینگی بدست می‌آید. بنابراین در حالت بهینه، برای مؤلفه‌هایی که منابع مثبت دریافت می‌کنند، شرط بهینگی به صورت $w_i(T)\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbb{E}\big(r_{i,۰}(V_i(T)+T)\big) = \mu^* c_i$ است و این دقیقاً شرط بیان شده در قضیه است و اثبات تمام است.

قضیه ۱۰. فرض کنید سیستم از n مؤلفه مستقل تشکیل شده باشد. اگر میانگین تعداد تعمیرهای انجام شده *(k_i)* کوچک باشد، تخصیص منابع به تقویت آستانه‌ها اثر بیشتری بر افزایش $R_{sys}(T)$ دارد، اما اگر k_i بزرگ باشد *(فرسودگی زیاد)*، بهبود ضریب بازیابی q_i کاراتر است.

برهان: برای مقایسه سیستماتیک دو سیاست تخصیص منابع، تحلیل حساسیت را بر اساس مدل کایجیما نوع I انجام می‌دهیم. فرض کنید تابع قابلیت اطمینان سیستم به صورت

$$R_{\text{sys}}(T) = \mathbb{P}\big(S_۱(T) > \tau_۱, \ldots, S_n(T) > \tau_n\big).$$

باشد. اگر بخواهیم سیاست تقویت آستانه را در پیش بگیریم منبع x_i به افزایش آستانه τ_i تخصیص می‌یابد و $\tau_i' = \tau_i + \beta_i x_i, \quad \beta_i > ۰$ است. بنابراین در این حالت تغییر در قابلیت اطمینان سیستم را می‌توان به صورت $\Delta R_{\text{sys}}^{\text{threshold}} \approx \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial \tau_i}\beta_i x_i$ تقریب زد. اگر بخواهیم سیاست بهبود ضریب بازیابی را در نظر بگیریم، در این سیاست، منبع x_i به بهبود ضریب بازیابی q_i تخصیص می‌یابد و $q_i' = q_i + \gamma_i x_i, \quad \gamma_i > ۰$ است. لذا در این حالت تغییر در قابلیت اطمینان سیستم را می‌توان به صورت $\Delta R_{\text{sys}}^{\text{repair}} \approx \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial q_i}\gamma_i x_i$ تقریب زد. بنابراین حساسیت نسبت به آستانه با رابطه

$$\frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial \tau_i} = -f_{S_i(T)}(\tau_i) R_{\text{sys}}(T \mid S_i(T) > \tau_i)$$

بررسی می‌شود. همچنین حساسیت نسبت به ضریب بازیابی نیز بصورت

$$\frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial q_i} = \frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial \mathbb{E}(V_i(T))} \frac{\partial \mathbb{E}(V_i(T))}{\partial q_i}.$$

خواهد شد. از طرفی از مدل کایجیما داریم

$$\mathbb{E}(V_i(T)) \approx \frac{\Lambda_i(T)}{1 - q_i}, \quad \Lambda_i(T) = \int_0^T \mathbb{E}(r_{i,0}(V_i(s) + s))ds.$$

چون $\frac{\partial \mathbb{E}(V_i(T))}{\partial q_i} \approx \frac{\Lambda_i(T)}{(1-q_i)^2}$، داریم

$$\frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial \mathbb{E}(V_i(T))} = -\mathbb{E}(r'_{i,0}(V_i(T) + T))R_{\text{sys}}(T).$$

اکنون نسبت بازده بهبود بازیابی به تقویت آستانه برای مؤلفه i برابر است با

$$\frac{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{repair}}}{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{threshold}}} = \frac{\frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial q_i}\gamma_i}{\frac{\partial R_{\text{sys}}}{\partial \tau_i}\beta_i} = \frac{\mathbb{E}(r'_{i,0}(V_i(T) + T))\frac{\Lambda_i(T)}{(1-q_i)^2}\gamma_i}{f_{S_i(T)}(\tau_i)R_{\text{sys}}(T \mid S_i(T) > \tau_i)\beta_i}.$$

میانگین تعداد تعمیرهای انجام شده k_i با سن مؤثر رابطه دارد و $\mathbb{E}(V_i(T)) \approx \frac{\Lambda_i(T)}{1-q_i} \propto k_i$. بنابراین با افزایش k_i (فرسودگی بیشتر) مقدار $\Lambda_i(T)$ افزایش می‌یابد و حساسیت $\mathbb{E}(r'_{i,0}(V_i(T)+T))$ افزایش می‌یابد (به دلیل صعودی بودن $r_{i,0}$). بنابراین صورت کسر افزایش می‌یابد و در نتیجه برای k_i کوچک، داریم $\frac{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{repair}}}{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{threshold}}} < 1$، یعنی تقویت آستانه‌ها مؤثرتر است. برای k_i بزرگ داریم $\frac{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{repair}}}{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{threshold}}} > 1$، یعنی بهبود بازیابی مؤثرتر است. لذا نقطه تعادل هنگامی رخ می‌دهد که $\frac{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{repair}}}{\Delta R_{\text{sys}}^{\text{threshold}}} = 1$.

۵ نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی مدل نظری ارائه‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف، تحلیل کمی تأثیر پارامترهای اصلی مدل شامل شدت شوک‌ها، نرخ وقوع، پارامتر وابستگی بین مؤلفه‌ها، ضریب بازسازی در تعمیر ناقص و نحوه تخصیص منابع تقویتی بر قابلیت اطمینان کلی شبکه است. برای این منظور، شبیه‌سازی با استفاده از روش مونت کارلو انجام می‌شود تا تحلیل حساسیت مدل و رفتار سیستم در سناریوهای مختلف مشخص گردد. فرض کنید شبکه شامل سه گره باشد ($n = ۳$) که به‌صورت یک سیستم سری–موازی عمل می‌کند. تابع ساختار سیستم به‌صورت

$$\phi(x_۱, x_۲, x_۳) = x_۱(۱ - (۱ - x_۲)(۱ - x_۳))$$

تعریف می‌شود، که در آن گرهٔ اول به‌صورت سری با زیرسیستم موازی از گره‌های دوم و سوم متصل است. هر گره در معرض شوک‌هایی با ویژگی‌های زیر قرار دارد:

- زمان وقوع شوک‌ها از فرآیند پواسن با نرخ $\lambda = ۰/۵$ پیروی می‌کند؛
- شدت شوک‌ها از توزیع نمایی با پارامتر η_i تبعیت دارد:
- وابستگی بین شدت شوک‌ها از تابع مفصل کلایتون با پارامتر θ تبعیت می‌کند:

آستانهٔ اولیهٔ گره‌ها برابر با $\tau_۱ = \tau_۲ = \tau_۳ = ۵$ در نظر گرفته شده و ضریب بازسازی اولیه برای همهٔ مؤلفه‌ها $R_i = ۰/۹$ است. همچنین پارامتر توزیع شدت شوک‌ها بصورت $\eta_۱ = ۰/۸, \eta_۲ = \eta_i$ $۰/۶, \eta_۳ = ۰/۴$ است. فرآیند شبیه‌سازی برای بازهٔ زمانی $t \in [۰, T]$ با $T = ۱۰۰۰$ واحد زمانی و تعداد تکرار $N_{\text{sim}} = ۱۰,۰۰۰$ انجام می‌شود و الگوریتم زیر را دنبال می‌کنیم:

۱. تولید زمان‌های وقوع شوک از فرآیند پواسن با نرخ λ تا رسیدن به زمان T؛
۲. در هر وقوع، تولید بردار شدت شوک $(Y_{۱k}, Y_{۲k}, Y_{۳k})$ از توزیع مشترک تابع مفصل کلایتن با پارامتر θ؛
۳. به‌روزرسانی مجموع شدت‌ها در هر گره $S_i(t) \leftarrow S_i(t) + Y_{ik}$؛

۴. بررسی خرابی: برای هر گره i، اگر $S_i(t_k) > \tau_i^{(N_i(t_k^-))}$، آنگاه

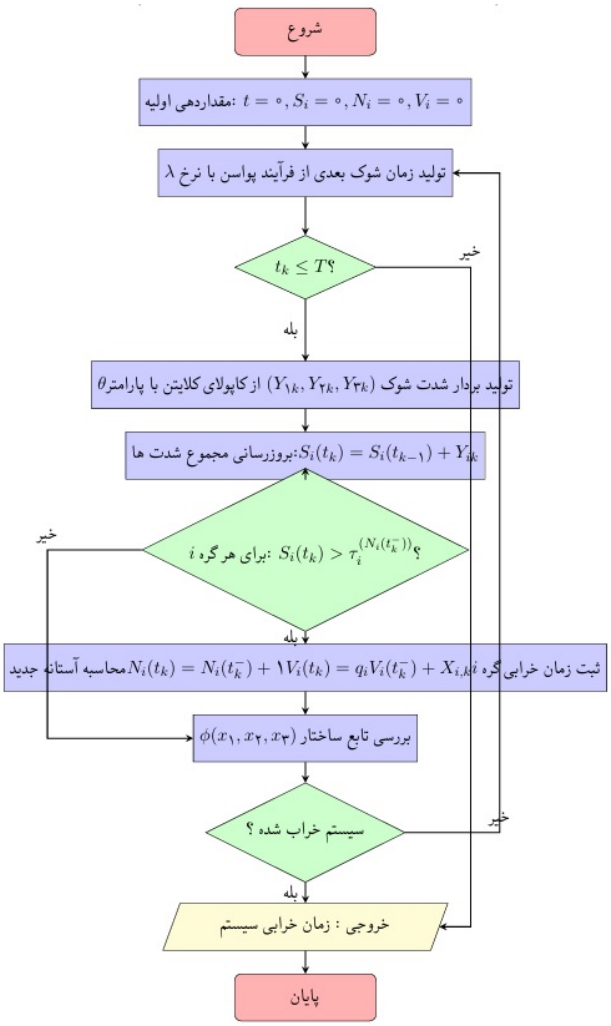
- ،زمان خرابی ثبت می‌شود
- تعداد تعمیرها افزایش می‌یابد: $N_i(t_k) = N_i(t_k^-) + ۱$،
- سن مؤثر به‌روز می‌شود: $V_i(t_k) = q_i V_i(t_k^-) + X_{i,k}$،
- آستانه جدید محاسبه می‌شود (در صورت استفاده از مدل کاهش آستانه)،

۵. در هر گام زمانی تابع ساختار $\phi(x_۱, x_۲, x_۳)$ بررسی می‌شود تا وضعیت سیستم مشخص گردد؛

۶. فرآیند تا زمان خرابی کلی سیستم تکرار می‌شود.

شکل ۱ فلوچارت نحوه استفاده از الگوریتم فوق را ارائه می دهد. تمامی محاسبات عددی، شبیه‌سازی‌های مونت‌کارلو و حل مسائل بهینه‌سازی در این پژوهش با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R انجام شده است. برای تولید دنباله‌های وابسته شوک‌ها از بسته copula (تابع مفصل کلیتون) استفاده شد. شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای تخمین شاخص‌های قابلیت اطمینان (نظیر $R(t)$ و MTTF) با تکرار $N_{\text{sim}} = ۱۰,۰۰۰$ بار اجرا گردید. در حالت‌هایی که فرض استقلال بین مؤلفه‌ها برقرار است یا ساختار مسئله اجازه می‌دهد، شرایط لازم برای بهینگی با استفاده از تابع لاگرانژ و شرایط کاروش–کان–تاکر (KKT) استخراج شده است. این تحلیل منجر به روابط صریح برای مقادیر بهینه تخصیص منابع می‌شود. در حالت کلی‌تر، به‌ویژه در حضور وابستگی بین مؤلفه‌ها که با استفاده از توابع مفصل مدل‌سازی شده است، حل تحلیلی امکان‌پذیر نیست. در این موارد، مسائل بهینه‌سازی به‌صورت عددی و با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی غیرخطی حل شده‌اند. میانگین زمان خرابی سیستم و احتمال بقا در زمان‌های مختلف بر اساس میانگین‌گیری از تکرارها به‌صورت $\hat{R}(t) = \frac{۱}{N_{\text{sim}}} \sum_{k=۱}^{N_{\text{sim}}} \mathbf{I}_{\{T_{\text{sys}}^{(k)} > t\}}$ محاسبه می‌شود.

برای تحلیل اثر پارامتر وابستگی θ، مقادیر مختلفی از این پارامتر در بازه $[۰/۵, ۵]$ بررسی شده‌اند. نتایج در جدول ۱ به وضوح نشان می‌دهد که افزایش پارامتر وابستگی θ اثر منفی قابل توجهی بر کلیه شاخص‌های قابلیت اطمینان شبکه دارد. با افزایش θ از ۰/۵ به ۵، میانگین زمان خرابی سیستم از ۴۱۲/۶ به ۲۴۱/۸ واحد زمانی کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده کاهش ۴۱/۴ درصدی در عمر مفید شبکه است. همچنین احتمال بقای سیستم در زمان‌های مختلف نیز با افزایش θ کاهش می‌یابد، به طوری که در



شکل ۱: فلوچارت و نمایش بصری الگوریتم

زمان $t = ۲۰۰$ از ۰/۷۴۲ به ۰/۴۶۳ و در زمان $t = ۵۰۰$ از ۰/۳۱۸ به ۰/۱۲۸ رسیده است. کاهش بیشتر احتمال بقا در زمان‌های طولانی‌تر نشان‌دهنده آن است که اثر منفی وابستگی در بلندمدت تشدید می‌شود. همچنین برای تحلیل اثر تعمیر ناقص، ضریب بازیابی q از ۱ (تعمیر کامل) تا ۰/۵ (تعمیر بسیار ناقص) تغییر داده شده است. نتایج در جدول ۲ نشان می‌دهد که با کاهش ضریب بازیابی q از ۱

جدول ۱: تأثیر پارامتر وابستگی θ بر شاخص‌های قابلیت اطمینان

$\hat{R}(۸۰۰)$	$\hat{R}(۵۰۰)$	$\hat{R}(۲۰۰)$	میانگین زمان خرابی(MTTF)	θ
۰/۰۸۵	۰/۳۱۸	۰/۷۴۲	۴۱۲/۶	۰/۵
۰/۰۷۲	۰/۲۸۵	۰/۶۹۲	۳۸۶/۲	۱
۰/۰۵۸	۰/۲۴۱	۰/۶۳۱	۳۵۲/۸	۱/۵
۰/۰۴۱	۰/۱۸۲	۰/۵۴۸	۲۹۷/۳	۲
۰/۰۳۲	۰/۱۵۲	۰/۴۹۸	۲۶۸/۴	۳
۰/۰۲۶	۰/۱۲۸	۰/۴۶۳	۲۴۱/۸	۵

به ۰/۵، میانگین زمان خرابی سیستم از ۴۸۵/۳ به ۱۹۸/۵ واحد زمانی سقوط می‌کند که بیانگر کاهش ۵۹/۱ درصدی در عملکرد سیستم است. همزمان با کاهش قابلیت اطمینان، میانگین تعداد تعمیرهای مورد نیاز از ۲/۷ به ۱۲/۷ افزایش می‌یابد که نشان‌دهنده ورود سیستم به چرخه معیوب «خرابی مکرر–تعمیر ناقص–خرابی زودرس» است.

جدول ۲: تأثیر ضریب بازیابی q بر شاخص‌های قابلیت اطمینان

$\hat{R}(۸۰۰)$	$\hat{R}(۵۰۰)$	$\hat{R}(۲۰۰)$	میانگین تعداد تعمیرها	میانگین زمان خرابی(MTTF)	q
۰/۱۸۵	۰/۴۵۲	۰/۸۳۲	۲/۷	۴۸۵/۳	۱
۰/۱۴۲	۰/۳۸۴	۰/۷۸۴	۳/۲	۴۲۷/۸	۰/۹
۰/۰۹۵	۰/۲۹۱	۰/۷۰۱	۴/۱	۳۵۲/۸	۰/۸
۰/۰۵۴	۰/۱۹۸	۰/۵۹۲	۵/۸	۲۷۸/۴	۰/۷
۰/۰۲۶	۰/۱۲۱	۰/۴۶۸	۸/۳	۲۱۵/۷	۰/۶
۰/۰۱۸	۰/۰۹۸	۰/۴۲۸	۱۲/۷	۱۹۸/۵	۰/۵

رابطه بین ضریب بازیابی و میانگین زمان خرابی سیستم را می‌توان بر اساس مدل کایجیما به صورت تحلیلی $\mathbb{E}(T_{\text{sys}}) \approx \frac{\tau}{\lambda \mathbb{E}(Y)} \frac{۱}{۱-q^{\mathbb{E}(N)}}$ تقریب زد، که در آن $\mathbb{E}(N)$ میانگین تعداد تعمیرها در طول عمر سیستم است. همچنین میانگین سن مؤثر در زمان t را می‌توان با تقریب $\mathbb{E}(V(t)) \approx \frac{\Lambda(t)}{۱-q}$ تخمین زد، که در آن $\Lambda(t) = \int_۰^t \mathbb{E}(r_۰(V(s)+s))ds$ است. این روابط تحلیلی تأیید می‌کنند که با کاهش q، سن مؤثر و در نتیجه نرخ خطر افزایش یافته که منجر به کاهش قابلیت اطمینان سیستم می‌شود.

۱.۵ تخصیص بهینه منابع تقویتی

با فرض بودجه کلی $B = ۱۰۰$ واحد، مسئله تخصیص بهینه منابع برای دو استراتژی مختلف بررسی شده است. پارامترهای مربوط به هزینه و کارایی در جدول ۳ ارائه شده‌اند. توجه کنیم که با حل مسئله

جدول ۳: پارامترهای تخصیص منابع تقویتی

گره i	هزینه واحد c_i	بازدهی آستانه β_i	بازدهی بازیابی γ_i	میانگین تعداد تعمیرها $\mathbb{E}(N_i(T))$
۱	۴	۰/۹	۰/۰۸	۳/۲
۲	۳	۰/۷	۰/۱۲	۴/۱
۳	۲	۰/۵	۰/۱۵	۵/۸

بهینه‌سازی زیر

$$\max_{x_i \geq ۰} R(T;\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}\big(S_۱(T) > \tau_۱ + \beta_۱ x_۱,\ S_۲(T) > \tau_۲ + \beta_۲ x_۲,\ S_۳(T) > \tau_۳ + \beta_۳ x_۳\big)$$

به طوری که $\sum_{i=۱}^{۳} c_i x_i \leq B$ باشد، مقادیر بهینه تخصیص به صورت $x_۱^* = ۱۴/۵$، $x_۲^* = ۲۹/۸$ و $x_۳^* = ۵۵/۷$ به دست می‌آیند. برای بهبود ضرایب با حل مسئله بهینه‌سازی زیر

$$\min_{x_i \geq ۰} r_{\text{sys}}(T;\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=۱}^{۳} w_i(T)\mathbb{E}\big(r_{i,۰}\big(\frac{\Lambda_i(T)}{۱-(q_i+\gamma_i x_i)} + T\big)\big)$$
$$\sum_{i=۱}^{۳} c_i x_i \leq B$$

مقادیر بهینه تخصیص به صورت $x_۱^* = ۱۷/۸$، $x_۲^* = ۲۸/۶$ و $x_۳^* = ۵۳/۶$. محاسبه می‌شوند. همچنین با حل مسئله بهینه‌سازی ترکیبی که هر دو نوع تخصیص را همزمان بصورت

$$\max_{x_i, y_i \geq ۰} R(T;\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbb{P}\big(S_۱(T) > \tau_۱ + \beta_۱ x_۱,\ S_۲(T) > \tau_۲ + \beta_۲ x_۲,\ S_۳(T) > \tau_۳ + \beta_۳ x_۳\big)$$
$$\sum_{i=۱}^{۳} (c_i^x x_i + c_i^y y_i) \leq B$$

با در نظر گرفتن تأثیر بهبود q_i بر توزیع $S_i(T)$، مقادیر بهینه به صورت $x_۱^* = ۸/۲$، $x_۲^* = ۱۸/۴$، $x_۳^* = ۳۲/۶$، $y_۱^* = ۶/۳$، $y_۲^* = ۱۲/۸$ و $y_۳^* = ۲۱/۷$ هستند. نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که همه استراتژی‌های تخصیص منابع منجر به بهبود قابل توجه قابلیت اطمینان سیستم می‌شوند. استراتژی

مقاله پذیرفته شده

جدول ۴: مقایسه استراتژی‌های تخصیص منابع تقویتی

استراتژی	میانگین زمان خرابی	$\hat{R}(۲۰۰)$	$\hat{R}(۵۰۰)$	تخصیص بودجه $(x_۳^*, x_۲^*, x_۱^*)$
بدون تخصیص	۳۵۲/۸	۰/۶۳۱	۰/۲۴۱	(۰, ۰, ۰)
تقویت آستانه‌ها	۴۷۸/۲	۰/۷۲۸	۰/۳۷۸	(۵۵/۷, ۲۹/۸, ۱۴/۵)
بهبود بازیابی	۴۶۵/۷	۰/۷۱۵	۰/۳۶۵	(۵۳/۶, ۲۸/۶, ۱۷/۸)
ترکیب بهینه	۴۹۲/۱	۰/۷۵۲	۰/۴۱۲	(۴۳/۳, ۴۲/۲, ۱۴/۵)

ترکیبی بهینه بهترین عملکرد را دارد و می‌تواند میانگین زمان خرابی سیستم را تا ۳۹/۵ درصدافزایش دهد. توزیع منابع در بین گره‌ها نیز قابل توجه است: گره ۳ که دارای بالاترین نرخ خطر و پایین‌ترین هزینه است، بیشترین سهم از منابع را دریافت می‌کند، در حالی که گره ۱ با وجود اهمیت بالا، به دلیل هزینه بالاتر، سهم کمتری دریافت می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی جامع برای تحلیل قابلیت اطمینان شبکه‌ها تحت شوک‌های وابسته فضایی–زمانی ارائه شد که ویژگی‌هایی چون وابستگی مؤلفه‌ها، شکست تجمعی، تعمیر ناقص (مدل کایجیما نوع I) و تخصیص منابع تقویتی را به‌طور همزمان لحاظ می‌کند. در این مدل، از فرآیندهای علامت‌دار و توابع مفصل برای بازنمایی همبستگی زمان و شدت شوک‌ها استفاده شد.

تحلیل نظری و شبیه‌سازی عددی (مونت‌کارلو با ۱۰۰۰۰ تکرار) نشان داد که وابستگی میان شوک‌ها و کیفیت تعمیر، نقشی حیاتی در توزیع زمان خرابی شبکه دارند؛ به‌طوری که افزایش پارامتر وابستگی (θ) از ۰/۵ به ۵، با بالا بردن احتمال وقوع شوک‌های همزمان، میانگین زمان خرابی سیستم را ۴۱/۴ درصد کاهش می‌دهد. کاهش ضریب بازیابی (q) از ۱ به ۰/۵ در فرآیند تعمیر ناقص، موجب افت شدید و ۵۹/۱ درصدی عملکرد سیستم می‌شود و ترکیب اثر آن با پارامتر وابستگی، رفتارهای غیرخطی در تابع بقا ایجاد می‌کند. تحلیل حساسیت چندپارامتری نیز تأیید کرد که سیستم بیشترین حساسیت را نسبت به تغییرات این دو پارامتر (θ و q) دارد. علاوه بر این، با استخراج حد پایین احتمال بقا و بررسی ترتیب‌های تصادفی، مسئله تخصیص منابع تقویتی تحت قید بودجه به‌صورت تحلیلی حل شد. نتایج نشان داد که تخصیص منابع به گره‌هایی با نرخ خطر بالاتر یا ضریب بازیابی پایین‌تر، بیشترین بهبود (۳۹/۵ درصدی)

را در قابلیت اطمینان کلی ایجاد می‌کند. این یافته‌ها به طراحان شبکه‌های مقاوم کمک می‌کند تا در شرایط محدودیت منابع، سیاست‌های تقویت بهینه‌ای اتخاذ کنند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند.

مراجع

اقبالی بابادی، ع.، کرباسیان، م.، اردشیری، س. و حسنی، ف. (۱۳۹۵)، ارائه روشی مبتنی بر مدل PDS و تکنیک AHP برای محاسبه و قابلیت اطمینان با در نظر گرفتن شکست علت مشترک برای اجزا غیر یکسان (مطالعه موردی خروجی سیستم تثبیت موقعیت دینامیکی یک شناور)، نشریه مهندسی و مدیریت کیفیت، **۶**(۲)، ۱۱۷-۱۰۳.

پورسعید، م.ح. و اسدیان، ن. (۱۳۹۹)، مدلی از شوک گردشی در حالت گسسته، مجله علوم آماری، **۱۴**(۱)، ۷۲-۵۵.

مرتضوی، س.م. و کرباسیان، م. (۱۳۹۸)، ارزیابی قابلیت اطمینان سیستمهای چندوضعیتی تعمیرپذیر با در نظر گرفتن خرابی های وابسته به وسیله درخت خرابی پویا و شبکه های بیزی پویا، مهندسی صنایع و مدیریت شریف، **۳۵**(۱)، ۱۰۴-۹۱.

Belzunce, F., Mercader, J. A., Ruiz, J. M. and Spizzichino, F. (2009), Stochastic Comparisons of Multivariate Mixture Models, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 1657-1669.

Eryilmaz, S. (2015), Assessment of a Multi-state System under a Shock Model, *Applied Mathematics and Computation*, **269**, 1-8.

Jin, Y. and Zhang, Q. (2024), Cascading Failure Modeling for Circuit Systems Considering Continuous Degradation and Random Shocks Using an Impedance Network, *Symmetry*, **16**, 488.

Lisnianski, A., Frenkel, I. and Ding, Y. (2010), *Multi-state System Reliability Analysis and Optimization for Engineers and Industrial Managers*, Springer.

Lorvand, H., Nematollahi, A.R. and Poursaeed, M.H. (2020), Assessment of a Generalized Discrete Time Mixed δ-shock Model for the Multi-state Systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **366**, 112415.

Navarro, J. (2016), Stochastic Comparisons of Generalized Mixtures and Coherent Systems, *Test*, **25**, 150-169.

Ozkut, M., Kan, C. and Franko, C. (2024), Analyzing the Multi-state System under a Run Shock Model, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **38**(4), 619-631.

Poursaeed, M.H. (2018), On δ-shock Model in a Multi-state System, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **49**(7), 1761-1767.

Shanthikumar, J. G. and Sumita, U. (1983), General Shock Models Associated with Correlated Renewal Sequences, *Journal of Applied Probability*, **20**(3), 600-614.

Song, X., Zhao, P., Yin, R., Zu, Y. and Zhang, Y. (2025), Cascading Failure Model

مقاله پذیرفته شده

and Resilience-Based Sequential Recovery Strategy for Complex Networks, *Reliability Engineering and System Safety*, **253**, 110488.

Wang, G. J. and Zhang, Y. L. (2001), δ-shock Model and Its Optimal Replacement Policy, *Southeast University Journal*, **31**, 121-124.

Zhao, Y., Sun, T. and Liu, Y. (2024a), Reliability Analysis of a Loading Dependent System with Cascading Failures Considering Overloads, *Quality and Reliability Engineering International*, **40**, 1182-1196.

Zhao, Y., Cai, B., Cozzani, V. and Liu, Y. (2024b), Failure Dependence and Cascading Failures: A Literature Review and Research Opportunities, *Reliability Engineering and System Safety*, **256**, 110766.

مقاله پذیرفته شده

Network Reliability under Temporally Dependent Shocks: Cascading Failures and Imperfect Repairs

Amini-Seresht,[1], E., Lorvand, H.[2]

[1]Department of Statistics, Faculty of Science, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

[2]Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, 84156-83111, Iran.

Abstract: Large engineering infrastructures such as power grids, communication systems, and cyber-physical systems are exposed to shocks of varying intensity and scope, which, due to the dependence between components, can cause successive failures throughout the entire network. Classical reliability models are generally based on the assumption of independence between components and shocks, and therefore face limitations in describing the actual behavior of systems. In this paper, a comprehensive framework for analyzing network reliability in the presence of time-dependent signed shocks is presented. In this framework, each network node is modeled as a signed process that captures both the magnitude and timing of shocks, and the dependence structure among components is described by a copula function. In addition to statistical dependence, the proposed model also includes cumulative failure mechanisms, incomplete repair, and reinforcement resource allocation policies.

Keywords: Network reliability, Time-dependent shocks, Cascading failures, Incomplete repair, Stochastic orders.

Mathematics Subject Classification (2020): 62P05, 60E15.

مقاله پذیرفته شده