مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۱، ص ۱۱۳ – ۱۳۳
DOI: 10.29252/jss.14.1.113

ویژگی‌های سالخوردگی مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده برای توزیع‌های طول عمر گسسته

محدثه خیاط[۱]، رسول روزگار[۱]، قباد برمال‌زن[۲]

[۱] بخش آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد

[۲] گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۹   تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۲۵

چکیده: مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده به عنوان یکی از خانواده‌های انعطاف‌پذیر در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا و مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-k+۱)$ از n در این خانواده از توزیع‌ها، توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۸) معرفی شده است. در این مقاله، حالت گسسته برای تابع بقای پایه در این مدل در نظر گرفته شده و به خواص سالخوردگی و حفظ شدن ترتیب تصادفی معمولی، نرخ خطر و نسبت درستنمایی در این خانواده از توزیع‌ها پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده، خواص سالخوردگی، ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، ترتیب نسبت درستنمایی.

۱ مقدمه

مارشال و الکین (۱۹۹۷) با افزودن یک پارامتر شکل به توزیع، خانواده‌ای کلی و انعطاف‌پذیر از توزیع‌ها را معرفی کردند. با فرض آنکه $\bar{F}$ یک تابع بقای دلخواه روی $\mathbb{R}^+$ باشد، خانواده توزیع‌های مارشال–الکین به صورت

$$\bar{G}(x;\alpha)=\frac{\alpha\bar{F}(x)}{۱-\bar{\alpha}\,\bar{F}(x)},\qquad x\in\mathbb{R}^+,\bar{\alpha}=۱-\alpha\,,\alpha>۰. \qquad (۱)$$

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: رسول روزگار، rasool62@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 90B25

است. فرض کنید $X_1, X_2, \cdots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با تابع بقای مشترک $\bar{F}$ و N یک متغیر تصادفی مستقل از X_iها با توزیع هندسی با پارامتر p باشد. در این صورت (۱) تابع بقا متغیر تصادفی $\min(X_1, \cdots, X_N)$ خواهد بود و رابطه

$$\frac{\bar{G}(x)}{G(x)} = \alpha \frac{\bar{F}(x)}{F(x)}, \qquad x, \alpha \in \mathbb{R}^+ \tag{۲}$$

برقرار است، که به مدل نسبت بخت‌های متناسب[1] معروف است (بینیت، ۱۹۸۳). به همین دلیل تابع بقای (۱) نیز مدل نسبت بخت‌های متناسب نامیده می‌شود. جزئیات رابطه بین مدل نسبت بخت‌های متناسب و تابع بقای (۱) توسط کرمانی و گوپتا (۲۰۰۱) و سنکاران و جایاکومار (۲۰۰۶) مورد بحث قرار گرفته است. اگر در تابع بقای (۱)، به جای $\bar{F}(x)$ از خانواده کلی $\bar{F}^{\lambda}(x)$ استفاده شود، خانواده‌ای کلی و انعطاف‌پذیر از توزیع‌ها تحت عنوان مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده به صورت

$$\bar{H}(x; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha \bar{F}^{\lambda}(x)}{1 - \bar{\alpha}\, \bar{F}^{\lambda}(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \bar{\alpha} = 1 - \alpha\, , \alpha > 0\, ,\, \lambda > 0,$$

حاصل می‌شود (بالاکریشنان و همکاران، ۲۰۱۸). نتایجی که تاکنون در رابطه با خانواده توزیع‌های مارشال- الکین و مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده به دست آمده با فرض پیوسته بودن تابع بقای $\bar{F}^{\lambda}(x)$ بوده است. برای مثال، کرمانی و گوپتا (۲۰۰۱)، قیطانی و همکاران (۲۰۰۷)،ناندا و داس (۲۰۱۳)، کوریدریو و لیمونته (۲۰۱۳) و کوریدریو و همکاران (۲۰۱۴) و کوندو و ناندا (۲۰۱۸) را ببینید.

کوندو و ناندا (۲۰۱۸) مدل (۱) را با فرض گسسته بودن $\bar{F}$ مورد مطالعه قرار دادند. در این مقاله، خواص سالخورگی و مقایسه تصادفی در این خانواده از توزیع‌ها با فرض گسسته بودن $\bar{F}^{\lambda}(x)$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد که نتایج کوندو و ناندا (۲۰۱۸) را تکمیل می‌کند. لازم به ذکر است در صورتی که $\lambda = n$ عددی صحیح باشد، آنگاه $\bar{F}^{\lambda}(x)$ به عنوان تابع بقای یک سیستم سری متشکل از n مولفه محسوب می‌شود. پارامتر λ به پارامتر شکنندگی و مدل $\bar{F}^{\lambda}(x)$ به مدل شکننده[2] معروف است. یکی از دلایل انتخاب عنوان شکنندگی برای پارامتر λ این است که با افزایش آن، طول عمر سیستم سری کاهش پیدا می‌کند. همچنین می‌توان نقش پارامتر λ را در ضخامت دم توزیع در نظر گرفت. یکی از توزیع‌های معروف گسسته که جزو خانواده $\bar{F}^{\lambda}(x)$ قرار می‌گیرد و کاربردهای زیادی در مباحث قابلیت اعتماد دارد، توزیع

---
[1] Proportional odds ratio model
[2] Frailty model

هندسی است. در عالم واقعیت، مواردی وجود دارند که در آن متغیرهای طول عمر، به صورت گسسته در نظر گرفته می‌شوند. چندین مثال از این موارد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:
الف- گزارش‌هایی در مورد خرابی قطعات یا سیستم‌ها که به صورت هفته‌ای یا ماهیانه جمع‌آوری می‌شوند که در آن به جای زمان شکست‌ها، تعداد شکست‌ها ثبت شده است.
ب- قطعات یا سیستم‌هایی که به صورت گردشی کار می‌کنند و پژوهشگر تعداد گردش‌هایی که به طور کامل تا قبل از خرابی انجام می‌شود را ثبت می‌کند. مانند تعداد کل کپی‌های گرفته شده از یک دستگاه فتوکپی تا قبل از خراب شدن.
ج- به دلیل سهولت در امر اندازه‌گیری، گاهی اوقات یک متغیر تصادفی پیوسته با یک متغیر تصادفی گسسته تقریب زده می‌شود. مانند تعداد کیلومترهایی که یک اتومبیل تا قبل از سائیدگی لاستیک‌های آن، پیموده است.

مطالعه متغیرهای طول عمر گسسته دیرتر از متغیرهای پیوسته آغاز شد. مطالعه متغیرهای تصادفی گسسته، ابتدا توسط بارلو و پروشان (۱۹۸۱) شروع و سپس توسط سایر نویسندگان مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در عمل، در بسیاری از موارد طول عمرها به صورت گسسته ثبت می‌شوند. برای مثال، وسایل دارای کلید خاموش-روشن، لامپ دستگاه کوپی و فنر دستگاه‌های کشسانی متحرک. در دهه‌های اخیر، توزیع‌های گسسته مختلفی مانند هندسی، دوجمله‌ای منفی، پواسون تعمیم‌یافته و غیره برای مدل‌بندی طول عمرهای گسسته بکار گرفته شده است. با این وجود، نیاز به توزیع‌های گسسته‌ایی که انعطاف‌پذیر باشند و برازش مناسبی به داده‌های گسسته داشته باشند، ضروری به نظر می‌رسد. زیرا توزیع‌های موجود، فقط برای داده‌هایی که بیش پراکندگی یا کم پراکندگی دارند مناسب هستند.

توزیع زمان شکست معمولاً برای توصیف ریاضیاتی طول عمر وسایل، قطعات و غیره بکار برده می‌شود. توزیع‌های نمایی، گاما، وایبول و لگ نرمال کاربرد فراوانی در تحلیل داده‌های طول عمر پیوسته دارند. زمان شکست که با تعداد چرخه‌ها تا شکست، اندازه‌گیری می‌شود متغیری گسسته است. بدیهی است توزیع‌های گسسته دوجمله‌ای منفی و هندسی متناظر با توزیع‌های گاما و نمایی در حالت پیوسته هستند. فرض کنید متغیر تصادفی گسسته X با تکیه‌گاه $\mathbb{N} = \{۱, ۲, \cdots\}$ دارای تابع جرم احتمال $P(X = k)$ و تابع بقای $\bar{F}(k) = P(X > k)$ باشد. متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرخ خطر متناسب تعدیل شده با یک تابع بقای پایه گسسته با پارامترهای α و λ است ($Y \sim MDPHR(\alpha, \lambda)$)، هرگاه تابع بقا و تابع

جرم احتمال آن به ترتیب به صورت

$$\bar{H}(k) = \frac{\alpha \bar{F}^{\lambda}(k)}{1 - \bar{\alpha}\, \bar{F}^{\lambda}(k)}, \qquad k \in \mathbb{N}\ ,\ \lambda > 0\ ,\ \alpha > 0\ ,\ \bar{\alpha} = 1 - \alpha,$$

$$P(Y = k) = \frac{\alpha(\bar{F}^{\lambda}(k-1) - \bar{F}^{\lambda}(k))}{(1 - \bar{\alpha}\, \bar{F}^{\lambda}(k-1))\,(1 - \bar{\alpha}\, \bar{F}^{\lambda}(k))}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

باشند، که در آن α پارامتر تیلت و λ پارامتر شکل است. تابع نرخ خطر این توزیع عبارت است از:

$$r_Y(k) = \frac{P(Y = k)}{\bar{H}(k-1)} = \frac{\bar{F}^{\lambda}(k-1) - \bar{F}^{\lambda}(k)}{\bar{F}^{\lambda}(k-1)(1 - \bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k))}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

حفظ شدن یا عدم حفظ شدن خواص سالخوردگی متغیر اولیه X با تابع بقای $\bar{F}(k)$، نسبت به متغیر ثانویه Y با تابع بقای $\bar{H}(k)$ بررسی می‌شود. سپس مقایسه تصادفی بین متغیرهای اولیه و ثانویه، بررسی خواهد شد. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با توابع بقای $\bar{F}_1(k)$ و $\bar{F}_2(k)$، همچنین Y_1 و Y_2 دو متغیر تصادفی با توابع بقای

$$\bar{H}_1(k; \lambda_1) = \frac{\alpha \bar{F}_1^{\lambda_1}(k)}{1 - \bar{\alpha}\bar{F}_1^{\lambda_1}(k)}, \quad \bar{H}_2(k; \lambda_2) = \frac{\beta \bar{F}_2^{\lambda_2}(k)}{1 - \bar{\beta}\bar{F}_2^{\lambda_2}(k)}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

باشند. اگر $\beta \geq \alpha$ و $\lambda_2 \leq \lambda_1$، آنگاه نشان داده می‌شود:

$$X_1 \geq_{st} X_2 \Longrightarrow Y_1 \geq_{st} Y_2.$$

همچنین، اگر $\lambda_2 = \lambda_1$ و $1 \geq \beta \geq \alpha$، آنگاه نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$X_1 \geq_{hr} X_2 \Longrightarrow Y_1 \geq_{hr} Y_2,$$

با دو مثال نقض نشان داده شد که جهت ترتیب نسبت درستنمایی بین X_1 و X_2، توسط متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 حفظ نمی‌شود. در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم در رابطه با خواص سالخوردگی و ترتیب‌های تصادفی، ارائه شده است. بررسی و حفظ شدن خواص سالخورگی متغیرهای اولیه X به متغیر

ثانویه Y، در بخش ۳ انجام شده است. سرانجام، در بخش ۴ شرایط انتقال ترتیب‌های تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی متغیرهای اولیه، به متغیرهای ثانویه نرخ خطر متناسب تعدیل شده با یک تابع بقای پایه گسسته، ارائه می‌شود.

۲ تعاریف و مفاهیم

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه‌های مشترک $\mathbb{N} = \{۱, ۲, \cdots\}$ باشند که دارای توابع جرم احتمال $P(X = k)$، $P(Y = k)$ و توابع بقای $\bar{F}(k) = P(X > k)$، $\bar{G}(k) = P(Y > k)$ و توابع نرخ خطر $r_X(k) = P(X = k)/P(X \geq k)$ و $r_Y(k) = P(Y = k)/P(Y \geq k)$ باشند.

تعریف ۱: (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷). متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی[۳]، بزرگتر از متغیر تصادفی Y است $(X \geq_{st} Y)$ هرگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، رابطه $\bar{F}(k) \geq \bar{G}(k)$ برقرار باشد. یا به عبارت دیگر، $(X \geq_{st} Y)$ اگر برای هر تابع صعودی $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و با شرط وجود امیدهای ریاضی، نابرابری $\mathbb{E}(\phi(X)) \geq \mathbb{E}(\phi(Y))$ برقرار باشد.

تعریف ۲: متغیر تصادفی X در ترتیب نرخ خطر[۴]، بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، رابطه $r_Y(k) \geq r_X(k)$ برقرار باشد. به عبارت دیگر، $X \geq_{hr} Y$ است اگر و فقط اگر نسبت $\bar{F}(k)/\bar{G}(k)$ تابعی صعودی برحسب k باشد.

تعریف ۳: متغیر تصادفی X در ترتیب نسبت درستنمایی بزرگتر از Y است $(X \geq_{lr} Y)$ هرگاه به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، نسبت $P(X = k)/P(Y = k)$ تابعی صعودی برحسب k باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی بیان شده در تعاریف ۱ تا ۳ رابطه

$$X \geq_{lr} Y \Longrightarrow X \geq_{hr} Y \Longrightarrow X \geq_{st} Y.$$

برقرار است (مولر و استویان، ۲۰۰۲، شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷ و برمال‌زن و همکاران، ۱۳۹۴).

---

[3] Usual stochastic order

[4] Hazard rate order

تعریف ۴: **الف–** متغیر تصادفی X دارای نسبت درستنمایی صعودی (ILR) است، هرگاه نابرابری

$$P(X = k + ۲)P(X = k) \leq P^{۲}(X = k + ۱) \qquad , \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{۳}$$

برقرار باشد. به همین ترتیب، متغیر تصادفی X دارای خاصیت نسبت درستنمایی نزولی (DLR) است، هرگاه جهت نابرابری (۳) عوض شود.

ب– متغیر تصادفی X دارای خاصیت نرخ خطر صعودی (IFR) است، هرگاه $r(k)$ تابعی صعودی برحسب $k \in \mathbb{N}$ باشد یا بطور معادل، نسبت $\bar{F}(k + ۱)/\bar{F}(k)$ تابعی نزولی از k باشد. به همین ترتیب، متغیر تصادفی X دارای خاصیت نرخ خطر نزولی (DLR) است، هرگاه $r(k)$ تابعی نزولی برحسب $k \in \mathbb{N}$ باشد یا بطور معادل، نسبت $\bar{F}(k + ۱)/\bar{F}(k)$ تابعی صعودی از k باشد.

ج– متغیر تصادفی X دارای خاصیت میانگین نرخ خطر صعودی (IFRA) است، هرگاه $[\bar{F}(k)]^{۱/k}$ تابعی نزولی در k باشد یا به عبارت دیگر، $[\bar{F}(k)]^{۱/k} \geq [\bar{F}(k + ۱)]^{۱/(k+۱)}$. به همین ترتیب، متغیر تصادفی X دارای خاصیت میانگین نرخ خطر نزولی (DFRA) است، هرگاه $[\bar{F}(k)]^{۱/k}$ تابعی صعودی در k باشد یا به عبارت دیگر، $[\bar{F}(k)]^{۱/k} \leq [\bar{F}(k + ۱)]^{۱/(k+۱)}$.

د– متغیر تصادفی X دارای خاصیت نو بهتر از کارکرده (NBU) است، هرگاه

$$\bar{F}(j + k) \leq \bar{F}(j)\bar{F}(k) \qquad , \qquad j, k \in \mathbb{N}. \tag{۴}$$

به همین ترتیب، متغیر تصادفی X دارای خاصیت نو بدتر از کارکرده (NWU) است، هرگاه جهت نابرابری (۴) عوض شود.

۳ خواص سالخوردگی

فرض کنید متغیر تصادفی اولیه X دارای تابع بقای $\bar{F}(k)$ و متغیر ثانویه Y دارای تابع بقای $\bar{H}(k)$ باشد. قضیه زیر نشان می‌دهد که خاصیت IFR یا DFR بودن متغیر تصادفی X، تحت شرایطی می‌تواند به متغیر Y انتقال پیدا می‌کند.

قضیه ۱: **الف–** اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت IFR باشد، آنگاه برای $\alpha \geq ۱$ توزیع Y نیز دارای خاصیت IFR است.

ب– اگر متغیر تصادفی X دارای خاصیت DFR باشد، آنگاه برای $\alpha \leq ۱$ توزیع Y نیز دارای خاصیت DFR است.

برهان: الف– تابع نرخ خطر متغیر تصادفی Y به صورت

$$r_Y(k) = \frac{P(Y=k)}{\bar{H}(k-۱)} = \frac{\bar{F}^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}^{\lambda}(k)}{\bar{F}^{\lambda}(k-۱)(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k))} \qquad , \qquad \alpha > ۰,\, \lambda > ۰,$$

است. برای اثبات صعودی بودن نرخ خطر Y، کافی است نشان داده شود $r_Y(k) \leq r_Y(k+۱)$. یا به عبارت دیگر،

$$\frac{\bar{F}^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}^{\lambda}(k)}{\bar{F}^{\lambda}(k-۱)(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k))} \leq \frac{\bar{F}^{\lambda}(k) - \bar{F}^{\lambda}(k+۱)}{\bar{F}^{\lambda}(k)(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k+۱))}.$$

با توجه به اینکه $\bar{F}(k) > \bar{F}(k+۱)$ و $\bar{\alpha} = ۱-\alpha \leq ۰$ است، می‌توان نتیجه گرفت که $۱/(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k))$ تابعی صعودی برحسب k برای $\alpha \geq ۱$ است. بنابراین برای $\alpha \geq ۱$

$$\frac{۱}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k)} \leq \frac{۱}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k+۱)}. \tag{۵}$$

از طرف دیگر، چون متغیر تصادفی X دارای خاصیت نرخ خطر صعودی است، پر پایه تعریف ۴–ب،

$$\frac{\bar{F}(k)}{\bar{F}(k-۱)} \geq \frac{\bar{F}(k+۱)}{\bar{F}(k)} \quad \text{یا} \quad \bar{F}^{۲}(k) \geq \bar{F}(k-۱)\bar{F}(k+۱) \quad k = ۱, ۲, \cdots .$$

با توان λ رساندن کمیت دوم و کم کردن $\bar{F}^{\lambda}(k)\bar{F}^{\lambda}(k-۱)$ از طرفین آن، رابطه

$$\bar{F}^{\lambda}(k)\bar{F}^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}^{۲\lambda}(k) \leq \bar{F}^{\lambda}(k)\bar{F}^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}^{\lambda}(k-۱)\bar{F}^{\lambda}(k+۱),$$

به دست می‌آید، که نتیجه می‌دهد

$$\frac{\bar{F}^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}^{\lambda}(k)}{\bar{F}^{\lambda}(k-۱)} \leq \frac{\bar{F}^{\lambda}(k) - \bar{F}^{\lambda}(k+۱)}{\bar{F}^{\lambda}(k)}. \tag{۶}$$

اکنون با ضرب طرفین روابط نامنفی (۵) و (۶)، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

برهان: ب– این بند همانند بند الف اثبات می‌شود.

مثال ۱: (سلویا و بولینگر، ۱۹۸۲). متغیر تصادفی گسسته X را با خاصیت نرخ خطر صعودی به صورت

$$P(X=k)=\frac{(k-c)\,c^{k-1}}{k!} \qquad , \qquad 0<c\leq 1 \quad , \quad k\in\mathbb{N},$$

در نظر بگیرید. چون تابع بقای X به صورت $\bar{F}(k)=c^k/k!$ است، تابع نرخ خطر Y به صورت

$$r_Y(k)=\frac{(\frac{c^{k-1}}{(k-1)!})^\lambda-(\frac{c^k}{k!})^\lambda}{(\frac{c^{k-1}}{(k-1)!})^\lambda\,(1-\bar{\alpha}(\frac{c^k}{k!})^\lambda)},$$

است. به ازای $\lambda=2$، $\alpha=0/1$ و $c=9$، نتایج

$$r_Y(2)=0/9356 \quad , \quad r_Y(3)=0/9222 \quad , \quad r_Y(4)=0/9500,$$

به دست می‌آید، که نشان می‌دهد تابع نرخ خطر متغیر تصادفی Y نه صعودی است و نه نزولی. بنابراین به ازای $\alpha<1$ خاصیت IFR متغیر X، ممکن است به متغیر Y انتقال پیدا نکند.

مثال ۲: (ناکاگاوا و اوساکی، ۱۹۷۵). فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول گسسته به صورت

$$P(X=k)=q^{(k-1)^\beta}-q^{k^\beta} \quad , \quad 0<q\leq 1\ ,\ \beta>0\ ,\ k\in\mathbb{N},$$

باشد. تابع بقا و تابع نرخ خطر متناظر با متغیر تصادفی X به ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}(k)=q^{k^\beta} \qquad , \qquad r_X(k)=1-q^{k^\beta-(k-1)^\beta}.$$

می‌توان نشان داد برای $0<\beta<1$، این خانواده از توزیع‌ها دارای خاصیت DFR است. همچنین تابع نرخ خطر متغیر تصادفی Y عبارت است از:

$$r_Y(k)=\frac{q^{\lambda(k-1)^\beta}-q^{\lambda k^\beta}}{q^{\lambda(k-1)^\beta}(1-\bar{\alpha}q^{\lambda k^\beta})}. \tag{۷}$$

به ازای $\lambda = ۲$، $\alpha = ۵$، $q = ۰/۵$ و $\beta = ۰/۸$، نتایج

$$r_Y(۲) = ۰/۴۷۲۸ \quad , \quad r_Y(۴) = ۰/۵۴۵۸ \quad , \quad r_Y(۱۳) = ۰/۴۸۴۷,$$

به دست می‌آید، که نشان می‌دهد تابع نرخ خطر متغیر تصادفی Y نه صعودی است و نه نزولی. بنابراین به ازای $\alpha > ۱$، خاصیت DFR متغیر X، ممکن است توسط متغیر Y حفظ نشود. باید توجه داشت که خاصیت IFR، (DFR) خاصیت IFRA (DFRA) را نتیجه می‌دهد (بارلو و پروشان، ۱۹۸۱).

مثال ۳: (براکومند و گادوین، ۲۰۰۳). فرض کنید X دارای توزیع گسسته S، با تابع جرم احتمال

$$P(X = k) = p(۱ - a)^k \prod_{i=۱}^{k-۱}(۱ - p + pa^i) \quad , \quad ۰ < p \leq ۱,\ ۰ < a < ۱,\ k \in \mathbb{N},$$

باشد. تابع نرخ خطر این توزیع، تابعی صعودی به صورت $r_X(k) = p(۱ - a)^k$، است. بنابراین X دارای خاصیت IFRA است. برای $p = ۰/۵$، $a = ۶$، $\alpha = ۰/۲$ و $\lambda = ۲$، رابطه

$$(\bar{H}(k))^{۱/k} = \begin{cases} ۰/۱۱۲۱۸۴۶ & k = ۱ \\ ۰/۱۳۷۲۴۱ & k = ۲ \\ ۰/۱۳۴۱۹۵ & k = ۳ \\ ۰/۱۲۴۹۵۷ & k = ۴ \\ ۰/۱۱۵۴۸۴۷ & k = ۵, \end{cases}$$

به دست می‌آید، که تابعی صعودی یا نزولی نیست، یعنی Y خاصیت IFRA یا DFRA را ندارد. بنابراین اگر X دارای خاصیت IFRA باشد، برای $\alpha < ۱$ ممکن است Y چنین خاصیتی را حفظ نکند.

مثال ۴: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پاراتو گسسته با تابع جرم احتمال

$$\bar{F}(k) = (\frac{d}{k + d})^c, \qquad c > ۰,\ d > ۰\ k \in \mathbb{N},$$

باشد. متغیر X دارای خاصیت DFR و در نتیجه DFRA است. تابع بقای متغیر تصادفی Y به صورت

$$\bar{H}(k)=\frac{\alpha\,(\frac{d}{k+d})^{\lambda c}}{۱-\bar{\alpha}\,(\frac{d}{k+d})^{\lambda c}},$$

است. برای $\alpha=۶$، $d=۲$، $c=۳$ و $\lambda=۲$، رابطه

$$(\bar{H}(k))^{۱/k}=\begin{cases} ۰/۳۶۶۰ & k=۱\\ ۰/۲۸۷۸ & k=۳\\ ۰/۳۰۰۶ & k=۴\\ ۰/۳۱۸۰ & k=۵,\end{cases}$$

به دست می‌آید، که نه تابعی صعودی و نه نزولی است. بنابراین Y نه IFRA هست و نه DFRA. بنابراین اگر X دارای خاصیت DFRA باشد، آنگاه برای $\alpha>۱$ ممکن است Y چنین خاصیتی را حفظ نکند.

قضیه ۲: **الف-** فرض کنید X دارای خاصیت NBU باشد آنگاه برای $\alpha\geq۱$، متغیر تصادفی Y دارای خاصیت NBU است.

ب- فرض کنید X دارای خاصیت NWU باشد آنگاه برای $۱\leq\alpha$، متغیر تصادفی Y دارای خاصیت NWU است.

برهان: الف- فرض کنید X دارای خاصیت NBU است. اگر Y نیز دارای خاصیت NBU باشد باید نابرابری

$$\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(j+k)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j+k)}\leq\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(j)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)}\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(k)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k)},$$

برقرار باشد. یا به عبارت دیگر،

$$\frac{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j+k)}{\bar{F}^{\lambda}(j+k)}\geq\frac{(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j))(۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(k))}{\alpha\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}. \qquad (۸)$$

با اضافه کردن $\bar{\alpha}$ به طرفین رابطه اخیر می‌توان نشان داد رابطه (۸)، معادل با

$$\frac{1}{\bar{F}^{\lambda}(j+k)} \geq \frac{1-\bar{\alpha}(\bar{F}^{\lambda}(j)+\bar{F}^{\lambda}(j))+\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}{\alpha\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}, \tag{۹}$$

است. بنابراین برای اثبات NBU بودن متغیر تصادفی Y، کافی است رابطه (۹) اثبات شود. چون X دارای خاصیت NBU است نابرابری $\bar{F}(j+k) \geq \bar{F}(j)\bar{F}(k)$ یا

$$\frac{1}{\bar{F}^{\lambda}(j+k)} \geq \frac{1}{\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}, \tag{۱۰}$$

برقرار است. از طرف دیگر، ادعا می‌شود که به ازای $\alpha \geq 1$، نابرابری

$$1-\bar{\alpha}(\bar{F}^{\lambda}(j)+\bar{F}^{\lambda}(k))+\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k) \leq \alpha, \tag{۱۱}$$

برقرار است. این ادعا با حذف $\bar{\alpha}$ از طرفین و سپس استفاده از اتحاد جمله مشترک به راحتی قابل اثبات است. اکنون از روابط (۱۰) و (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{F}^{\lambda}(j+k)} &\geq \frac{1}{\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)} \\
&= \frac{1-\bar{\alpha}(\bar{F}^{\lambda}(j)+\bar{F}^{\lambda}(j))+\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}{\{1-\bar{\alpha}(\bar{F}^{\lambda}(j)+\bar{F}^{\lambda}(j))+\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)\}\ \bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)} \\
&\geq \frac{1-\bar{\alpha}(\bar{F}^{\lambda}(j)+\bar{F}^{\lambda}(j))+\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)}{\alpha\,\bar{F}^{\lambda}(j)\bar{F}^{\lambda}(k)},
\end{aligned}$$

برهان: ب– این بند، همانند بند الف اثبات می‌شود.

مثال ۵: (براکومند و گادوین، ۲۰۰۳). فرض کنید X دارای توزیع گسسته S، با تابع جرم احتمال

$$P(X=k)=p(1-a)^k\prod_{i=1}^{k-1}(1-p+pa^i) \quad , \quad 0<p\leq 1,\ 0<a<1\ ,\ k\in\mathbb{N},$$

باشد. تابع بقا و تابع نرخ خطر متناظر با این توزیع به ترتیب عبارتند از:

$$\bar{F}(k) = \prod_{i=۱}^{k}(۱ - p + pa^i) \quad , \quad r_X(k) = p(۱ - a)^k.$$

تابع بقای توزیع Y به صورت

$$\bar{H}(k) = \frac{\alpha \prod_{i=۱}^{k}(۱ - p + pa^i)^\lambda}{۱ - \bar{\alpha} \prod_{i=۱}^{k}(۱ - p + pa^i)^\lambda},$$

است. برای $j = ۲$، $k = ۳$، $p = ۰/۳$، $a = ۰/۶$، $\alpha = ۰/۲$ و $\lambda = ۲$، نتیجه

$$\bar{H}(j + k) = ۰/۰۰۱۴۳ \nleq ۰/۰۰۱۲۱ = \bar{H}(j)\bar{H}(k),$$

به دست می‌آید، در نتیجه خاصیت NBU بودن متغیر تصادفی Y نقض می‌شود. بنابراین برای $\alpha < ۱$ خاصیت NBU بودن متغیر تصادفی X، ممکن است به متغیر تصادفی Y انتقال پیدا نکند.

مثال ۶: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول گسسته به صورت

$$P(X = k) = q^{(k-۱)^\beta} - q^{k^\beta}, \qquad ۰ < q \leq ۱ \ , \ \beta > ۰ \ , \ k \in \mathbb{N},$$

باشد. تابع بقای متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$\bar{F}(k) = q^{k^\beta}, \qquad ۰ < q \leq ۱ \ , \ \beta > ۰ \ , \ k \in \mathbb{N}.$$

در نتیجه برای $۰ < \beta < ۱$، متغیر تصادفی X دارای خاصیت NWU است. تابع بقای Y به صورت

$$\bar{H}(k) = \frac{\alpha q^{\lambda k^\beta}}{۱ - \bar{\alpha} q^{\lambda k^\beta}}.$$

است. برای $j = ۲$، $k = ۳$، $q = ۰/۵$، $\beta = ۰/۸$، $\alpha = ۵$ و $\lambda = ۲$، نتیجه

$$\bar{H}(j+k) = ۰/۰۳۲۰ \ngeq ۰/۰۵۱۱ = \bar{H}(j)\bar{H}(k),$$

حاصل می‌شود، که نشان می‌دهد خاصیت NWU بودن متغیر تصادفی Y نقض می‌شود. بنابراین برای $\alpha > ۱$ خاصیت NWU بودن متغیر تصادفی X، ممکن است توسط متغیر تصادفی Y حفظ نشود.

مثال ۷: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال

$$P(X=k) = \begin{cases} ۰/۱ & k=۲ \\ ۰/۲۵ & k=۳ \\ ۰/۳۵ & k=۴ \\ ۰/۳ & k=۵, \end{cases}$$

باشد. بر پایه بند الف تعریف ۴، به سادگی می‌توان نشان داد که این خانواده دارای خاصیت ILR است. برای $\lambda = ۲$ و $\alpha = ۱۳$ تابع جرم احتمال Y به صورت

$$P(Y=k) = \begin{cases} ۰/۰۱۸ & k=۲ \\ ۰/۰۷۸ & k=۳ \\ ۰/۳۴۲ & k=۴ \\ ۰/۵۶۳ & k=۵, \end{cases}$$

است، که بر پایه بند الف تعریف ۴، متغیر تصادفی Y دارای هیچیک از خاصیت‌های ILR و DLR نیست.

مثال ۸: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال

$$P(X=k) = \begin{cases} ۰/۳ & k=۲ \\ ۰/۳۴ & k=۳ \\ ۰/۲۶ & k=۴ \\ ۰/۱ & k=۵, \end{cases}$$

باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که این خانواده دارای خاصیت ILR است. برای $\lambda = ۲$ و $\alpha = ۰/۱$ تابع جرم احتمال Y به صورت

$$P(Y=k) = \begin{cases} ۰/۹۱۲۳۴۳۵ & k = ۲ \\ ۰/۰۷۲۹۸۵۲۷ & k = ۳ \\ ۰/۰۱۳۶۶۲۱۷ & k = ۴ \\ ۰/۰۰۱۰۰۹۰۸۲ & k = ۵, \end{cases}$$

است. در نتیجه Y دارای هیچیک از خاصیت‌های ILR و DLR نیست. بنابراین خاصیت ILR متغیر تصادفی X، برای $\alpha > ۱$ به متغیر Y انتقال پیدا نمی‌کند.

مثال ۹: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال

$$P(X=k) = \begin{cases} ۰/۳۶ & k = ۱ \\ ۰/۲۶ & k = ۲ \\ ۰/۲۱ & k = ۳ \\ ۰/۱۷ & k = ۴, \end{cases}$$

باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که این خانواده دارای خاصیت DLR است. برای $\lambda = ۲$ و $\alpha = ۱۹$ تابع جرم احتمال Y به صورت

$$P(Y=k) = \begin{cases} ۰/۰۷۰۵۱۴۰۵ & k = ۱ \\ ۰/۱۶۷۲۰۵۴ & k = ۲ \\ ۰/۴۰۱۰۷۸ & k = ۳ \\ ۰/۳۶۱۲۰۲۵ & k = ۴, \end{cases}$$

است. در نتیجه Y دارای هیچیک از خاصیت‌های ILR و DLR نیست. بنابراین خاصیت DLR متغیر تصادفی X، برای $\alpha > ۱$ به متغیر Y انتقال پیدا نمی‌کند.

مثال ۱۰: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع جرم احتمال

$$P(X=k)=\begin{cases} ۰/۲۶ & k=۱ \\ ۰/۱۸ & k=۲ \\ ۰/۲۴ & k=۳ \\ ۰/۳۲ & k=۴, \end{cases}$$

باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که این خانواده دارای خاصیت DLR است. برای $\lambda = ۲$ و $\alpha = ۰/۱$ تابع جرم احتمال Y به صورت

$$P(Y=k)=\begin{cases} ۰/۸۹۲۰۲۶۲ & k=۱ \\ ۰/۰۶۴۲۸۲۳۳ & k=۲ \\ ۰/۰۳۲۴۱۱۹۶ & k=۳ \\ ۰/۰۱۱۲۷۹۵۲ & k=۴, \end{cases}$$

است. در نتیجه متغیر تصادفی Y دارای هیچ‌یک از خاصیت‌های ILR و DLR نیست. بنابراین خاصیت DLR متغیر تصادفی X، به ازای $\alpha < ۱$ برای متغیر Y حفظ نمی‌شود.

۴ مقایسه‌های تصادفی

در بسیاری از مسائل آماری، مقایسه دو متغیر تصادفی ضروری به نظر می‌رسد. ساده‌ترین روش برای مقایسه دو متغیر تصادفی، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی است. اما این شاخص‌ها در نهایت یک عدد هستند و اطلاعات زیادی را در مورد توزیع متغیر تصادفی، منتقل نمی‌کنند. از این‌رو محققان به روش‌هایی که منعکس کننده اطلاعات بیشتری از توزیع‌ها باشند روی آورده‌اند. این روش‌ها و مسائل نظری مربوط به آنها در بحث ترتیب‌های تصادفی می‌گنجند.

فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با توابع بقای $\bar{F}_۱(k)$ و $\bar{F}_۲(k)$ باشند.

همچنین فرض کنید $Y_{۱}$ و $Y_{۲}$ دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع بقای

$$\bar{H}_{۱}(k;\lambda_{۱}) = \frac{\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)}{۱ - \bar{\alpha}\bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)}, \quad \bar{H}_{۲}(k;\lambda_{۲}) = \frac{\beta \bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)}{۱ - \bar{\beta}\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)},$$

باشند. در این بخش، حفظ شدن مقایسه تصادفی بین X_i ها و Y_i ها از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی، مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

قضیه ۳: فرض کنید $X_{۱}$ و $X_{۲}$ دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با توابع بقای $\bar{F}_{۱}(k)$ و $\bar{F}_{۲}(k)$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_{۱}$ و $Y_{۲}$ دو متغیر تصادفی مستقل دیگر با توابع بقای $\bar{H}_{۱}(k;\lambda_{۱})$ و $\bar{H}_{۲}(k;\lambda_{۲})$ باشند. اگر $\beta \geq \alpha$ و $\lambda_{۲} \leq \lambda_{۱}$، آنگاه

$$X_{۱} \geq_{st} X_{۲} \Longrightarrow Y_{۱} \geq_{st} Y_{۲}.$$

برهان: فرض کنید $X_{۱} \geq_{st} X_{۲}$. در این صورت نابرابری $\bar{F}_{۱}(k) \geq \bar{F}_{۲}(k)$ برقرار است. کافی است نشان داده شود که $\bar{H}_{۱}(k;\lambda_{۱}) \geq \bar{H}_{۲}(k;\lambda_{۲})$. یا به طور معادل:

$$\frac{\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)}{۱ - \bar{\alpha}\bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)} \Big/ \frac{\beta \bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)}{۱ - \bar{\beta}\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)} \geq ۱. \qquad (۱۲)$$

با ساده کردن سمت چپ رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,(۱-(۱-\beta)\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k))}{\beta \bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)\,(۱-(۱-\alpha)\bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k))} &= \frac{\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k) - \alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k) + \alpha\,\beta \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۱}}(k)}{\beta \bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k) - \beta\,\bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k) + \alpha\,\beta \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)} \\ &= \frac{\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)(۱-\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)) + \alpha\,\beta \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)}{\beta \bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)(۱-\bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)) + \alpha\,\beta \bar{F}_{۱}^{\lambda_{۱}}(k)\,\bar{F}_{۲}^{\lambda_{۲}}(k)}.\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۱۲) در صورتی برقرار است که رابطه

$$\alpha \bar{F}_{۱}^{\lambda}(k)(۱-\bar{F}_{۲}^{\lambda}(k)) \geq \beta \bar{F}_{۲}^{\lambda}(k)(۱-\bar{F}_{۱}^{\lambda}(k)), \qquad (۱۳)$$

برقرار باشد، که از این‌رو با فرض $\beta \geq \alpha$ و $\lambda_{۲} \leq \lambda_{۱}$، رابطه $\bar{F}_{۱}(k) \geq \bar{F}_{۲}(k)$ به دست می‌آید.

قضیه ۴: فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با توابع بقای $\bar{F}_۱(k)$ و $\bar{F}_۲(k)$، همچنین $Y_۱$ و $Y_۲$ دو متغیر تصادفی مستقل با توابع بقای $\bar{H}_۱(k;\lambda)$ و $\bar{H}_۲(k;\lambda)$ باشند. اگر $\alpha \geq \beta \geq ۱$، آنگاه

$$X_۱ \geq_{hr} X_۲ \Longrightarrow Y_۱ \geq_{hr} Y_۲.$$

برهان: توابع نرخ خطر متغیرهای تصادفی $Y_۱$ و $Y_۲$ به ترتیب به صورت

$$r_{Y_۱}(k) = \frac{\bar{F}_۱^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}_۱^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۱^{\lambda}(k-۱)(۱-\bar{\alpha}\bar{F}_۱^{\lambda}(k))}, \quad r_{Y_۲}(k) = \frac{\bar{F}_۲^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}_۲^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۲^{\lambda}(k-۱)(۱-\bar{\beta}\bar{F}_۲^{\lambda}(k))},$$

هستند. کافی است که به ازای $k \in \mathbb{N}$، نابرابری $r_{Y_۱}(k) \leq r_{Y_۲}(k)$ برقرار باشد. چون ترتیب نرخ خطر، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد، بنابراین از $X_۱ \geq_{hr} X_۲$ نتیجه می‌شود که به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، رابطه $\bar{F}_۱(k) \geq \bar{F}_۲(k)$ برقرار است که با توجه به $\alpha \geq \beta \geq ۱$، می‌توان نابرابری

$$\frac{۱}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}_۱^{\lambda}(k)} \leq \frac{۱}{۱-\bar{\beta}\bar{F}_۲^{\lambda}(k)}, \qquad (۱۴)$$

را نتیجه گرفت. از طرف دیگر، چون $X_۱ \geq_{hr} X_۲$، نسبت $\bar{F}_۱(k)/\bar{F}_۲(k)$ تابعی صعودی از k است، یعنی

$$\frac{\bar{F}_۱^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۱^{\lambda}(k-۱)} \geq \frac{\bar{F}_۲^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۲^{\lambda}(k-۱)}. \qquad (۱۵)$$

با ضرب کردن طرفین رابطه (۱۵) در یک علامت منفی و جمع کردن آن با یک، رابطه

$$\frac{\bar{F}_۱^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}_۱^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۱^{\lambda}(k-۱)} \leq \frac{\bar{F}_۲^{\lambda}(k-۱) - \bar{F}_۲^{\lambda}(k)}{\bar{F}_۲^{\lambda}(k-۱)}, \qquad (۱۶)$$

به دست می‌آید. اکنون از ضرب طرفین روابط نامنفی (۱۴) و (۱۶) داریم $r_{Y_۱}(k) \leq r_{Y_۲}(k)$.

دو مثال زیر نشان می‌دهند که ترتیب نسبت درستنمایی میان $X_۱$ و $X_۲$، ممکن است توسط متغیرهای تصادفی $Y_۱$ و $Y_۲$ حفظ نشود.

مثال ۱۱: فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ دارای توابع جرم احتمال زیر

$$P(X_۱ = k) = \begin{cases} ۰ & k = ۱ \\ ۰/۲ & k = ۲ \\ ۰/۳ & k = ۳ \\ ۰/۲ & k = ۴ \\ ۰/۳ & k = ۵, \end{cases}$$

و

$$P(X_۲ = k) = \begin{cases} ۰ & k = ۱ \\ ۰/۳ & k = ۲ \\ ۰/۴ & k = ۳ \\ ۰/۲ & k = ۴ \\ ۰/۱ & k = ۵, \end{cases}$$

باشند. به سادگی می‌توان نشان داد نابرابری تصادفی $X_۱ \geq_{lr} X_۲$ برقرار است. اما باید توجه داشت که برای ۵ $= \alpha$ و ۲ $= \lambda$، نتایج

$$\frac{h_۱(۲)}{h_۲(۲)} = ۰/۵۸۶۹ \ , \ \frac{h_۱(۳)}{h_۲(۳)} = ۰/۵۵۱۲ \ , \ \frac{h_۱(۴)}{h_۲(۴)} = ۱/۰۴۰۰ \ , \ \frac{h_۱(۵)}{h_۲(۵)} = ۶/۸۸۷۰,$$

به دست می‌آید. در نتیجه نسبت $h_۱(k)/h_۲(k)$ نه صعودی است و نه نزولی. بنابراین $Y_۱ \not\geq_{lr} Y_۲$.

مثال ۱۲: فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ دارای توابع جرم احتمال

$$P(X_۱ = k) = \begin{cases} ۰ & k = ۱ \\ ۰/۲ & k = ۲ \\ ۰/۳ & k = ۳ \\ ۰/۲۴ & k = ۴ \\ ۰/۲۶ & k = ۵, \end{cases}$$

و

$$P(X_۲ = k) = \begin{cases} ۰ & k = ۱ \\ ۰/۳ & k = ۲ \\ ۰/۳ & k = ۳ \\ ۰/۲ & k = ۴ \\ ۰/۲ & k = ۵, \end{cases}$$

باشند. به سادگی می‌توان نشان داد نابرابری تصادفی $X_۱ \geq_{lr} X_۲$ برقرار است. باید توجه داشت که برای $\alpha = ۰/۰۱$ و $\lambda = ۲$، نتایج

$$\frac{h_۱(۲)}{h_۲(۲)} = ۰/۹۹۲۰\ ,\ \frac{h_۱(۳)}{h_۲(۳)} = ۱/۸۵۷۷\ ,\ \frac{h_۱(۴)}{h_۲(۴)} = ۱/۷۴۹۷\ ,\ \frac{h_۱(۵)}{h_۲(۵)} = ۱/۷۴۲۱.$$

به دست می‌آیند. بنابراین چون نسبت $h_۱(k)/h_۲(k)$ نه صعودی است و نه نزولی، $Y_۱ \ngeq_{lr} Y_۲$.

بحث و نتیجه‌گیری

مدل نرخ خطر متناسب تعدیل شده به عنوان یکی از خانواده‌های انعطاف‌پذیر در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا، و مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-k+۱)$ از n در این خانواده از توزیع‌ها، توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۸) معرفی شده است. در این مقاله، حالت گسسته برای تابع بقای پایه در این مدل در نظر گرفته شد و خواص سالخوردگی و حفظ شدن ترتیب تصادفی معمولی، نرخ خطر و نسبت درستنمایی در این خانواده از توزیع‌ها بررسی شد. نتایج اثبات شده، نتایج به دست آمده توسط کوندو و ناندا (۲۰۱۸) را تعمیم می‌دهد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی، هیئت تحریریه محترم و ویراستار ارجمند که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر مقاله شدند کمال قدردانی و تشکر فراوان را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶–۱۸۹.

Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2018), Modified Proportional Hazard Rates and Proportional Reversed Hazard Rates Models via Marshall-Olkin Distribution and Some Stochastic Comparisons, *Journal of the Korean Statistical Society,* **47**, 127-138.

Bennett, S. (1983), Analysis of Survival Data by the Proportional Odds Model, *Statistics in Medicine*, **2**, 273-277.

Barlow R.E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Bracquemond, C. and Gaudoin, O. (2003), A Survey on Discrete Lifetime Distributions. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **10**, 69-98.

Cordeiro, G. M., Lemonte, A. J. and Ortega, E.M.M. (2014), The Marshall-Olkin Family of Distributions: Mathematical Properties and New Models, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **8**, 343-366.

Cordeiro, G. M. and Lemonte, A. J. (2013), On the Marshall-Olkin Extended Weibull Distribution, *Statistical Papers*, **54**, 333-353.

Ghitany, M. E., Al-Awadhi, F. A. and Alkhalfan, L. A. (2007), Marshall-Olkin Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 1855-1866.

Ghitany, M. E. and Kotz. S. (2007), Reliability Properties of Extended Linear Failure Rate Distributions, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 441-450.

Kundu, P. and Nanda, A. K. (2018), Reliability Study of Proportional Odds Family of Discrete Distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47**, 1091-1103.

Kirmani, S. N. U. A. and Gupta, R. C. (2001), On the Proportional Odds Model in Survival Analysis, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53**, 203-216.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method of Adding a Parameter to a Family of Distributions with Applications to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.

Nakagawa, T. and S. Osaki, S. (1975), The Discrete Weibull Distribution. *IEEE Transactions on Reliability R*-**24**, 300-301.

Nanda, A. K. and Das, S. (2013), Some Ageing Properties of Marshall-Olkin Extended Distribution, *International Journal of Mathematics and Statistics,* **13**, 93-107.

Salvia, A. A. and Bollinger, R.C. (1982), On Discrete Hazard Functions. *IEEE Transactions on Reliability*, **31**, 458-459.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, New York.

Sankaran, P. G. and Jayakumar, K. (2006), On Proportional Odds Models. *Statistical Papers*, **49**, 779-789.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.