

کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار توزیع یکنواخت دو پارامتری

محمدحسین پورسعید

گروه آمار، دانشگاه لرستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۳/۱۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۰۶/۳۰

چکیده: در این مقاله بر پایه یک کمیت محوری مناسب، دو روش برای تعیین ناحیه اطمینان میانگین و انحراف معیار توزیع یکنواخت دو پارامتری معرفی می‌شود که در آن‌ها به‌کارگیری روش‌های عددی الزامی نیست. در روش اول با مینیم کردن مساحت ناحیه اطمینان، کوچکترین ناحیه اطمینان بدست آورده می‌شود و در روش دوم نیز با استفاده از کوتاه‌ترین بازه‌های اطمینان برای میانگین و انحراف معیار و به‌کارگیری فرمول بن‌فرونی، ناحیه اطمینان توأم معرفی می‌شود. با مقایسه مساحت و احتمال پوشش نواحی اطمینان معرفی شده و همچنین مقایسه پهنای نوار در برگیرنده انحراف معیار در دو روش، نشان داده می‌شود که روش اول عملکرد بهتری را دارد. در پایان نیز روشی برای تقریب چندک توزیع F که در محاسبه نواحی اطمینان از آن استفاده می‌شود، ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: توزیع یکنواخت دو پارامتری، ناحیه اطمینان، روش بن‌فرونی.

۱ مقدمه

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای با پارامترهای θ_1 و θ_2 و تابع چگالی $f(x; \theta_1, \theta_2)$ است. به کمک بازه اطمینان می‌توان برآوردی از بازه در برگیرنده هر یک از پارامترهای θ_1 یا θ_2 را ارائه نمود یا فرضیه‌های آماری مربوط به آن‌ها را آزمون کرد. همچنین با استفاده از ناحیه اطمینان توأم، استنباط

و فرضیه‌های آماری برای مولفه‌های بردار پارامتر (θ_1, θ_2) را نیز می‌توان به صورت هم‌زمان انجام داد. بر پایه روش‌های مختلف نمونه‌گیری و همچنین تحت طرح‌های مختلف سانسور، روش‌های زیادی برای تعیین ناحیه اطمینان توام پارامترهای توزیع‌ها معرفی شده‌اند که با توجه به مساحت و احتمال پوشش، مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. توزیع‌های نمایی، گاما، رایلی، پارتو و گامپترت، کاربردهای فراوانی در صنعت و علوم پزشکی دارند. از این رو، استنباط آماری پارامترهای آنها نیز به‌طور گسترده‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. وو (۲۰۱۰)، بر پایه داده‌های تحت سانسور و اصغرزاده و عبدی (۲۰۱۱) بر پایه داده‌های رکوردی، روش‌هایی را برای تعیین ناحیه اطمینان پارامترهای توزیع نمایی دو پارامتری معرفی کردند و زارع و همکاران (۱۳۹۹) نیز کوچکترین ناحیه اطمینان را ارائه دادند. موالا و همکاران (۲۰۱۳)، برآورد بیزی پارامترهای توزیع گاما، عبدی و اصغرزاده (۲۰۱۸) نیز ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع رایلی بر پایه داده‌های رکوردی و همچنین وو (۲۰۰۳)، بازه‌های اطمینان پارامترهای توزیع پارتو را تحت سانسور فزاینده مطالعه کرده‌اند. ووا و همکاران (۲۰۰۳) و یعقوب‌زاده (۱۳۹۷)، برآورد پارامترهای توزیع گامپترت را تحت سانسور نوع اول و همچنین سانسور فزاینده نوع دوم بررسی نموده‌اند. توزیع یکنواخت در مقایسه با توزیع‌های نام‌برده، کاربرد کمتر دارد. با این حال در تحلیل بعضی از داده‌ها، از توزیع یکنواخت استفاده می‌شود. یکی از مسائل متخصصان هواشناسی، برآورد حداکثر خطای اندازه‌گیری در فرایند کالیبراسیون ابزارهای اندازه‌گیری است و غالباً فرض می‌شود که توزیع خطای اندازه‌گیری به صورت نرمال یا یکنواخت است (سورینا و سیتلین، ۱۹۸۶).

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت دو پارامتری با تابع چگالی

$$f(x; \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \theta_1 < x < \theta_2 \quad (1)$$

است. برای استنباط آماری مربوط به هریک از پارامترهای (۱) یا میانگین توزیع که تابعی از پارامترهای θ_1 و θ_2 است، مطالعاتی توسط سارهان (۱۹۵۴) و گیونز (۱۹۷۴) انجام شده‌است. در بسیاری از کارهای عملی، استنباط آماری هم‌زمان پارامترها مطرح می‌شود که در این خصوص نیز بر پایه کوچکترین و بزرگترین آماره‌های ترتیبی یا ترکیبی خطی از آنها بررسی‌هایی صورت گرفته است (گیونز و لیتوین، ۱۹۷۴). اگر خطای اندازه‌گیری در فرایند کالیبراسیون دارای تابع چگالی (۱) باشد، پارامترهای θ_1 و θ_2 به ترتیب کمترین و بیشترین خطای اندازه‌گیری را نشان می‌دهند و اختلاف آنها مضرری از انحراف معیار توزیع است که توسط آکاهیرا و کوکیک (۲۰۰۵) و ژائو (۲۰۱۲) مطالعه شده است. همچنین، برآورد بیزی پارامترها توسط ایونز و جونز (۱۹۸۱) مورد بررسی قرار گرفته است. بازه‌های اطمینان پارامترهای مکان و مقیاس

توزیع یکنواخت را آکاهیرا و کویک (۲۰۰۵) به روش دنباله‌ای و مری و چکو (۲۰۱۰)، بر پایه مقادیر رکوردی ارایه نموده‌اند.

در این مقاله برای تعیین ناحیه اطمینان هم‌زمان میانگین و انحراف معیار توزیع که به صورت $\mu = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ و $\sigma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\sqrt{3}}$ هستند، دو روش معرفی می‌شود که در آنها بر خلاف بسیاری از روش‌های موجود، به‌کارگیری روش‌های عددی الزامی نیست و استفاده از جدول‌های موجود آماری کفایت می‌کند. همچنین، روشی برای تقریب چندک توزیع F ارائه می‌شود تا بدون مراجعه به جدول آن بتوان ناحیه اطمینان را با استفاده از روش تقریبی، تعیین نمود. در بخش ۲ روش‌های تعیین ناحیه اطمینان معرفی و در بخش ۳ مساحت و احتمال پوشش آنها مقایسه می‌شوند. روشی برای تقریب چندک توزیع F در حالتی خاص و همچنین نتیجه‌گیری، به ترتیب در بخش‌های ۴ و ۵ آورده می‌شوند.

۲ معرفی نواحی اطمینان

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی از (۱) و $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ نیز کوچکترین و بزرگترین آماره‌های مرتب نمونه‌ای هستند. با استفاده از کمیت محوری $\frac{X_{(1)} - \theta_1}{X_{(n)} - X_{(1)}}$ یا $\frac{\theta_2 - X_{(n)}}{X_{(n)} - X_{(1)}}$ ، می‌توان بازه اطمینان را برای θ_1 یا θ_2 بدست آورد. همچنین، با توجه به ضریب اطمینان تعیین شده $(1 - \alpha) \times 100\%$ و

$$1 - \alpha = P\left(\frac{X_{(1)} - \theta_1}{X_{(n)} - X_{(1)}} < c, \frac{\theta_2 - X_{(n)}}{X_{(n)} - X_{(1)}} < c\right) \\ = P(X_{(1)} - c(X_{(n)} - X_{(1)}) < \theta_1 < \theta_2 < X_{(n)} + c(X_{(n)} - X_{(1)})),$$

و با تعیین مقدار c نیز می‌توان ناحیه اطمینان توأم را بدست آورد که با استفاده از روش‌های عددی، بایستی مقدار c محاسبه شود. دو روش برای تعیین ناحیه اطمینان میانگین μ ، و انحراف معیار σ معرفی می‌شود که در آن‌ها به‌کارگیری روش‌های عددی الزامی نیست و استفاده از جدول‌های موجود آماری کفایت می‌کند که در بعضی از موارد نیز بهره‌گیری از جدول‌های آماری ضروری نیست.

برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی بردار پارامتر (μ, σ) به صورت $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = (\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}, \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{2\sqrt{3}})$ است، که در آن $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ به ترتیب برآوردگرهایی نااریب و مجاناً نااریب هستند. از این رو، با توجه به نااریبی برآوردگرها و همچنین ویژگی‌های ارزنده برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی، $(M, R) = (\frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{r\sigma}} + 1, \frac{\hat{\sigma}}{\sigma})$ یک کمیت محوری مناسب خواهد بود. اگر $U_{(1)}$ و $U_{(n)}$ کوچکترین و بزرگترین آماره‌های مرتب متناظر با

۲۶ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

یک نمونه n تایی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ باشند، آن گاه $M \sim U(0) + U(n)$ و $R \sim U(n) - U(0)$ ، که در آن « \sim » نماد هم توزیعی است.

قضیه ۱. کوچکترین ناحیه اطمینان برای μ و σ با ضریب اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ ، به صورت

$$\hat{\mu} - \sqrt{3}(\sigma - \hat{\sigma}) < \mu < \hat{\mu} + \sqrt{3}(\sigma - \hat{\sigma}), \quad \hat{\sigma} < \sigma < (1 + \frac{\sqrt{3}f_{\sqrt{3}, \sqrt{3}(n-1), \alpha}}{n-1})\hat{\sigma} \quad (2)$$

است، که در آن $f_{m, n-1-\gamma}$ چندک مرتبه γ در توزیع F با درجات آزادی m و n است.

برهان: تابع چگالی $f_{M,R}(m, r)$ به صورت

$$f_{M,R}(m, r) = \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2}, \quad 0 < r < m < 2 - r$$

است که نسبت به m ، ثابت و نسبت به r نیز تابعی صعودی است. از این رو کوچکترین ناحیه اطمینان، قسمتی مثلثی شکل از تکیه گاه (M, R) خواهد بود که در آن، تابع چگالی بیشترین مقدار را دارد. بنابراین c را بایستی به گونه ای بیابیم که

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(R < M < 2 - R, c < R < 1) \\ &= \int_c^1 \int_r^{2-r} \frac{n(n-1)}{2} r^{n-2} dm dr \\ &= \int_c^1 n(n-1) r^{n-2} (1-r) dr \\ &= 1 - [nc^{n-1} - (n-1)c^n] \equiv P(R > c). \end{aligned} \quad (3)$$

با روش های عددی می توان مقدار c را محاسبه کرد، ولی با توجه به این که R به صورت بتا با پارامترهای $n-1$ و 2 توزیع شده است و با توجه به رابطه بین توزیع بتا و توزیع F ، داریم

$$\begin{aligned} P(R > c) &= P\left(\frac{2R}{2(n-1)(1-R)} > \frac{2c}{2(n-1)(1-c)}\right) \\ &= P(F_{2(n-1), 2} > \frac{2c}{(n-1)(1-c)}) \end{aligned}$$

که در آن

$$c = \frac{(n-1)f_{\mathfrak{z}(n-1),\mathfrak{z},1-\alpha}}{\mathfrak{z} + (n-1)f_{\mathfrak{z}(n-1),\mathfrak{z},1-\alpha}} = \frac{(n-1)}{(n-1) + \mathfrak{z}f_{\mathfrak{z},\mathfrak{z}(n-1),\alpha}} \quad (4)$$

و با جایگذاری c در

$$1 - \alpha = P\left(\frac{\hat{\sigma}}{\sigma} < \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sqrt{\mathfrak{z}}\sigma} + 1 < \mathfrak{z} - \frac{\hat{\sigma}}{\sigma}, c < \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} < 1\right),$$

ناحیه اطمینان مورد نظر بدست می‌آید.

حال با استفاده از فرمول بن‌فرونی، روشی دیگر برای ناحیه اطمینان توأم معرفی می‌شود. برای تعیین ناحیه اطمینان با ضریب اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ ، بایستی مقادیر a_1, a_2, a_3, a_4 با توجه به

$$P(a_1 < M < a_2) = P(a_3 < R < a_4) = 1 - \frac{\alpha}{\mathfrak{z}} \quad (5)$$

تعیین شوند، که برای معرفی یک ناحیه اطمینان مطلوب، مقادیر به گونه‌ای تعیین می‌شوند تا بازه‌های اطمینان متناظر با (۵) کوتاه‌ترین طول را داشته باشند. از این رو، ناحیه اطمینان حاصل از به‌کارگیری بن‌فرونی برای بازه‌های اطمینان بهینه، ناحیه اطمینان بهینه بن‌فرونی نامیده می‌شود. توابع چگالی حاشیه‌ای M و R به ترتیب به صورت

$$f_R(r) = n(n-1)r^{n-2}(1-r), \quad 0 < r < 1$$

$$f_M(m) = \frac{n}{\mathfrak{z}}(\min\{m, \mathfrak{z} - m\})^{n-1} = \frac{n}{\mathfrak{z}}(1 - |m - 1|)^{n-1}, \quad |m - 1| < 1$$

هستند و تابع چگالی f_M نسبت به $m = 1$ متقارن است.

قضیه ۲. ناحیه اطمینان بهینه بن‌فرونی برای μ و σ ، به ترتیب به صورت

$$\hat{\mu} - \sqrt{\mathfrak{z}}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}}\right)\sigma < \mu < \hat{\mu} + \sqrt{\mathfrak{z}}\left(1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}}\right)\sigma,$$

$$\hat{\sigma} < \sigma < \left(1 + \frac{\mathfrak{z}f_{\mathfrak{z},\mathfrak{z}(n-1),\frac{\alpha}{\mathfrak{z}}}}{n-1}\right)\hat{\sigma} \quad (6)$$

۲۸ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

و دارای ضریب اطمینانی بین $(1 - \alpha) \times 100\%$ تا $(1 - \frac{\alpha}{\gamma}) \times 100\%$ هستند.

برهان: با توجه به تقارن تابع چگالی M ، کوتاهترین بازه اطمینان برای μ معادل با بازه اطمینان با دم‌های برابر است. از این‌رو با توجه به (δ) و $1 - \frac{\alpha}{\gamma} = P(b < M < 2 - b)$ ، مقدار $b = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\gamma}}$ بدست می‌آید. از طرفی با توجه به $1 - \frac{\alpha}{\gamma} = P(a_3 < R < a_4)$ یا $1 - \frac{\alpha}{\gamma} = P(a_3 < \frac{\hat{\sigma}}{\sigma} < a_4)$ ، بایستی a_3 و a_4 به گونه‌ای تعیین شوند که تحت قید $1 - \frac{\alpha}{\gamma} = \int_{a_3}^{a_4} n(n-1)r^{n-2}(1-r)dr$ تابع $L = \hat{\sigma}(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4})$ مینیمم شود. با انجام محاسبات، $1 - \frac{\alpha}{\gamma} = \int_{a_3}^1 n(n-1)r^{n-2}(1-r)dr$ و $a_4 = 1$ بدست می‌آید، که با توجه به

$$\frac{\alpha}{\gamma} = n(a_3)^{n-1} - (n-1)(a_3)^n, \quad (7)$$

و به‌کارگیری روش‌های عددی نیز می‌توان a_3 را محاسبه نمود. با این حال، با بهره‌گیری از روش به‌کار رفته در اثبات قضیه ۱، رابطه $a_3 = \frac{(n-1)}{(n-1) + 2f_{\gamma, 2(n-1), \frac{\alpha}{\gamma}}}$ ، a_3 برقرار است که با جای‌گذاری آن در (δ) ، ناحیه اطمینان معرفی شده در (ϵ) حاصل می‌شود. ضمناً کمترین و بیشترین مقدار ضریب اطمینان نیز با توجه به $P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\}$ تعیین شده است.

۳ مقایسه روش‌ها

با توجه به (2) و (6) ، نواحی اطمینان متناظر با دو روش به ترتیب، مثلثی و دوزنقه‌ای شکل و دارای مساحت‌های

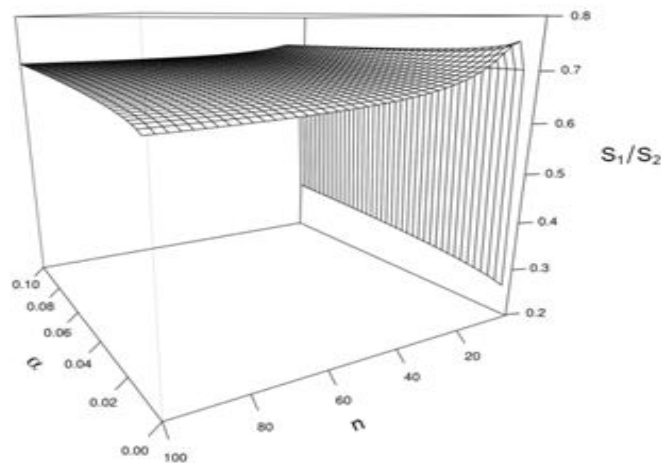
$$S_1 = \frac{2\sqrt{3}\hat{\sigma}^2(f_{\gamma, 2(n-1), \alpha})^2}{(n-1)^2}$$

$$S_2 = \frac{2\sqrt{3}\hat{\sigma}^2(1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\gamma}})[n-1 + f_{\gamma, 2(n-1), \frac{\alpha}{\gamma}}]f_{\gamma, 2(n-1), \frac{\alpha}{\gamma}}}{(n-1)^2}$$

هستند. نظر به اینکه مساحت‌های دو ناحیه بستگی به برآوردگر انحراف معیار دارند، از این رو برای مقایسه دو روش معرفی شده، نسبت آن‌ها

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(f_{\frac{1}{2}, 2(n-1), \alpha})^2}{(1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha}{1-\alpha}})[n-1 + f_{\frac{1}{2}, 2(n-1), \frac{\alpha}{1-\alpha}}]f_{\frac{1}{2}, 2(n-1), \frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

در نظر گرفته می‌شود. در این صورت، نسبت مساحت‌ها فقط به اندازه نمونه و چندک‌های توزیع F بستگی دارد و برای مقایسه روش‌ها، مطالعات شبیه‌سازی ضروری نیست. در شکل ۶، نسبت مساحت‌های دو ناحیه اطمینان با ضرایب اطمینان $0.9, 0.91, \dots, 0.99$ و $1 - \alpha$ با اندازه‌های نمونه‌ای $n = 2, 3, \dots, 99, 100$ رسم شده است.



شکل ۱. نسبت مساحت‌ها در دو روش به ازای $\alpha = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ و $n = 2, 3, \dots, 99, 100$

در شکل ۶ ملاحظه می‌شود که به ازای همه n و α ‌های در نظر گرفته شده، نسبت مساحت روش اول به روش دوم کمتر از یک است که نشان دهنده کوچکتر بودن مساحت روش اول و برتری آن است. برای مقایسه بهتر، در جدول ۱ به ازای بعضی از مقادیر n و α ، نسبت مساحت‌های نواحی اطمینان در دو روش نیز محاسبه شده است.

همان‌گونه که در جدول ۱ نیز ملاحظه می‌شود، نسبت مساحت روش اول به روش دوم کمتر از یک

۳۰ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

جدول ۰۱. نسبت مساحت روش اول به روش دوم S_1/S_2

n	α		
	$0/1$	$0/05$	$0/01$
۵	۰/۵۸	۰/۶۲	۰/۶۷
۱۰	۰/۵۸	۰/۶۱	۰/۶۶
۳۰	۰/۵۵	۰/۵۷	۰/۶۰
۵۰	۰/۵۴	۰/۵۶	۰/۵۹
۷۰	۰/۵۴	۰/۵۶	۰/۵۸
۱۰۰	۰/۵۴	۰/۵۶	۰/۵۷

است که کمترین مساحت ناحیه اطمینان در روش اول را نشان می‌دهد و برتری آن با افزایش اندازه نمونه نیز بیشتر نمایان می‌شود. با توجه به قضیه‌های ۱ و ۲، ضریب اطمینان در روش اول برابر با $(1 - \alpha)100\%$ و در روش دوم نیز بین $(1 - \alpha)100\%$ تا $(1 - \frac{\alpha}{2})100\%$ است. از این رو ضریب اطمینان روش دوم بیشتر است و برای مقایسه‌ای جامع‌تر، بایستی علاوه بر مساحت، مقدار دقیق ضرایب اطمینان در دو روش نیز محاسبه و مقایسه شوند. برای محاسبه ضریب اطمینان روش دوم، بایستی حدود انتگرال مکرر متناظر با انتگرال مضاعف $\int \int f_{M,R}(m, r) dA$ را با توجه به

$$A = \{(m, r) : b < m < 2 - b, d < r < 1\}, b = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}, d = \frac{(n-1)}{(n-1) + 2f_{2,2(n-1), \frac{\alpha}{2}}},$$

تعیین کرد. از این رو با توجه به (۷)، تابع $g(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$ در نظر گرفته می‌شود که بر بازه $(0, 1)$ ، تابعی صعودی و پیوسته است. با در نظر گرفتن $a_3 \equiv d$ و

$$g(b) = g\left(\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}\right) = n\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}} - (n-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{\alpha}{2} = g(d) \Rightarrow b < d,$$

ضریب اطمینان روش دوم به صورت

$$\int_d^1 \int_r^{2-r} \frac{n(n-1)}{2} dm dr = 1 - \frac{\alpha}{2} - n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}\right)\left(\frac{n-1}{n-1 + 2f_{2,2(n-1), \frac{\alpha}{2}}}\right)^{n-1}$$

محاسبه می‌شود. در جدول ۲ به ازای بعضی از مقادیر n و $\alpha = 0/1, 0/05, 0/01$ ، اختلاف ضرایب اطمینان در دو روش و همچنین $\frac{S_2 - S_1}{S_1}$ یعنی افزایش نسبی مساحت روش دوم نسبت به روش اول تعیین

و محاسبه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، به‌کارگیری روش دوم در مقایسه با روش اول منجر

جدول ۲. افزایش نسبی مساحت روش دوم و اختلاف ضرایب اطمینان دو روش

$\frac{S_2 - S_1}{S_1}$	اختلاف ضرایب اطمینان	ضریب اطمینان روش دوم	n	$1 - \alpha$
۰/۵۵	۰/۰۱۰۷	۰/۹۱۰۷	۲	۰/۹۰
۰/۷۲	۰/۰۱۹۰	۰/۹۱۹۰	۵	
۰/۷۳	۰/۰۲۱۵	۰/۹۲۱۵	۱۰	
۰/۷۶	۰/۰۲۲۴	۰/۹۲۲۴	۱۵	
۰/۷۹	۰/۰۲۲۸	۰/۹۲۲۸	۲۰	
۰/۸۰	۰/۰۲۳۰	۰/۹۲۳۰	۲۵	
۰/۸۱	۰/۰۲۳۲	۰/۹۲۳۲	۳۰	
۰/۸۲	۰/۰۲۳۳	۰/۹۲۳۳	۳۵	
۰/۸۳	۰/۰۲۳۳	۰/۹۲۳۳	۴۰	
۰/۸۴	۰/۰۲۳۵	۰/۹۲۳۵	۵۰	
۰/۸۶	۰/۰۲۳۷	۰/۹۲۳۷	۱۰۰	
۰/۵۸	۰/۰۰۳۸	۰/۹۵۳۸	۲	۰/۹۵
۰/۶۲	۰/۰۰۸۱	۰/۹۵۸۱	۵	
۰/۶۴	۰/۰۰۹۶	۰/۹۵۹۶	۱۰	
۰/۶۸	۰/۰۱۰۱	۰/۹۶۰۱	۱۵	
۰/۷۱	۰/۰۱۰۳	۰/۹۶۰۳	۲۰	
۰/۷۳	۰/۰۱۰۴	۰/۹۶۰۴	۲۵	
۰/۷۵	۰/۰۱۰۵	۰/۹۶۰۵	۳۰	
۰/۷۵	۰/۰۱۰۶	۰/۹۶۰۶	۳۵	
۰/۷۶	۰/۰۱۰۶	۰/۹۶۰۶	۴۰	
۰/۷۸	۰/۰۱۰۷	۰/۹۶۰۷	۵۰	
۰/۸۰	۰/۰۱۰۸	۰/۹۶۰۸	۱۰۰	
۰/۷۶	۰/۰۰۰۴	۰/۹۹۰۴	۲	۰/۹۹
۰/۵۰	۰/۰۰۱۲	۰/۹۹۱۲	۵	
۰/۵۲	۰/۰۰۱۵	۰/۹۹۱۵	۱۰	
۰/۵۷	۰/۰۰۱۶	۰/۹۹۱۶	۱۵	
۰/۶۲	۰/۰۰۱۷	۰/۹۹۱۷	۲۰	
۰/۶۴	۰/۰۰۱۷	۰/۹۹۱۷	۲۵	
۰/۶۶	۰/۰۰۱۷	۰/۹۹۱۷	۳۰	
۰/۶۸	۰/۰۰۱۸	۰/۹۹۱۸	۳۵	
۰/۶۹	۰/۰۰۱۸	۰/۹۹۱۸	۴۰	
۰/۷۱	۰/۰۰۱۸	۰/۹۹۱۸	۵۰	
۰/۷۵	۰/۰۰۱۸	۰/۹۹۱۸	۱۰۰	

به افزایش چشم‌گیری در میزان مساحت ناحیه اطمینان می‌شود. برای مثال، به ازای $n = ۱۰$ ، ضریب

۳۲ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

اطمینان روش اول ۰/۹۹ و در روش دوم برابر با ۰/۹۹۱۵ و میزان افزایش نسبی در مساحت نیز برابر با $\frac{S_2 - S_1}{S_1} = ۰/۵۲$ است و بیانگر آنست که در به کارگیری دو روش برای یک نمونه ۱۰ تایی، ضریب اطمینان روش دوم به میزان ۰/۰۱۵ بیشتر است. همچنین، بهره گیری از روش دوم باعث می شود که مقدار مساحت ناحیه اطمینان در مقایسه با روش اول به میزان ۵۲٪ افزایش یابد.

با توجه به کاربرد توزیع یکنواخت دو پارامتری در تعیین دامنه خطای ابزارهای اندازه گیری، پهنای بازه های اطمینان در برگیرنده σ نیز می تواند معیاری مناسب برای ارزیابی آنها باشد. از این منظر نیز روش ها مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرند. نظر به روابط (۲) و (۶)، بازه های در برگیرنده σ در روش اول و دوم به ترتیب به صورت $(\hat{\sigma}, \frac{\hat{\sigma}}{c})$ و $(\hat{\sigma}, \frac{\hat{\sigma}}{d})$ هستند که با توجه به (۳) و (۷) و اینکه $a_3 \equiv d$ ، روابط

$$nc^{n-1} - (n-1)c^n = \alpha, \quad nd^{n-1} - (n-1)d^n = \frac{\alpha}{\gamma} \quad (۸)$$

برقرار هستند. بنابر (۸) و صعودی بودن تابع $g(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$ بر بازه $(۰, ۱)$ ، روابط

$$n\left(\frac{c}{n-\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{c}{n-\sqrt{\gamma}}\right)^n = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad nd^{n-1} - (n-1)d^n = \frac{\alpha}{\gamma},$$

برقرار هستند. بنابراین

$$g(d) = n\left(\frac{c}{n-\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{c}{n-\sqrt{\gamma}}\right)^n < g\left(\frac{c}{n-\sqrt{\gamma}}\right),$$

$$d < \frac{c}{n-\sqrt{\gamma}} < c, \quad \frac{\hat{\sigma}}{c} < \frac{n-\sqrt{\gamma}\hat{\sigma}}{c} < \frac{\hat{\sigma}}{d}$$

مقایسه موقعیت نقاط پایانی در دو بازه، عملکرد بهتر روش اول، به ویژه برای n های کوچک را نشان می دهد. برای بررسی بیشتر، نسبت پهنای دو نوار یعنی $\frac{c(1-d)}{d(1-c)} = \frac{f_{\gamma, 2(n-1), \frac{\alpha}{\gamma}}}{f_{\gamma, 2(n-1), \alpha}}$ نیز به ازای مقادیر متداول $\alpha = ۰/۱, ۰/۵, ۰/۸$ و مقادیر مختلف n محاسبه شده که نتایج آن در جدول ۳ آمده است. همان طور که ملاحظه می شود نسبت پهنای نوارهای در برگیرنده σ در روش دوم نسبت به روش اول بیشتر از یک است که برتری روش اول را از این منظر نیز نشان می دهد.

جدول ۳. نسبت پهنای نوارهای در برگیرنده σ روش دوم به روش اول

α			n
$^{\circ}/^{\circ}1$	$^{\circ}/^{\circ}5$	$^{\circ}/^{\circ}1$	
۲	۲,۰۴	۲,۰۸	۲
۱,۲۵	۱,۳۲	۱,۳۷	۵
۱,۱۸	۱,۲۳	۱,۲۸	۱۰
۱,۱۵	۱,۲۰	۱,۲۷	۱۵
۱,۱۵	۱,۲۰	۱,۲۵	۲۰
۱,۱۴	۱,۱۹	۱,۲۳	۲۵
۱,۱۴	۱,۱۹	۱,۲۳	۳۰
۱,۱۴	۱,۱۹	۱,۲۳	۳۵
۱,۱۴	۱,۱۹	۱,۲۳	۴۰
۱,۱۲	۱,۱۹	۱,۲۳	۴۵
۱,۱۲	۱,۱۹	۱,۲۳	۵۰
۱,۱۲	۱,۱۸	۱,۲۲	۱۰۰

۴ تقریب چندک توزیع F در حالتی خاص

در به کارگیری نواحی اطمینان معرفی شده، بایستی مقدار $f_{\alpha,n,\alpha}$ به ازای مقادیر n و α تعیین شود که برای مقادیر معدود α ، می توان از جدول F استفاده نمود. همچنین به ازای بعضی از مقادیر α ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\alpha,n,\alpha}$ را می توان با استفاده از جدول F تعیین کرد یا با بهره گیری از جدول χ^2 تقریب زد. با این حال با توجه به مطالب مطرح شده، روشی برای تقریب $f_{\alpha,n,\alpha}$ ارائه می شود که به کارگیری آن برای مقادیر بزرگ n و همه مقادیر α مناسب است. با توجه به (۴)،

$$f_{\alpha,2(n-1),\alpha} = \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{c} - 1 \right), \quad (9)$$

برقرار است که برای تعیین چندک، بایستی مقدار c محاسبه شود. لازم به ذکر است که در تعیین فرمول های ناحیه اطمینان، برای پرهیز از به کارگیری روش های عددی، مقدار c بر حسب چندک توزیع F معرفی شد ولی در این بخش، با تقریب مقدار c ، روش هایی برای تقریب (۹) ارائه می شود تا در تعیین نواحی اطمینان معرفی شده، الزامی در به کارگیری روش های عددی یا مراجعه به جدول توزیع F نباشد. با توجه به (۸)، صعودی و پیوسته بودن تابع $h(x) = nx^{n-1} - (n-1)x^n - \alpha$ بر بازه $(0, 1)$ ،

$$h(0) = -\alpha < 0 = h(c) < h(\sqrt[n]{\alpha})$$

۳۴ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

و همچنین با توجه به قضیه مقدار میانی، مقدار c بین صفر و $\sqrt[n]{\alpha}$ خواهد بود. از این رو، عددی مانند $k_\alpha (> 1)$ وجود دارد به گونه‌ای که $c = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{k_\alpha}}$ و

$$\circ = h(c) = h\left(\sqrt[n]{\frac{\alpha}{k_\alpha}}\right) = \frac{\alpha}{k_\alpha} \left[n\left(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1\right) - (k_\alpha - 1) \right]. \quad (10)$$

با جایگذاری $c = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{k_\alpha}}$ در (۹)، رابطه $f_{\frac{n-1}{2}, 2(n-1), \alpha} = \frac{n-1}{2} \left(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1 \right)$ بدست می‌آید. بنابراین با توجه به (۱۰)، حل معادله $\circ = n\left(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1\right) - (k_\alpha - 1)$ و تعیین k_α ، می‌توان مقدار چندک را محاسبه نمود که حل معادله مستلزم به‌کارگیری روش‌های عددی است. از طرفی برای n های بسیار بزرگ، k_α را باید به گونه‌ای بیابیم که $\circ = \lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1) - (k_\alpha - 1)]$ می‌توان نشان داد $\lim_{n \rightarrow \infty} [n(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1)] = \ln(\frac{k_\alpha}{\alpha})$ بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{n-1}{2}, 2(n-1), \alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2} \left(\sqrt[n]{\frac{k_\alpha}{\alpha}} - 1 \right) = \ln \sqrt{\frac{k_\alpha}{\alpha}} \quad (11)$$

برقرار است که در این حالت نیز تعیین چندک مستلزم محاسبه k_α است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، (۱۰) به ازای مقادیر بسیار بزرگ n برابر با صفر است هرگاه $\frac{k_\alpha}{\alpha e^{\frac{k_\alpha}{k_\alpha-1}}} = 1$ ، و محاسبه ریشه تابع $M(k_\alpha) = \alpha e^{k_\alpha-1} - k_\alpha$ نیز بدون به‌کارگیری روش‌های عددی میسر نیست. از این رو، بدون محاسبه ریشه تابع، به آسانی می‌توان دو عدد متوالی در برگیرنده ریشه $M(k_\alpha)$ را در نظر گرفت. بنابراین، اگر k_α^* ریشه $M(k_\alpha)$ و $[\cdot]$ و $\lceil \cdot \rceil$ را نیز به ترتیب نمادهای توابع کف و سقف بدانیم، $[k_\alpha^*]$ و $\lceil k_\alpha^* \rceil$ دو عدد متوالی مربوطه خواهند بود که با توجه به

$$\ln \sqrt{\frac{[k_\alpha^*]}{\alpha}} < \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{n-1}{2}, 2(n-1), \alpha} < \ln \sqrt{\frac{\lceil k_\alpha^* \rceil}{\alpha}}, \quad (12)$$

کران‌های (۱۲) می‌توانند تقریبی از چندک را ارائه دهند. با این حال، می‌توان روشی ساده‌تر برای تقریب چندک معرفی کرد که به ازای مقادیر متداول α عملکرد مناسبی را دارد. از این رو، با در نظر گرفتن مجدد تابع $M(k_\alpha)$ ، ملاحظه می‌شود که بر بازه $(1 - \ln \alpha, \infty)$ تابعی صعودی و پیوسته است و همچنین

$$M(1 - \ln \alpha) = \ln \alpha < \circ < \lim_{k_\alpha \rightarrow \infty} M(k_\alpha).$$

بنابراین، تنها ریشه تابع بزرگتر از $1 - \ln \alpha$ است و به ازای $\frac{2}{e} \simeq 0.74 < \alpha < 1$ ،
 $1 - \ln(\frac{\alpha}{4})$ ، $0 < \alpha < \frac{4}{e^2} \simeq 0.14$ ، $0 < \alpha < \frac{5}{e^4} \simeq 0.09$ ، به ترتیب $1 - \ln(\frac{\alpha}{4})$ ،
 $1 - \ln(\frac{\alpha}{5})$ و $1 - \ln(\frac{\alpha}{6})$ تقریب‌هایی نقصانی از ریشه تابع $M(k_\alpha)$ خواهند بود. از
 این رو، برای مقادیر کوچک $0.1 < \alpha < 0.05$ ، $1 - \ln(\frac{\alpha}{6})$ تقریبی مناسب برای ریشه تابع $M(k_\alpha)$
 و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{2}{e}, 2(n-1), \alpha} \cong \ln \sqrt{\frac{1 - \ln(\frac{\alpha}{6})}{\alpha}} \quad (13)$$

نیز تقریبی سهل‌الوصول برای چندک است. در جدول ۹، تقریب $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{2}{e}, 2(n-1), \alpha}$ توسط (۱۳)
 و کران‌های در برگیرنده آن توسط (۱۲)، به‌ازای $0.1, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005, \alpha$ محاسبه و با مقدار
 دقیق متناظر مقایسه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، کران‌های (۱۲) تقریب‌های مناسبی را به

جدول ۴. مقایسه $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{2}{e}, n, \alpha}$ با تقریب (۱۳) و کران‌های (۱۲)

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{2}{e}, n, \alpha}$	$\ln \sqrt{\frac{[k_\alpha^*]}{\alpha}}$	$\ln \sqrt{\frac{[k_\alpha^*]}{\alpha}}$	$[k_\alpha^*]$	$[k_\alpha^*]$	$\ln \sqrt{\frac{1 - \ln(\frac{\alpha}{6})}{\alpha}}$	α
۳.۷۲	۳.۷۵	۳.۶۹	۹	۸	۳.۶۹	۰.۰۰۵
۳.۳۲	۳.۳۴	۳.۲۸	۸	۷	۳.۳۰	۰.۰۱
۲.۷۹	۲.۸۲	۲.۷۴	۷	۶	۲.۷۸	۰.۰۲۵
۲.۳۷	۲.۳۹	۲.۳	۶	۵	۲.۳۸	۰.۰۵
۱.۹۴	۱.۹۶	۱.۸۴	۵	۴	۱.۹۶	۰.۱

ازای مقادیر در نظر گرفته شده α ارائه می‌دهند. لازم به ذکر است که کران‌های پایین و بالای مذکور، به
 ترتیب تقریب‌هایی نقصانی و اضافی برای چندک ارائه می‌کنند و به‌کارگیری تقریب نقصانی چندک در نواحی
 اطمینان معرفی شده نیز باعث کمتر شدن احتمال پوشش آن‌ها می‌گردد. از این رو، کران بالای (۱۲) تقریبی
 مطمئن‌تر است. بنابراین برای سایر مقادیر α که $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\frac{2}{e}, n, \alpha}$ متناظر با آن‌ها در جدول F موجود
 نیست، می‌توان با بهره‌گیری از کران بالای (۱۲) نسبت به تقریب آن اقدام کرد یا با محاسبه ریشه $M(k_\alpha)$
 و بهره‌گیری از (۱۱)، مقدار آن چندک را تعیین نمود. همچنین برای $0.1 > \alpha > 0.005$ ، به کارگیری
 (۱۳) که دارای فرمی بسته است نیز آسان و مناسب خواهد بود.

نکته ۱. اگر با استفاده از روش‌های عددی، ریشه $\alpha e^{k_\alpha - 1} - k_\alpha = 0$ به ازای $\alpha =$

۳۶ کوچکترین ناحیه اطمینان برای میانگین و انحراف معیار

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{\alpha, n, \alpha}$ و $\ln \sqrt{\frac{k_{\alpha}}{\alpha}}$ محاسبه شود، حداکثر اختلاف بین مقادیر $0.05, 0.1, 0.25, 0.5, 1$ برابر با 0.06 است.

نکته ۲. برای n های بزرگ و $0.05 < \alpha < 1$ ، کوچکترین ناحیه اطمینان برای μ و σ با ضریب اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ را نیز می‌توان معرفی کرد:

$$\hat{\mu} - \sqrt{3}(\sigma - \hat{\sigma}) < \mu < \hat{\mu} + \sqrt{3}(\sigma - \hat{\sigma}), \quad \hat{\sigma} < \sigma < \left(1 + \frac{\ln\left(\frac{1 - \ln(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}})}{\alpha}\right)}{n - 1}\right)\hat{\sigma}$$

۵ بحث و نتیجه‌گیری

دو روش برای تعیین ناحیه اطمینان میانگین و انحراف معیار توزیع یکنواخت دو پارامتری ارائه شد که برای محاسبه آن‌ها به‌کارگیری روش‌های عددی الزامی نیست. برپایه معیارهای مساحت و ضریب اطمینان، نواحی اطمینان معرفی شده مورد ارزیابی قرار گرفتند. هرگاه به جای به‌کارگیری روش اول از روش دوم استفاده شود، مساحت ناحیه اطمینان نسبت به روش اول بیشتر می‌شود و ضریب اطمینان نیز کمی افزایش می‌یابد. همچنین برای نمونه‌های بزرگ، برتری روش اول بیشتر محسوس می‌شود. با در نظر گرفتن پهنای نوار در برگرفته σ ، ملاحظه می‌شود که روش اول نیز برتری دارد و پهنای نوار در روش دوم همواره بیشتر از روش اول است. همچنین با افزایش n ، نسبت پهنای نوار در روش دوم نسبت به روش اول کاهش می‌یابد، با توجه به معیارهای ذکر شده، روش اول عملکرد بهتری را نسبت به روش دوم نشان می‌دهد که در واقع بیانگر آن است که ناحیه اطمینان بهینه نسبت به ناحیه اطمینان حاصل از به‌کارگیری بن‌فرونی برای بازه‌های اطمینان بهینه برتری دارد. همچنین برای n های بزرگ روش‌های تقریب چنک توزیع F ، کوچکترین ناحیه اطمینان برای μ و σ با ضریب اطمینان $(1 - \alpha) \times 100\%$ نیز معرفی شد که بدون بهره‌گیری از روش‌های عددی یا جدول‌های آماری، قابل استفاده است.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از سردبیر و ویراستار محترم مجله، برای ارزیابی و ویرایش اساسی مقاله و از داوران محترم مجله برای ارائه پیشنهادات ارزشمند که باعث ارائه بهتر مقاله شده است، کمال تشکر و سپاس را دارد.

مراجع

زارع، م.، اصغرزاده، الف. و باقری، س. (۱۳۹۹)، کوچکترین ناحیه اطمینان برای پارامترهای توزیع نمایی دوپارامتری، *مجله علوم آماری*، ۱۴، ۱۷۴-۱۵۵.

یعقوب زاده، ش. (۱۳۹۷)، برآورد پارامترهای مکان و شکل توزیع گومپرتز با آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، *مجله علوم آماری*، ۱۲، ۲۷۹-۲۵۵.

Abdi, M. and Asgharzadeh, A. (2018), Rayleigh Confidence Regions Based on Record Data, *Journal of Statistical Research of Iran*, **14**, 171-188.

Akahira, M. and Koike, K. (2005), Sequential Interval Estimation of a Location Parameter with the Fixed Width in the Uniform Distribution with an Unknown Scale Parameter, *Sequential Analysis*, **24**, 63-75.

Asgharzadeh, A. and Abdi, M. (2011), Confidence Intervals and Joint Confidence Region for the Two Parameter Exponential Distribution based on Records, *Communications of the Korean Statistical Society*, **18**, 103-110.

Evans, I.G. and Jones, P.W. (1981), Bayesian Inferences for the Two Parameter Uniform Distribution, *Series Statistics*, **12**, 403-408.

Ferentinos, K.K. (1987), Shortest Confidence Intervals and UMVU Estimators for Families of Distributions Involving Truncation Parameters, *Metrika*, **34**, 341-359.

Gibbons, J.D. (1974), Estimation of the Unknown Upper Limit of a Uniform Distribution, *Sankhya*, **36**, 29-40.

Gibbons, J.D. and Litwin, S. (1974), Simultaneous Estimation of the Unknown Upper and Lower Limits in a Two-Parameter Uniform Distribution, *Sankhya*, **36**, 41-54.

- Mary, S. M. and Chacko, M. (2010), Estimation of Parameters of Uniform Distribution Based on K-Record Values, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **62**, 143–158.
- Moala F. A., Ramos P. L. and Achcar J. A. (2013), Bayesian Inference for Two-Parameter Gamma Distribution Assuming Different Noninformative Priors, *Revista Colombiana de Estadística*, **36**, 321-338.
- Sarhan, A. E. (1954), Estimation of the Mean and Standard Deviation by Order Statistics, *Annals of Mathematical Statistics*, **25**, 317-328.
- Surnina, T.A. and Tseitlin, V.G. (1986), Upper Confidence Limit for the Uniform Distribution Parameter, *Measurement Techniques*, **29**, 266–267.
- Wu, S. (2003), Estimation for the Two-Parameter Pareto Distribution Under Progressive Censoring with Uniform Removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 125- 134.
- Wu, S. F. (2010), Interval Estimation for the Two-Parameter Exponential Distribution Under Progressive Censoring, *Quality and Quantity*, **41**, 181-189.
- Wua, J. , Hungb, W. and Tsala, C. (2003), Estimation of the Parameters of the Gompertz Distribution Under the first Failure-Censored Sampling Plan, *Statistics*, **37**, 517-525.
- Zhao, Z. (2012), Parameter Estimation with Resistance for Uniform Distribution, *Physics Procedia, International Conference on Medical Physics and Biomedical Engineering*, **33**, 1468-1474.

Smallest Confidence Region for the Mean and Standard Deviation of Two - Parameter Uniform Distribution

Poursaeed, M. H.

Department of Statistics, Lorestan University, Khorramabad, Iran.

Abstract: In this paper, based on an appropriate pivotal quantity, two methods are introduced to determine confidence region for the mean and standard deviation in a two parameter uniform distribution, in which the application of numerical methods is not mandatory. In the first method, the smallest region is obtained by minimizing the confidence region's area, and in the second method, a simultaneous Bonferroni confidence interval is introduced by using the smallest confidence intervals. By the comparison of area and coverage probability of the introduced methods, as well as, comparison of the width of strip including the standard deviation in both methods, it has been shown that the first method has a better efficiency. Finally, an approximation for the quantile of F distribution used in calculating the confidence regions in a special case is presented.

Keywords: Bonferroni method, Joint confidence region, Two-parameter uniform distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F25, 62F30.