

اندازه نمونه بهینه براساس تابع هزینه در مدل سانسور فزاینده نوع دو

الهام بصیری^۱، سید مهدی صالحی^۲

^۱گروه آمار، دانشگاه کوثر بجنورد

^۲گروه آمار، دانشگاه نیشابور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۵/۲۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۰۴

چکیده: امروزه استنباط براساس نمونه‌های سانسور شده توسط پژوهش‌گران زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از معمول‌ترین روش‌های سانسور، سانسور فزاینده نوع دو از راست است. در این روش از سانسور n واحد در آزمایش قرار می‌گیرند و در زمان از کارافتادگی هر واحد تعدادی از واحدهای باقیمانده از آزمایش خارج می‌شوند. این کار ادامه می‌یابد تا به ازای یک مقدار از قبل تعیین شده مانند m ، زمان‌های از کارافتادگی m واحد ثبت شوند و سپس آزمایش خاتمه می‌یابد. برای تعیین بهترین تعدادی که در ابتدا برای واحدهای تحت آزمایش قرار می‌گیرند معیارهای متفاوتی می‌توان در نظر گرفت که یکی از مهم‌ترین آن‌ها معیار هزینه است. در این مقاله با در نظر گرفتن تابع هزینه و توزیع وایبل برای طول عمر داده‌های مورد بررسی و طرح‌های سانسور مختلف، به تعیین بهترین مقدار برای اندازه نمونه اولیه یعنی n پرداخته می‌شود. به منظور ارزیابی نتایج بدست آمده یک مثال عددی براساس داده‌های واقعی ارائه شده است. **واژه‌های کلیدی:** سانسور فزاینده نوع دو، تابع هزینه، توزیع وایبل.

۱ مقدمه

رفتار پدیده‌های تصادفی در ابتدا انگیزه‌ای شد تا مبحث الگوهای آماری مطرح شود با این هدف که با استفاده از آن‌ها، بتوان برای پدیده‌های تصادفی الگویی تعیین و آن‌ها را پیش‌بینی کرد. بنابراین، توزیع‌های کلاسیک مانند توزیع نمایی، گاما، وایبل و دیگر توزیع‌ها مطرح شدند که هر کدام توانستند الگوهای مناسبی

برای داده‌های طول عمر، اقتصادی و غیره باشند. یکی از توزیع‌های مهم طول عمر، توزیع وایبل است. توزیع وایبل در سال ۱۹۳۹ توسط وایدی وایبل معرفی شد و امروزه یکی از متداول‌ترین مدل‌های مورد استفاده در مطالعات قابلیت اطمینان به شمار می‌آید. دلیل اهمیت این توزیع انعطاف‌پذیری بالای آن است و در مطالعات قابلیت اطمینان کاربرد وسیعی دارد. متغیر طول عمر X دارای توزیع وایبل با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس θ است، هرگاه توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت

$$f_{\theta,\beta}(x) = \frac{\beta}{\theta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta}, \quad x > 0, \theta > 0, \beta > 0,$$

$$F_{\theta,\beta}(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta}, \quad x > 0, \theta > 0, \beta > 0,$$

باشند. همچنین، تابع بقای متغیر طول عمر X به صورت

$$S_{\theta,\beta}(x) = e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta}, \quad x > 0, \theta > 0, \beta > 0, \quad (۱)$$

است. لازم به ذکر است که در حالت $\beta = ۱$ توزیع وایبل به توزیع نمایی با میانگین θ تبدیل می‌شود.

اغلب در مباحث قابلیت اعتماد، آزمون‌های طول عمر، تحلیل بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی بنا به دلایلی از جمله زمان محدود، عدم دسترسی به همه قطعات یا گران بودن واحدهای تحت آزمایش، آزمایش‌گر نمی‌تواند زمان دقیق از کارافتادگی واحدهای تحت آزمایش را مشاهده کند. در چنین حالتی اصطلاحاً گویند سانسور رخ داده است. سانسور به شیوه‌های مختلفی قابل اجرا است که یکی از معروف‌ترین آن‌ها، سانسور نوع دو از راست است. اگر در آزمایشی با n واحد، هدف ثبت دقیق زمان از کارافتادگی ($r < n$)، باشد، در این صورت آزمایش تا مشاهده r امین شکست ادامه می‌یابد و بعد از آن متوقف می‌شود. در چنین حالتی طول عمر ($n - r$) واحد باقیمانده سانسور می‌شود. در این صورت، به زمان‌های از کارافتادگی که مشاهده شده‌اند و با $X_{1:n}, \dots, X_{r:n}$ نمایش داده می‌شوند، آماره‌های مرتب سانسور نوع دو از راست گفته می‌شود. در سانسور نوع دو از راست، این امکان وجود دارد که واحدها فقط در انتهای آزمایش حذف شوند. در تعمیمی از سانسور نوع دو از راست که سانسور فزاینده نوع دو از راست نامیده می‌شود، این امکان وجود دارد که در هر مرحله از آزمایش به عنوان مثال در زمان از کار افتادگی هر قطعه، می‌توان واحدهایی را از آزمایش کنار گذاشت. همچنین، در سانسور فزاینده نوع دو از راست، قطعات سانسور شده دارای طول عمر بیشتری نسبت به سانسور نوع دو از راست هستند و می‌توان از آن‌ها به عنوان قطعات دست دوم در آزمایش‌های بعدی استفاده کرد، که از نظر اقتصادی حائز اهمیت است.

فرض کنید n قطعه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. بعد از مشاهده اولین از کارافتادگی، بلافاصله تعداد R_1 قطعه از $(n - 1)$ قطعه باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، که در آن $R_1 = 0, \dots, n - m$. بعد از مشاهده دومین از کارافتادگی، تعداد R_2 واحد از $(n - R_1 - 2)$ قطعه باقیمانده به‌طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، که در آن $R_2 = 0, \dots, n - m - R_1$ ، و در نهایت در زمان مشاهده m مین از کارافتادگی، تعداد R_m قطعه باقیمانده از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند، طوری که $R_m = n - m - \sum_{i=1}^{m-1} R_i$. در این روش از سانسور R_i ها، $1 \leq i \leq m$ ، مقادیری ثابت و از قبل تعیین شده هستند. علاوه‌براین، زمان‌های از کارافتادگی که متغیرهای تصادفی هستند و آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو از راست نامیده می‌شوند، با $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ نشان داده می‌شوند. بنابراین، طرح سانسور فزاینده نوع دو براساس m و بردار $\tilde{R} = (R_1, \dots, R_m)$ مشخص می‌شود. در حالت خاص، اگر $R_1 = \dots = R_{m-1} = 0$ و بنابراین $R_m = n - m$ ، آنگاه سانسور فزاینده نوع دو از راست به سانسور نوع دو از راست تقلیل می‌یابد.

تابع چگالی توأم آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو در بالاکریشن و آگاروالا (۲۰۰۰) به صورت

$$f_{X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}; \theta, \beta}(x_1, \dots, x_m) = C^* \prod_{i=1}^m (1 - F_{\theta, \beta}(x_i))^{R_i} f_{\theta, \beta}(x_i),$$

است، که در آن

$$C^* = \prod_{j=1}^m (n - \sum_{i=1}^{j-1} R_i - j + 1),$$

ثابت نرمال‌ساز است و $\sum_{i=1}^m R_i \equiv 0$. علاوه براین، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $X_{i:m:n}$ ، $1 \leq i \leq m$ ، به صورت

$$f_{X_{i:m:n}; \theta, \beta}(x) = c_{i-1, n} f_{\theta, \beta}(x) \sum_{j=1}^i a_{j, i, n} (1 - F_{\theta, \beta}(x))^{\gamma_{j, n-1}}, \quad (2)$$

است، که در آن

$$\gamma_{j,n} = n - j + 1 - \sum_{k=1}^{j-1} R_k = m - j + 1 + \sum_{k=j}^m R_k, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$c_{i-1,n} = \prod_{j=1}^i \gamma_{j,n}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$a_{j,i,n} = \prod_{l=1, l \neq j}^i \frac{1}{\gamma_{l,n} - \gamma_{j,n}}, \quad 1 \leq j \leq i \leq m.$$

برای مطالعه جزئیات بیشتر در مورد سانسور فزاینده نوع دو از راست می‌توان به بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)، بالاکریشنان (۲۰۰۷)، بالاکریشنان و کرامر (۲۰۱۴) یا به بصیری (۱۳۸۹) مراجعه نمود.

یکی از مسائلی که در سانسور فزاینده نوع دو همواره مورد توجه بوده است، مسأله تعیین طرح بهینه سانسور است. این مسأله در ابتدا توسط بالاکریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰) مورد بررسی قرار گرفت. بعد از آن پژوهش‌گران زیادی با در نظر گرفتن معیارهای مختلف به مطالعه این مسأله پرداخته‌اند. برای مثال، بروسکات و همکاران (۲۰۰۶، ۲۰۰۷)، طرح بهینه سانسور فزاینده را با مینیم کردن واریانس بهترین برآوردهای خطی نااریب یافتند. بصیری و احمدی (۱۳۸۹) به تعیین طرح بهینه سانسور براساس معیار اطلاع فیشر پرداختند. والترمن و همکاران (۲۰۱۲) با در نظر گرفتن معیار پیتمن، طرح بهینه سانسور فزاینده را به دست آوردند. میشرا (۲۰۱۸) طرح بهینه سانسور فزاینده نوع دو را با در نظر گرفتن معیار آنتروپی به دست آورد. سالمی و همکاران (۲۰۱۸) با در نظر گرفتن معیار واریانس برآوردها ماکسیمم درست‌نمایی و بهترین برآوردها خطی نااریب طرح بهینه سانسور فزاینده را تعیین کردند.

یکی دیگر از مسائلی که در بحث سانسورها از جمله سانسور نوع دو و سانسور فزاینده نوع دو مطرح است این است که ”چه تعداد قطعه در ابتدا مورد آزمایش قرار گیرند؟“. به عبارت دیگر ”مقدار n چند باشد؟“. برای جواب دادن به این سؤال با در نظر گرفتن معیارهای مختلف پاسخ‌های متفاوت داده شده است. یکی از معیارهایی که همواره مورد توجه پژوهش‌گران بوده است، معیار هزینه است. چرا که هزینه اغلب به عنوان یک عامل مهم در تصمیم‌گیری‌ها در نظر گرفته می‌شود. تاکنون پژوهش‌گران زیادی با در نظر گرفتن معیار هزینه به بهینه‌سازی در طرح‌های مختلف سانسور پرداخته‌اند. به عنوان مثال، فام (۱۹۹۲) با در نظر گرفتن یک تابع هزینه که تنها مبتنی بر زمان آزمایش و تعداد واحدهای تحت آزمایش بود، به تعیین تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو پرداخت. احمدی و همکاران (۲۰۱۶) در مسأله پیش‌بینی بیزی

و براساس تابع هزینه تعداد نمونه بهینه برای اندازه نمونه را تعیین نمودند. یک مسأله مشابه در سانسور فزاینده نوع دو و توزیع نمایی توسط بصیری و میرمصطفایی (۲۰۱۷) انجام گرفت. اخیراً کوردیرو و فام (۲۰۱۷) یک تابع هزینه جدید را با تعمیمی از توابع هزینه تعریف شده در فام (۱۹۹۲)، ارلیک و همکاران (۱۹۹۳) و فام و جانگ (۱۹۹۹) معرفی کردند که علاوه بر مدت زمان آزمایش، قابلیت اعتماد آزمایش را هم در نظر می‌گیرد. سپس به تعیین تعداد نمونه بهینه در سانسور نوع دو در حالتی که $r = 2$ شکست مشاهده شود، پرداختند. نکته‌ای که در بحث سانسورهای نوع دو و فزاینده نوع دو وجود دارد این است که واحدهایی که از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند یا در انتهای آزمایش باقی می‌مانند، می‌توانند به عنوان قطعات دست دوم در آزمایش‌های بعدی مورد استفاده قرار بگیرند. بنابراین، بخشی از هزینه صرف شده در آزمایش قابل ارجاع است. در تمام کارهای معرفی شده این عامل در نظر گرفته نشده است. در این مقاله، هدف این است که تعداد اندازه نمونه در سانسور فزاینده نوع دو را طوری بیابیم که هزینه مینیم شود. برای این منظور، ابتدا یک تابع هزینه معرفی می‌شود و سپس با مینیم‌سازی تابع معرفی شده به تعیین تعداد بهینه برای اندازه نمونه، که با n_{opt} نشان داده می‌شود، پرداخته می‌شود.

ساختار مقاله به این شرح است. ابتدا به معرفی یک تابع هزینه در مدل سانسور فزاینده نوع دو پرداخته می‌شود. سپس با هدف مینیم نمودن تابع هزینه مقدار بهینه n تعیین می‌شود. در این راستا برای پارامتر توزیع وایبل دو حالت در نظر گرفته می‌شود، حالتی که پارامترها معلوم یا نامعلوم باشند. سپس محاسبات عددی برای تعیین مقدار بهینه n ارائه می‌شود. در انتها، یک مثال واقعی ارائه می‌شود.

۲ نتایج اصلی

فرض کنید نمونه‌ای تصادفی شامل n واحد از توزیع وایبل با پارامترهای θ و β ، تحت آزمایش قرار گرفته‌اند. اگر زمان‌های از کار افتادگی این واحدها در سانسور فزاینده نوع دو به صورت $X_{1:m:n}, \dots, X_{m:m:n}$ باشند، آنگاه هدف تعیین مقدار بهینه برای تعداد واحدهای تحت آزمایش، یعنی n ، است. برای این منظور تابع هزینه به صورت تعمیمی از تابع هزینه تعریف شده در کوردیرو و فام (۲۰۱۷) به صورت

$$C(n) = c_o + c_u n - p_s(n - m) + c_t E(X_{m:m:n}) + c_v V(X_{m:m:n}) + c_R \{1 - S_{\theta, \beta}(E(X_{m:m:n}))\}, \quad (3)$$

۴۶ اندازه نمونه بهینه براساس تابع هزینه

تعریف می‌شود. هرگاه c_e هزینه راه‌اندازی اولیه آزمایش، c_u هزینه هر واحد تحت آزمایش، p_s قیمت قطعات دست دوم، c_t هزینه زمان آزمایش، c_v هزینه واریانس زمان ختم آزمایش و c_R هزینه ریسک واحدهایی که قبل از زمان مورد انتظار از کار می‌افتند، است. با توجه به رابطه (۲)، میانگین زمان خاتمه آزمایش و واریانس آن به ترتیب از روابط

$$\begin{aligned} E(X_{m:m:n}) &= \theta g(m, n, \beta), \\ V(X_{m:m:n}) &= \theta^2 h(m, n, \beta), \end{aligned} \quad (۴)$$

محاسبه می‌شوند، هرگاه

$$\begin{aligned} g(m, n, \beta) &= c_{m-1, n} \sum_{j=1}^m \frac{a_{j, m, n}}{\gamma_{j, n}^{\frac{1}{\beta} + 1}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \\ h(m, n, \beta) &= c_{m-1, n} \sum_{j=1}^m \frac{a_{j, m, n}}{\gamma_{j, n}^{\frac{1}{\beta} + 1}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - (g(m, n, \beta))^2. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر $E(X_{m:m:n})$ ، $S_{\theta, \beta}(E(X_{m:m:n}))$ و $V(X_{m:m:n})$ که به ترتیب در روابط (۱) و (۴) تعریف شده‌اند، در (۳) تابع هزینه به صورت

$$\begin{aligned} C(n) &= c_e + c_u n - p_s(n - m) + c_t \theta g(m, n, \beta) + c_v \theta^2 h(m, n, \beta) \\ &\quad + c_R (1 - e^{-(g(m, n, \beta))^\beta}), \end{aligned} \quad (۵)$$

به دست می‌آید. اندازه نمونه بهینه از مینیمم‌سازی تابع فوق، با این شرط که $n \geq m$ ، حاصل می‌شود. این تعداد بهینه با نماد n_{opt} نشان داده می‌شود. در ادامه دو حالت را برای پارامترهای توزیع وایبل در نظر گرفته می‌شود، حالتی که پارامترها معلوم و نامعلوم باشند.

۱.۲ حالت θ و β معلوم

با فرض اینکه θ و β مقادیری معلوم باشند و m نیز عددی ثابت باشد ($m \geq 1$)، قرار دهید

$$\Delta C(n) = C(n+1) - C(n).$$

در این صورت n_{opt} کوچک‌ترین مقدار n است که $n \geq m$ و $\Delta C(n) \geq 0$. از طرفی با توجه به (۵)

$$\begin{aligned} \Delta C(n) &= c_u - p_s + c_t \theta \{g(m, n+1, \beta) - g(m, n, \beta)\} \\ &+ c_v \theta^\gamma \{h(m, n+1, \beta) - h(m, n, \beta)\} \\ &+ c_R (e^{-(g(m, n, \beta))^\beta} - e^{-(g(m, n+1, \beta))^\beta}). \end{aligned}$$

بنابراین، $\Delta C(n) \geq 0$ معادل با این است که $G(n) \leq c_u - p_s$ ، هرگاه

$$\begin{aligned} G(n) &= c_t \theta [g(m, n, \beta) - g(m, n+1, \beta)] + c_v \theta^\gamma [h(m, n, \beta) - h(m, n+1, \beta)] \\ &+ c_R [e^{-(g(m, n+1, \beta))^\beta} - e^{-(g(m, n, \beta))^\beta}]. \end{aligned}$$

بنابراین n_{opt} کوچک‌ترین مقدار n است که $n \geq m$ و به ازای آن $G(n) \leq c_u - p_s$ ، در نتیجه تابع هزینه مینیمم است، یعنی $n_{opt} = \inf\{n; n \geq m, G(n) \leq c_u - p_s\}$. برای نشان دادن نتایج به دست آمده در این بخش، سه طرح سانسور به صورت

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= (0, \dots, 0, n-m), \\ \tilde{R}_2 &= (n-m, 0, \dots, 0), \\ \tilde{R}_3 &= (\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor, 0, \dots, 0, n-m - \lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor). \end{aligned}$$

در نظر گرفته و فرض می‌شود $c_R = 200$ ، $c_v = 15$ ، $p_s = 30$ ، $c_u = 50$ ، $c_t = 25$ ، $c_s = 20$ ، $\beta = 1$ و $\theta = 1$. با چون $c_u - p_s = 20$ ، مقدار n_{opt} کوچک‌ترین مقداری از n است که $n \geq m$ و $G(n) \leq 20$. در جدول ۱ مقادیر $C(n)$ و $G(n)$ به ازای طرح‌های سانسور \tilde{R}_1 ، \tilde{R}_2 و \tilde{R}_3 و به ازای مقادیر متفاوت m و n ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به ازای $m = n$ هر سه سانسور منجر به نتایج یکسانی می‌شوند زیرا در حالت نمونه کامل است. با وجودی که در طرح سانسور \tilde{R}_1 مقدار n_{opt}

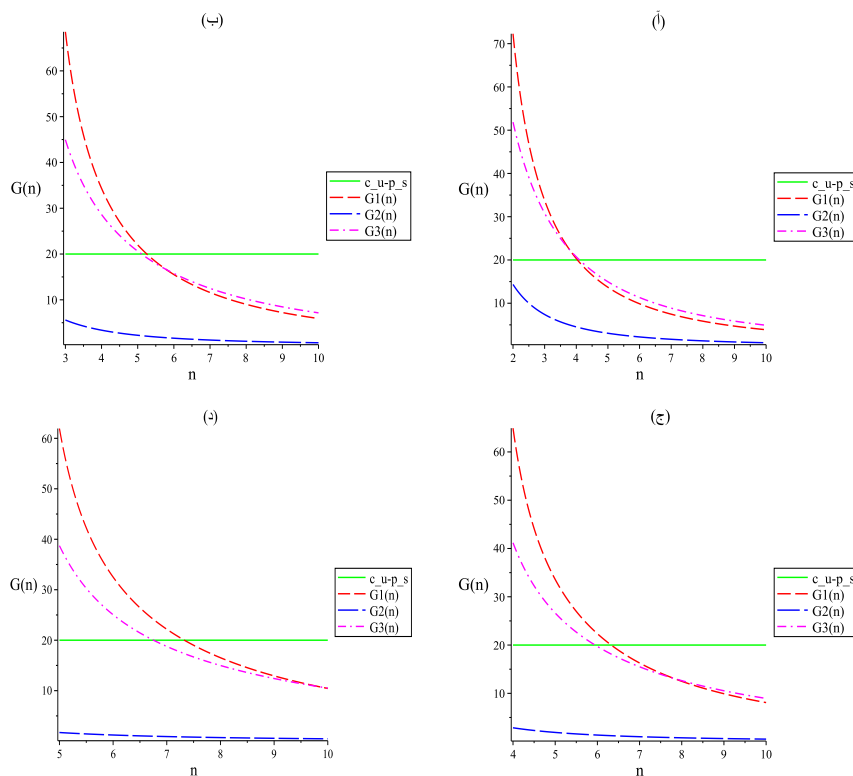
اغلب بزرگتر از دو طرح سانسور دیگر است، هزینه‌های طرح کمتر از دو طرح دیگر است. در جدول ۱ مقادیری که پررنگ شده‌اند مربوط به حالت‌هایی هستند که $C(n)$ مینیمم است. به عبارت دیگر حالت‌هایی هستند که برای اولین بار $G(n) \leq c_u - p_s = 20$. با توجه به جدول ۱، مقادیر n_{opt} که متناظر با حالت‌هایی هستند که در جدول ۱ پررنگ شده‌اند، در جدول ۲ آورده شده‌اند. شکل ۱ نمودار $G(n)$ را برای طرح‌های سانسور \tilde{R}_1 ، \tilde{R}_2 و \tilde{R}_3 و مقادیر متفاوت m نمایش می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود $G(n)$ تابعی نزولی از n است. بعلاوه شکل ۲ نمودار $C(n)$ را برای سه طرح سانسور \tilde{R}_1 ، \tilde{R}_2 و \tilde{R}_3 و مقادیر مختلف m نشان می‌دهد و نتایج جدول ۲ را تأیید می‌کند.

جدول ۱: مقادیر $C(n)$ و $G(n)$ به ازای طرح‌های سانسور \tilde{R}_1 ، \tilde{R}_2 و \tilde{R}_3 و مقادیر متفاوت m و n .

\tilde{R}_3		\tilde{R}_2		\tilde{R}_1		n	m
$G_3(n)$	$C_3(n)$	$G_2(n)$	$C_2(n)$	$G_1(n)$	$C_1(n)$		
۵۱/۸۶۷	۳۳۱/۶۲۴	۱۴/۳۴۳	۳۳۱/۶۲۴	۷۲/۲۹۴	۳۳۱/۶۲۴	۲	
۳۰/۷۹۳	۲۹۹/۷۵۷	۷/۳۹۴	۳۳۷/۲۸۱	۳۳/۷۵۰	۲۷۹/۳۳۰	۳	
۲۰/۷۲۷	۲۸۸/۹۶۴	۴/۵۲۵	۳۴۹/۸۸۷	۲۰/۳۱۹	۲۶۵/۵۸۰	۴	۲
۱۴/۹۶۰	۲۸۸/۲۳۸	۳/۰۵۸	۳۶۵/۳۶۱	۱۳/۶۸۷	۲۶۵/۲۶۲	۵	
۱۱/۳۲۰	۲۹۳/۲۷۷	۲/۲۰۶	۳۸۲/۳۰۳	۹/۸۷۴	۲۷۱/۵۷۵	۶	
۴۴/۹۵۹	۴۰۴/۲۷۴	۵/۵۹۱	۴۰۴/۲۷۴	۶۸/۵۳۰	۴۰۴/۲۷۴	۳	
۲۸/۶۲۹	۳۷۹/۳۱۵	۳/۳۶۹	۴۱۸/۶۸۳	۳۴/۳۳۳	۳۵۵/۷۴۴	۴	
۲۰/۶۱۵	۳۷۰/۶۸۶	۲/۲۵۵	۴۳۵/۳۱۳	۲۱/۹۸۹	۳۴۱/۴۱۱	۵	۳
۱۵/۷۵۶	۳۷۰/۰۷۱	۱/۶۱۶	۴۵۳/۰۵۸	۱۵/۵۱۸	۳۳۹/۴۲۳	۶	
۱۲/۴۹۸	۳۷۴/۳۱۵	۱/۲۱۵	۴۷۱/۴۴۲	۱۱/۵۹۹	۳۴۳/۹۰۵	۷	
۴۱/۱۸۳	۴۶۸/۵۳۵	۲/۸۶۴	۴۶۸/۵۳۵	۶۴/۹۲۰	۴۶۸/۵۳۵	۴	
۲۶/۶۳۲	۴۴۷/۳۵۲	۱/۹۰۴	۴۸۵/۶۷۰	۳۳/۵۹۲	۴۲۳/۶۱۵	۵	
۱۹/۷۱۱	۴۴۰/۷۲۰	۱/۳۵۸	۵۰۳/۷۶۶	۲۲/۳۵۲	۴۱۰/۰۲۳	۶	۴
۱۵/۵۰۱	۴۴۱/۰۰۹	۱/۰۱۸	۵۲۲/۴۰۸	۱۶/۲۸۸	۴۰۷/۶۷۱	۷	
۱۲/۶۲۸	۴۴۵/۵۰۸	۰/۷۹۱	۵۴۱/۳۹۱	۱۲/۴۹۴	۴۱۱/۳۸۳	۸	
۳۸/۷۲۸	۵۲۸/۶۴۹	۱/۷۰۸	۵۲۸/۶۴۹	۶۱/۹۴۲	۵۲۸/۶۴۹	۵	
۲۵/۰۵۰	۵۰۹/۹۲۱	۱/۲۱۴	۵۴۶/۹۴۱	۳۲/۵۱۰	۴۸۶/۷۰۷	۶	
۱۸/۷۶۳	۵۰۴/۸۷۱	۰/۹۰۷	۵۶۵/۷۲۷	۲۲/۱۷۱	۴۷۴/۱۹۷	۷	۷
۱۴/۹۸۸	۵۰۶/۱۰۸	۰/۷۰۴	۵۸۴/۸۲۰	۱۶/۵۲۹	۴۷۲/۰۲۶	۸	
۱۲/۴۰۸	۵۱۱/۱۲۰	۰/۵۶۲	۶۰۴/۱۱۶	۱۲/۹۲۹	۴۷۵/۴۹۷	۹	

جدول ۲: مقادیر n_{opt} به ازای طرح‌های سانسور مختلف و مقادیر متفاوت m و با فرض $c_t = ۲۵$ ، $c_o = ۲۰$ ، $c_v = ۱۵$ ، $p_s = ۳۰$ ، $c_u = ۵۰$ ، $\theta = ۱$ و $\beta = ۱$ ، $c_R = ۲۰۰$.

\tilde{R}_r	\tilde{R}_v	\tilde{R}_1	m
۵	۲	۵	۲
۶	۲	۶	۳
۶	۲	۷	۴
۷	۲	۸	۵



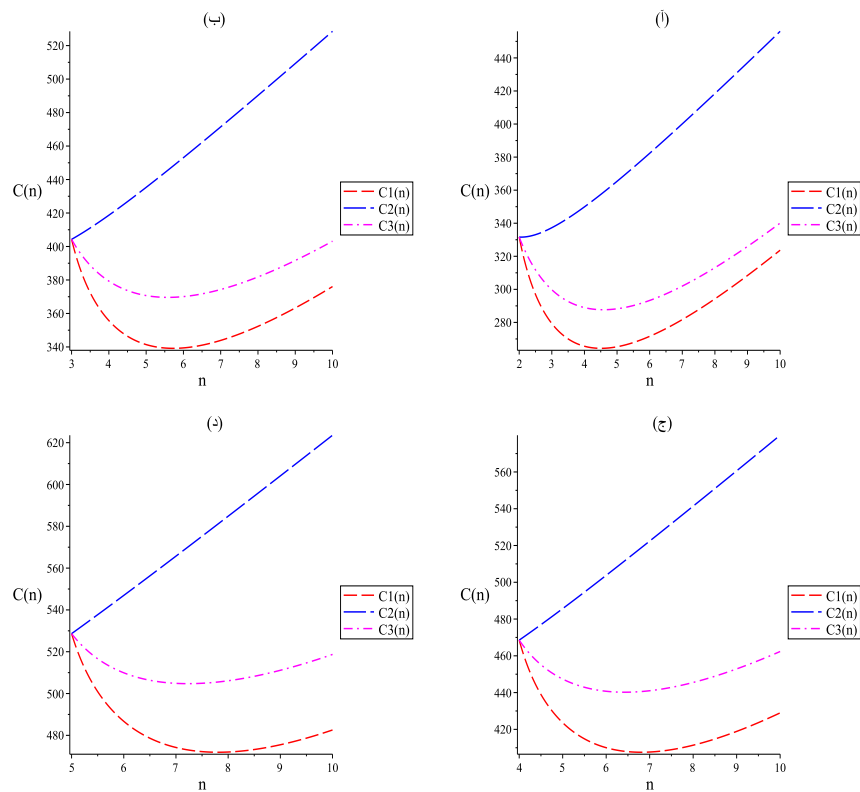
شکل ۱: نمودار $G(n)$ به ازای طرح‌های سانسور مختلف و مقادیر $c_t = ۲۵$ ، $c_o = ۲۰$ ، $c_v = ۱۵$ ، $p_s = ۳۰$ ، $c_u = ۵۰$ ، $\theta = ۱$ و $\beta = ۱$ ، $c_R = ۲۰۰$ هرگاه $m = ۲$ (ا)، $m = ۳$ (ب)، $m = ۴$ (ج) و $m = ۵$ (د) باشد.

۲.۲ حالت θ و β نامعلوم

وقتی پارامترها نامعلوم هستند، وو (۲۰۰۲) نشان داد برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ به صورت

$$\hat{\theta}_{(n)} = \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 + R_i) X_{i:m:n}^{\hat{\beta}_{(n)}} \right]^{\frac{1}{\hat{\beta}_{(n)}}},$$

۵۰ اندازه نمونه بهینه براساس تابع هزینه



شکل ۲: نمودار $C(n)$ برای طرح‌های سانسور مختلف و مقادیر $c_u = 50$, $c_t = 25$, $c_o = 20$, $\theta = 1$ و $\beta = 1$, $c_R = 200$, $c_v = 15$, $p_s = 30$ و $m = 5$ (د) و $m = 4$ (ج), $m = 3$ (ب), $m = 2$ (آ) هرگاه $\theta = 1$ و $\beta = 1$.

و برآوردگر β از حل معادله

$$\frac{1}{\hat{\beta}_{(n)}} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln X_{i:m:n} - \frac{\sum_{i=1}^m (1 + R_i) X_{i:m:n}^{\hat{\beta}_{(n)}} \ln X_{i:m:n}}{\sum_{i=1}^m (1 + R_i) X_{i:m:n}^{\hat{\beta}_{(n)}}} = 0,$$

حاصل می‌شود. بنابراین، در این حالت تابع هزینه به صورت

$$C'(n) = c_o + c_u n - p_s(n - m) + c_t \hat{\theta}_{(n)} g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) + c_v (\hat{\theta}_{(n)})^r h(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) + c_R [1 - e^{-(g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}))^{\hat{\beta}_{(n)}}}],$$

تغییر می‌یابد. همچنین، مقدار $\Delta C'(n) = C'(n+1) - C'(n)$ به صورت

$$\begin{aligned} \Delta C'(n) = & c_u - p_s + c_t \{ \hat{\theta}_{(n+1)} g(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}) - \hat{\theta}_{(n)} g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) \} \\ & + c_v \{ (\hat{\theta}_{(n+1)})^\gamma h(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}) - (\hat{\theta}_{(n)})^\gamma h(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) \} \\ & + c_R \{ e^{-(g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}))^{\hat{\beta}_{(n)}}} - e^{-(g(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}))^{\hat{\beta}_{(n+1)}}} \}, \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. از مقادیر به دست آمده در رابطه فوق نتیجه می‌شود که $\Delta C'(n) \geq 0$ اگر و تنها اگر $G'(n) \leq c_u - p_s$ که در آن

$$\begin{aligned} G'(n) = & c_t \{ \hat{\theta}_{(n)} g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) - \hat{\theta}_{(n+1)} g(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}) \} \\ & + c_v \{ (\hat{\theta}_{(n)})^\gamma h(m, n, \hat{\beta}_{(n)}) - (\hat{\theta}_{(n+1)})^\gamma h(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}) \} \\ & + c_R \{ e^{-(g(m, n+1, \hat{\beta}_{(n+1)}))^{\hat{\beta}_{(n+1)}}} - e^{-(g(m, n, \hat{\beta}_{(n)}))^{\hat{\beta}_{(n)}}} \}. \end{aligned}$$

توجه شود که برای حالت $\beta = 1$ نتایج برای توزیع نمایی با میانگین θ به دست می‌آید.

۳ مثال عددی

در این مثال از یک مجموعه داده واقعی مربوط به زمان‌های خرابی که توسط یو و فام (۲۰۱۶) به دست آمده‌اند، استفاده می‌شود. داده‌ها (برحسب ساعت) در جدول ۳ ارائه شده‌اند. لازم به ذکر است که کوردیرو و فام (۲۰۱۷) از آن‌ها به عنوان یک مجموعه داده وایبل استفاده کردند. در این مثال نیز موارد

جدول ۳: زمان‌های خرابی (برحسب ساعت).

۵۳۶	۴۱/۵	۱۶۴	۱۸۹	۲۰۹/۵	۸۱	۲۱۷	۱۲۲	۲۹
۳۷۸	۱۵۵/۵	۱۰	۱۷۴/۵	۷۱/۵	۹۵	۸۲	۵۴۴	۲۰۸
۱۳۱	۱۴۰	۳۱۲	۱۷۰/۵	۲۵۱/۵	۷۲	۲۷۸	۳۱	۳۳۶
۱۲۰	۴۴۱/۵	۱۶	۴۰۰	۵۹۰	۴۹۶	۱۶	۴۹۲	۱۲۹
				۲۳۲	۱۱۸	۳۹۵	۱۲۸	۳۰۵/۵

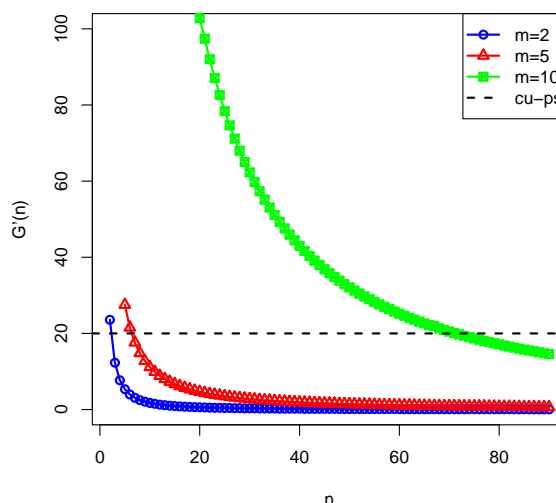
شده‌اند. مقادیر برآورد $\hat{\theta}$ ، $\hat{\beta}$ ، $C'(n)$ و $G'(n)$ براساس داده‌ها و به ازای m داده شده محاسبه شده و برای $c_R = 200$ ، $c_v = 15$ ، $p_s = 30$ ، $c_u = 50$ ، $c_t = 25$ ، $c_o = 20$ و همچنین طرح \tilde{R}_1 در نظر گرفته

۵۲ اندازه نمونه بهینه براساس تابع هزینه

n های متفاوت به دست آمده‌اند. جدول ۴ مقادیر n_{opt} ، $C'(n_{opt})$ و $G'(n_{opt})$ را برای $m = 2, 5, 10$ گزارش می‌دهد. همچنین، شکل ۳ نمودار $G'(n)$ را به ازای $m = 2, 5, 10$ نمایش می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، $G'(n)$ نسبت به n نزولی بوده اما نسبت به m صعودی است. در شکل ۳ کوچکترین n که به ازای آن نمودار $G'(n)$ زیر خط $c_u - p_s$ قرار گرفته است، به عنوان مقدار بهینه، n_{opt} معرفی شده است. همانگونه که انتظار می‌رود مقادیر n_{opt} نسبت به m صعودی هستند.

جدول ۴: مقادیر n_{opt} ، $C'(n_{opt})$ و $G'(n_{opt})$ به ازای $c_o = 20$ ، $c_t = 25$ ، $c_u = 50$ ، $p_s = 30$ ، $c_R = 200$ ، $c_v = 15$.

$G'(n_{opt})$	$C'(n_{opt})$	n_{opt}	m
۱۲/۳۰	۷۰۱/۵۲	۳	۲
۱۷/۶۱	۱۶۷۲/۰۷	۷	۵
۱۹/۷۲	۸۳۴۱/۴۶	۷۲	۱۰



شکل ۳: نمودار $G'(n)$ به ازای $c_o = 20$ ، $c_t = 25$ ، $c_u = 50$ ، $p_s = 30$ ، $c_R = 200$ ، $c_v = 15$ و $m = 2, 5, 10$.

بحث و نتیجه‌گیری

انتخاب اندازه نمونه مسأله‌ای است که تاکنون در پژوهش‌های زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بررسی این مسأله می‌توان معیارهای مختلفی در نظر گرفت. در این مقاله، با در نظر گرفتن معیار هزینه به

تعیین اندازه نمونه بهینه در سانسور فزاینده نوع دو در داده‌هایی که دارای توزیع وایبل هستند، پرداخته شده است. برای این منظور بعد از معرفی یک تابع هزینه در دو حالت پارامترهای معلوم و نامعلوم برای توزیع وایبل، اندازه نمونه بهینه به دست آمده است. نتایج برای توزیع نمایی می‌تواند به عنوان حالت خاصی از نتایج مقاله به دست آید.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله به‌خاطر پیشنهادات ارزنده‌شان که باعث بهبود کیفیت مقاله شده است، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- بصیری، ا. (۱۳۸۹). طرح بهینه در سانسور فزاینده نوع دو. پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد.
- بصیری، ا. و احمدی، ج. (۱۳۸۹). طرح بهینه سانسور فزاینده در توزیع بر نوع ۱۲ براساس اطلاع فیشر. دهمین کنفرانس آمار ایران.
- Ahmadi, J., Basiri, E., and MirMostafaei, S. M. T. K. (2016), Optimal Random Sample Size Based on Bayesian Prediction of Exponential Lifetime and Application to Real Data, *Journal of the Korean Statistical Society*, **45**, 221-237.
- Balakrishnan, N. (2007), Progressive Censoring Methodology: An appraisal, *Test*, **16**, 211-259.
- Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000), *Progressive Censoring: Theory, Methods, and Applications*, Birkhäuser, Boston.
- Balakrishnan, N. and Cramer, E. (2014), *The Art of Progressive Censoring*, Birkhauser, New York.
- Basiri, E., and MirMostafaei, S. M. T. K. (2017), Optimal Sample Size Based on Prediction Problem Under Progressively Type-II Censoring, *Reliability Theory and its Applications*, 68-72.

- Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2006), On Optimal Schemes in Progressive Censoring, *Statistics and Probability letters*, **76**,1032-1036.
- Burkschat M, Cramer E, and Kamps U (2007), Optimality Criteria and Optimal Schemes in Progressive Censoring, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 1419-1431.
- Cordeiro, J. B., and Pham, H. (2017), Optimal Design of Life Testing Cost Model for Type-II Censoring Weibull Distribution Lifetime Units with Respect to Unknown Parameters, *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, **8**, 28-32.
- Ehrlich, W., Prasanna, B., Stampfel, J., and Wu, J. (1993), Determining the Cost of a Stop-Test Decision (Software Reliability), *IEEE Software*, **10**, 33-42.
- Mishra, N. (2018), Optimal One-Step Censoring Schemes Under Entropy Criterion, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-14.
- Pham, H. (1992), Optimal Design of Life Testing for ULSI Circuit Manufacturing, *IEEE transactions on semiconductor manufacturing*, **5**, 68-70.
- Pham, H., and Zhang, X. (1999), A Software Cost Model with Warranty and Risk Costs, *IEEE Transactions on Computers*, **48**, 71-75.
- Salemi, U. H., Rezaei, S., Si, Y., and Nadarajah, S. (2018), On Optimal Progressive Censoring Schemes for Normal Distribution, *Annals of Data Science*, **5**, 637-658.
- Volterman, W., Davies, F.K. and Balakrishnan, N. (2012), Pitman Closeness as a Criterion for the Determination of the Optimal Progressive Censoring Scheme, *Statistical Methodology*, **9**, 563-572.
- Wu, S. J. (2002), Estimations of the Parameters of the Weibull Distribution with Progressively Censored Data, *Journal of the Japan Statistical Society*, **32**, 155-163.
- You, D., and Pham, H. (2016), Reliability Analysis of the CNC System Based on Field Failure Data in Operating Environments. *Quality and Reliability Engineering International*, **32**, 1955-1963.