

آزمون‌های چندگانه در شناسایی پروفایل‌های دورافتاده

مرجان رجبی

گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۲/۳۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۹/۲۲

چکیده: امروزه به واسطه وجود فناوری‌های نوین، داده‌هایی با بعد بالا به‌سادگی تولید می‌شوند. در این‌گونه داده‌ها نیاز به ارزیابی همزمان بیش از یک فرضیه وجود دارد. به‌همین منظور از آزمون‌های چندگانه که در آن‌گرایه‌ای از فرضیه‌های آماری به‌طور همزمان مورد آزمون قرار می‌گیرند استفاده کرده و نرخ خطای خانواده را که مهمترین موضوع در این‌گونه آزمون‌ها است کنترل می‌شود. در این مقاله دو شیوه سیداک و گام به‌پس برای کنترل نرخ خطای آزمون در شناسایی پروفایل‌های دورافتاده، به کار گرفته و با هم مقایسه خواهد شد. بر این اساس عملکرد دو شیوه ذکر شده با روش بوت‌استرپی پارامتری مقایسه و برای یک مجموعه از داده‌های واقعی پیاده‌سازی می‌شود. **واژه‌های کلیدی:** آزمون چندگانه، نرخ خطای خانواده، بوت استرپ پارامتری.

۱ مقدمه

پایش پروفایل یکی از موضوعات کاربردی بسیار ارزشمند در کنترل آماری فرایند است که اخیراً توسط پژوهشگران توسعه داده شده است. پروفایل زمانی ایجاد می‌شود که یک مشخصه مهم کیفیت از لحاظ عملکردی به یک یا چند متغیر مستقل وابسته باشد. ایده اساسی برای پایش پروفایل، مدل‌بندی پروفایل‌ها با روش‌های پارامتری و ناپارامتری است. پس از برازش پروفایل‌ها به مدل مورد نظر می‌توان نسبت به تعیین وجود یا عدم وجود تغییرات در پروفایل‌ها اقدام کرد. روش‌های پایش پروفایل می‌تواند در فاز یک یا دو انجام گیرد (نورالسئاء و همکاران، ۲۰۱۱). در فاز یک، با در اختیار داشتن داده‌های گذشته

اطلاعاتی در مورد پراکندگی فرایند در طول زمان، ارزیابی پایداری فرایند و برآورد پارامترهای مدل تحت کنترل انجام می‌گیرد. در فاز دو هدف کشف سریع تغییر و روند در پارامترهای مدل بر اساس مقادیر طراحی شده در فاز یک است. در فاز یک مقدار ثابتی برای احتمال خطای نوع اول در نظر گرفته می‌شود و عملکرد نمودار با استفاده از منحنی توان آزمون بررسی می‌شود. در فاز دو نیز برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل معیار متوسط مدت اجرا به کار می‌رود. در اغلب تحقیقات پایش پروفایل فرض بر این بوده است که برازش بر روی مدل‌های پارامتری در نظر گرفته شود، اما در عمل این فرض در بسیاری از کاربردهای عملی، فرضی غیرمنطقی است. بنابراین، در نظر گرفتن یک تابع ناپارامتری که هیچگونه شکل تابعی از پایش تعیین شده‌ای برای آن در نظر گرفته نشده می‌تواند راهگشا باشد و مشکلات مدل‌های پارامتری را تا حدودی رفع نماید. الزید و ال‌اوش (۱۹۹۳) پروفایل‌های خطی چندگانه را با استفاده از روش کاهش بعد در فاز دو مورد بررسی قرار داده‌اند. وی و همکاران (۲۰۱۲) تحقیق خود را بر روی یک مدل ناپارامتری مکان-مقیاس برای نمایش شکل‌های پروفایل‌ها در فاز دو تعمیم دادند و نیز کیو و همکاران (۲۰۱۰) مدل‌های ناپارامتری را با اثرات آمیخته در فاز دو با ارائه روشی مبتنی بر نمودارهای EWMA انجام داده‌اند. ال‌اوش و ال‌زید (۱۹۸۷) مدل‌های پارامتری، نیم‌پارامتری و ناپارامتری مبتنی بر T^2 هتلینگ برای شناسایی پروفایل‌های دورافتاده را در فاز یک ارائه داده است. پایش پروفایل‌های رگرسیونی با مدل‌های آمیخته به عنوان موضوع تحقیقاتی این مقاله انتخاب شده و در آن روش‌هایی برای پایش پروفایل‌ها بر اساس آزمون‌های چندگانه در فازهای یک ارائه شده است.

مطالعات روی داده‌های با بعد بالا به وفور یافت می‌شود، که در آنها نیاز به ارزیابی همزمان بیش از یک سؤال است. به‌طور ساده آزمون چندگانه، به شرایطی اطلاق می‌شود که گردایه‌ای از فرض‌های آماری به طور همزمان مورد آزمون قرار می‌گیرند. در اصطلاحات آزمون‌های همزمان، نرخ خطای خانواده‌ای^۱ (FWER) نامیده می‌شود. بر این اساس برای انجام آزمون فرض چندگانه، یکی از اهداف آن است که برای هر مجموعه از فرض‌های صفر درست و نادرست ممکن، نرخ خطای خانواده‌ای در سطح α کنترل شود، یعنی $\text{FWER} \leq \alpha$ ، که آن را کنترل قوی می‌نامند. نخستین شیوه تک مرحله‌ای کلاسیک برای کنترل FWER توسط مکنزی (۱۹۸۵) بیان گردید. سیداک (۱۹۶۷) شیوه‌ای را شبیه شیوه بون‌فرونی ارائه کرد که اگر آماره‌های آزمون در نابرابری موسوم به سیداک صدق کنند، FWER در سطح α کنترل می‌شود. پس از آن هلم (۱۹۷۹) و هوچبر (۱۹۸۸) شیوه‌های دیگری را در راستای بهبود شیوه بون‌فرونی ارائه داده‌اند. با این حال این روش‌ها از توان کمتری برخوردارند بالاخص زمانی که آزمون‌ها از هم مستقل نباشند

^۱Family Wise Error Rate

(چن و همکاران، ۲۰۰۶). به منظور بهبود مسئله شیوه گام به پس^۲ هلم بیان شده و برای یافتن بهینه روش در بین یک کلاس از مسایل آزمون چندگانه شیوه ماکسی مین^۳ و یا بیشین-کمینه توسط لی من و رومانو (۲۰۰۵) ارائه شده است. در این مقاله دو شیوه سیداک و بیشین-کمینه در پایش پروفایل با مدل های رگرسیونی با اثرات آمیخته در فاز یک مقایسه می شود و برتری شیوه بیشین-کمینه از طریق شبیه سازی نشان داده خواهد شد. ژنگ و همکاران (۲۰۰۶) برای شناسایی نقاط دورافتاده با استفاده از آزمون چندگانه، همچنین لیکس و تولوپ (۲۰۱۰) شیوه بون فرنی و گام به پس را در طرح های اندازه گیری های مکرر و علی و بوذر (a) (۱۹۹۴) پایش پروفایل خطی و چند جمله ای با اصلاح بون فرنی در آزمون چندگانه انجام داده اند.

در بخش ۲، پایش پروفایل در فاز یک براساس انواع روش های کنترل FWER در سطح α در آزمون های چندگانه بیان می شود. در بخش ۳ مطابق با مدل بندی اثر آمیخته رگرسیونی به معرفی روش پیشنهادی و محاسبه حد آستانه برای آماره پیشنهادی پرداخته می شود. در بخش ۴ براساس مطالعات شبیه سازی نتیجه عملکرد دو روش آزمون فرض چندگانه در پایش پروفایل در فاز یک مورد مقایسه قرار می گیرد. در ادامه شیوه پیشنهادی بر روی یک مجموعه داده واقعی برای شناسایی پروفایل های دورافتاده در فاز یک اجرا می شود.

۲ پایش پروفایل براساس آزمون فرض چندگانه

پایش پروفایل در فاز یک مبتنی بر تعریف پروفایل های دورافتاده در یو و همکاران (۲۰۱۲) را می توان با یک تعریف شهودی بیان کرد که یک نقطه دورافتاده در مجموعه داده ها، داده ای است که از بخش عمده داده ها انحراف معنی داری داشته باشد، به طوری که بی تردید از یک فرایند دیگری تولید شده است. بنابراین فرض کنید توده داده ها از یک مدل C و نقاط دورافتاده از مدل D تولید شده باشد. می توان فرایند تشخیص نقاط دورافتاده را مبتنی بر آزمون این فرض که آیا یک مشاهده از مدل C تولید شده است یا از مدل D، بنا کرد. برای شناسایی نقاط دورافتاده به هاکینز (۱۹۸۰) و گرانوالد و همکاران (۲۰۰۰) می توان اشاره کرد و روشی دیگر برای شناسایی داده های دورافتاده در احمدی و سرمد (۱۳۸۸) آمده است که بر پایه آن برشی وابسته بر حجم نمونه با استفاده از روش کم بیشینه بدست آمده است. همچنین برای آشنایی بیشتر با شناسایی پروفایل دورافتاده در فاز یک پایش پروفایل های ناپارامتری به ال اوش و ال زید (۱۹۸۷) و یو و همکاران (۲۰۱۲) مراجعه شود.

شناسایی پروفایل دورافتاده به عنوان یک مسئله آزمون این فرضیه که آیا پروفایل ها تحقیقی از یک

²Stepwise

³Maximin

فرایند با میانگین $g_*(x)$ است یا از یک فرایند با میانگین متفاوت $g_i(x)$ است، صورت‌بندی می‌شود. از آنجایی‌که این آزمون بایستی برای تمام مشاهدات انجام گیرد، مناسب است آن را به صورت مسئله آزمون فرض چندگانه

$$H_{oi} : g_i(x_{ij}) = g_o(x_{ij}), \quad \forall j = 1, \dots, n_i \quad (۱)$$

$$H_{\forall i} : g_i(x_{ij}) \neq g_o(x_{ij}), \quad \exists j = 1, \dots, n_i$$

برای $i = 1, \dots, m$ در نظر گرفت. فرضیه H رد می‌شود اگر و فقط اگر فرضهای H_{oi} رد شود. بنابراین پروفایل‌های دورافتاده براساس آزمون فرض چندگانه فوق می‌تواند شناسایی شود. تحت فرضیه صفر، هیچ پروفایل دورافتاده‌ای در بین پروفایل‌ها وجود ندارد، یا به عبارتی دیگر فرضیه صفر بدین معنی است که در m آزمون تک تک پروفایل‌ها به ازای n_i نقطه مشاهده شده با یکدیگر برابر هستند. بنابراین تحت این فرض مدل زیر را مطابق با کیو و همکاران (۲۰۱۰) به فرم یک مدل رگرسیونی با اثرات آمیخته برای m پروفایل که در آن i امین پروفایل دارای n_i نقطه طرح باشد و با فرض این‌که $(x_{i1}, y_{i1}), \dots, (x_{in_i}, y_{in_i})$ جفت نقاط نمونه جمع آوری شده بر روی i امین پروفایل بوده است، می‌توان نشان داد

$$Y_{ij} = g_*(x_{ij}) + f_i(x_{ij}) + \epsilon_{ij} \quad j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, m, \quad (۲)$$

که در آن $g_*(x_{ij})$ تابع پروفایل تحت کنترل جامعه یا میانگین جامعه یا جمله اثر ثابت نامیده می‌شود، f_i جمله اثر تصادفی و نشان‌دهنده تغییرات i امین پروفایل از میانگین جامعه یا g است و خطای ϵ_{ij} متغیرهای تصادفی از هم مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس σ^2 هستند که از اثرات تصادفی f_i ها مستقل فرض می‌شوند. همچنین f_i ها به عنوان تحقیقی از یک فرایند با میانگین صفر و تابع کواریانس مشترک

$$\gamma(x_1, x_2) = E[f_i(x_1), f_i(x_2)], \quad i = 1, \dots, m. \quad (۳)$$

در نظر گرفته می‌شوند. بدون کاستن کلیت مسئله $[0, 1]$ فرض می‌شوند.

برآورد پارامترهای تحت کنترل g ، γ و σ^2 در (۲) و (۳) با استفاده از مجموعه داده‌های تحت کنترل بررسی می‌شود. سپس برآوردها برای ساخت نمودار کنترل در فاز یک مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های متفاوتی برای تحلیل آماری داده‌های همبسته وجود دارد که در این تحقیق از روش وو و ژانگ (۲۰۰۲)

که ترکیبی از مدل با اثرات آمیخته خطی (LME) و هموار سازی هسته‌ای خطی موضعی^۴ است و توسط ویب (۲۰۰۸) پیشنهاد شده، استفاده می‌شود. این شیوه را که به اختصار اثرات آمیخته خطی موضعی^۵ (LLME) می‌نامند، وو و ژانگ (۲۰۰۲) نشان دادند، که برآورد g ، با استفاده از این شیوه اغلب از کارایی بیشتری نسبت به دیگر شیوه‌های برآورد برحسب میانگین توان دوم خطاها برخوردارند. علاوه بر این، کیو و همکاران (۲۰۱۰) نیز بیان کردند در مدل‌های رگرسیونی با اثرات آمیخته برای به دست آوردن برآوردهای سازگار γ و σ^2 از این روش به آسانی میسر است.

فرض کنید $\Delta_{ij} = Y_{ij} - \hat{g}_0(x_{ij}) - \hat{f}_i(x_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_i$ که در آن $\hat{g}_0(x_{ij})$ و $\hat{f}_i(x_{ij})$ مطابق با کیو و همکاران (۲۰۱۰) به دست آمده‌اند. اگر در فاز یک هیچ پروفایل دورافتاده‌ای وجود نداشته باشد، همه فرضیه‌های H_{01}, \dots, H_{0m} درست خواهند بود. بنابراین مدل (۲) برقرار است و انتظار می‌رود که تمام مقادیر $|\Delta_{ij}|$ ها یکسان باشند. از این رو معیار

$$\hat{\eta}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \Delta_{ij}^2 \quad i = 1, \dots, m \quad (4)$$

به عنوان یک آماره برای شناسایی پروفایل دورافتاده تعریف می‌شود. مشخص است که مقادیر بزرگ این آماره می‌تواند گواهی بر رد فرضیه H_{0i} باشد. توجه کنید $\hat{\eta}_i$ مقدار انحراف i امین پروفایل مشاهده شده را از پروفایل برازش داده شده مربوطه نشان می‌دهد. آماره آزمون مبتنی بر آمارهای ترتیبی $\hat{\eta}_{(1)} \leq \dots \leq \hat{\eta}_{(m)}$ بیان می‌شود. در سایر روش‌های پیشنهادی در فاز یک و فاز دو پایش پروفایل توزیع آماره مورد نظر از توزیع‌های F یا χ^2 یا توزیع مجانبی پیروی کرده در نتیجه شناسایی پروفایل‌های دورافتاده با مشخص بودن توزیع معلوم امکان پذیر است. در زیر بخش بعد پس از بیان آزمون‌های چندگانه، الگوریتمی برای تعیین ناحیه بحرانی معرفی می‌شود. برای سادگی در ادامه، آمارهای ترتیبی $\hat{\eta}_i$ ها با نماد مشترک T_i نشان داده خواهد شد. همچنین برای $T_{(i)}$ که نشان دهنده i امین آماره ترتیبی T_i ها است، داریم $T_{(1)} \leq \dots \leq T_{(m)}$.

۱۰.۲ آزمون‌های چندگانه برای کنترل نرخ خطای خانواده

آزمون فرض چندگانه مطابق با (۱) متشکل از m فرضیه صفر H_{0i} در مقابل H_{1i} , $i = 1, \dots, m$ را در نظر بگیرید. فرض کنید M_0 نشانگر مجموعه شناسه‌هایی باشد که فرض صفر برای آنها واقعاً درست

⁴Local Linear Kernel Smoothing

⁵Local Linear Mixed Effect

است که اندازه این مجموعه را با m_0 نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید M_1 مجموعه‌ی شناسه‌های فرض‌های صفر نادرست باشد که اندازه این مجموعه با $m_1 = m - m_0$ نشان داده می‌شود. یک روش آزمون چندگانه، برای هر یک از فرض‌ها نواحی رد $C_n(i)$ ، $i = 1, \dots, m$ ، را فراهم می‌کند که متناظر با مقداری از آماره آزمون $T_n(i)$ است که منجر به رد فرض صفر متناظر H_{0i} می‌شود (اندیس n در آماره آزمون‌ها و نواحی رد مربوط به خواص مجانبی است که در لی‌من و رومانو (۲۰۰۵) به آن اشاره می‌کند). بنابراین، یک روش آزمون چندگانه، مجموعه‌ای تصادفی از فرضیه‌های رد شده $R(i)$ را به دست می‌دهد که برآوردی از مجموعه‌ی فرض‌های نادرست است.

تعداد آزمون‌هایی که در آنها مرتکب خطای نوع اول شده‌ایم یا تعداد مثبت نادرست (کشف نادرست) برابر $V = |R \cap M_0|$ خواهد بود. متناظراً تعداد آزمون‌هایی که در آنها مرتکب خطای نوع دوم شده‌ایم یا تعداد منفی نادرست (کشف نشده‌های نادرست) برابر $U = |R^c \cap M_1|$ خواهد بود. تعداد منفی درست (کشف نشده‌های درست) یعنی تعداد فرض‌های صفر درست که رد نشده‌اند نیز برابر $T = |R^c \cap M_0|$ است. در نهایت تعداد مثبت‌های درست (کشف‌های درست) یعنی تعداد فرضیه‌های صفر نادرست که رد شده‌اند برابر $S = |R \cap M_1|$. جدول ۱ برآمد m آزمون همزمان را نشان می‌دهد، که در آن r

جدول ۱: برآمد m آزمون همزمان

قبول فرضیه صفر	رد فرضیه صفر	کل
T	V	m_0
U	S	m_1
$m - r$	r	m

تعداد فرض‌های صفر رد شده یا کل کشف شده‌ها برابر $|R| = r$ است. مهمترین نرخ خطای نوع اول، نرخ خطای خانوادگی (FWER) است در میان تمام نرخ‌های خطای نوع اول، نرخ خطای خانوادگی (FWER) از ابتدا بیش‌تر مورد توجه قرار گرفته‌است. این نرخ مطابق با لی‌من و رومانو (۲۰۰۵) عبارت است از احتمال اینکه حداقل یک فرضیه صفر به غلط رد شود (رد به غلط بیش از یک مورد تحت فرضیه صفر) و با استفاده از جدول ۱ این تعریف معادل

$$\text{FWER} = P(V \geq 1) = 1 - F_V(\cdot)$$

است. اگر برای تمام مجموعه‌های ممکن فرض‌های صفر درست و نادرست، نرخ فوق کنترل شود کنترل

قوی و اگر کنترل تنها برای مجموعه همه فرض‌های صفر درست انجام شود کنترل ضعیف می‌نامند. نخستین شیوه تک مرحله‌ای کلاسیک برای کنترل FWER توسط مکنزی (۱۹۸۵) بیان گردید. سیداک (۱۹۶۷) شیوه‌ای را شبیه شیوه بون‌فرونی ارائه کرد که اگر آماره‌های آزمون در نابرابری موسوم به سیداک صدق کنند، FWER در سطح α کنترل می‌شود. پس از آن هلم (۱۹۷۹) و هوچبر (۱۹۸۸) شیوه‌های دیگری را در راستای بهبود شیوه بون‌فرونی ارائه داده‌اند.

الف- شیوه تک‌مرحله‌ای کنترل FWER بون‌فرونی: شیوه کلاسیک بون‌فرونی مشهورترین شیوه برای کنترل FWER در آزمون چندگانه است که FWER را برای توزیع‌های توأم دلخواه صفر آماره‌های آزمون کنترل می‌کند. برای کنترل FWER در سطح α ، شیوه تک‌مرحله‌ای بون‌فرونی فرضیه صفر H_{0i} را رد می‌کند هرگاه p -مقدار متناظر با آن، کمتر یا مساوی نقطه برینش^۶ (تعیین نواحی رد برای هر یک از فرضیه‌های صفر) تک مرحله‌ای αm باشد. توجه داشته باشید که اگر $\frac{m_0}{m}$ خیلی کوچک باشد، شیوه فوق خیلی محافظه‌کارانه خواهد بود.

ب- شیوه تک‌مرحله‌ای کنترل FWER سیداک: شیوه تک‌مرحله‌ای سیداک روشی مشابه روش بون‌فرونی است به‌طوری‌که برای کنترل FWER در سطح α ، هر فرضیه صفر H_{0i} را رد می‌کند هرگاه p -مقدار متناظر با آن، کمتر یا مساوی $(1 - \alpha)^{1/m}$ باشد. یعنی مجموعه فرضیه‌های رد شده در این روش برابر

$$R_n(\alpha) = \{i; \hat{p}_i < 1 - (1 - \alpha)^{1/m}\}.$$

است این روش مشابه روش بون‌فرونی به‌ازای نسبت‌های کوچک $\frac{m_0}{m}$ خیلی محافظه‌کارانه عمل می‌کند.

ج- شیوه گام به پس کنترل FWER بیشین - کمینه: اگر چه شیوه‌های مختلف آزمون چندگانه برای کنترل FWER در سطح α ، به‌کار می‌رود، روش گام به‌پس نسبت به روش‌های مرسوم دارای توان بالاتری است (هوچبر، ۱۹۸۸). بالاخص برای مواردی که در آنها آزمون‌ها از هم مستقل نباشند، به‌طور مثال در طرح‌ها با اندازه‌گیری‌های مکرر نتایج مطلوبتری را در محاسبه توان نسبت به سایر روش‌ها نشان می‌دهد (لیکس و تولوپ، ۲۰۱۰). به‌همین منظور برای بهبود بیش‌تر و یافتن بهینه روش در بین یک کلاس از مسایل آزمون چندگانه شیوه بیشین-کمینه توسط لی‌من و رومانو (۲۰۰۵) در بین روش‌های گام به‌پس ارائه شده است را به‌کار می‌بریم.

فرض کنید آماره‌های آزمون T به‌صورت $T_{(1)} \leq \dots \leq T_{(m)}$ مرتب شده باشند و فرضیه‌های صفر متناظر آنها $H_{(1)}, \dots, H_{(m)}$ باشند. اگر $T_{(m)} < C_1$ هیچ‌یک از فرضیه‌های صفر $H_{(1)}, \dots, H_{(m)}$

^۶Cut off point

۱۴۲ آزمون‌های چندگانه در شناسایی پروفایل‌های دورافتاده

رد نمی‌شوند و روش به پایان می‌رسد. اگر $T_{(m)} \geq C_1$ و $T_{(m)} < C_2$ ، فرضیه صفر $H_{\circ(m)}$ رد شده و فرضیه‌های صفر $H_{\circ(1)}, \dots, H_{\circ(m-1)}$ رد نمی‌شوند. اگر $T_{(m)} \geq C_1$ و $T_{(m)} \geq C_2$ ولی $T_{(m-2)} < C_2$ ، فرضیه‌های $H_{\circ(m)}$ و $H_{\circ(m-1)}$ رد می‌شوند و فرضیه‌های صفر $H_{\circ(1)}, \dots, H_{\circ(m-2)}$ رد نمی‌شود. به همین ترتیب گام‌های بعد ادامه می‌یابد. C_{m-j+1} ها در این روش از رابطه

$$\underbrace{P_{\circ}, \dots, \circ}_j \{ \max(T_1, \dots, T_j) \geq C_{m-j+1} \} = \alpha \quad (5)$$

به دست می‌آیند. بنابراین C ها غیرافزایشی هستند. روش گام به پس بیشین - کمینه، FWER را در سطح α کنترل قوی می‌کند (لی من و رومانو، ۲۰۰۵).

۲.۲ تعیین حد آستانه

برای به دست آوردن آستانه C_i نیاز به تعیین توزیع آماره آزمون، تحت فرضیه $H_{\circ i}$ است. اما با توجه به اینکه توزیع تحت فرضیه $H_{\circ i}$ این آماره‌ها پیچیده است، می‌توان از روش بوت‌استرپ پارامتری برای تعیین نقاط بحرانی تقریبی آماره آزمون (۴) تحت فرضیه صفر استفاده کرد. در ادامه الگوریتمی برای یافتن آستانه C_i ارائه می‌شود. تعیین آستانه

گام ۱- با روش وو و ژانگ (۲۰۰۲) و براساس داده‌ها، برآوردهای \hat{g}_{\circ} ، \hat{f}_i و $\hat{\sigma}^2$ محاسبه شوند.
گام ۲- B نمونه بوت‌استرپ مستقل از مدل (۲) شامل m پروفایل براساس \hat{g}_{\circ} ، \hat{f}_i و $\hat{\sigma}^2$ تولید شوند.
گام ۳- در هر تکرار ($r = 1, \dots, B$) بوت‌استرپ، مقادیر $\hat{f}_i^{(r)}$ ، $\hat{g}_{\circ}^{(r)}$ و $\hat{\sigma}^{2(r)}$ براساس پروفایل‌های باز تولیدی محاسبه شوند.

گام ۴- برای r امین نمونه بوت‌استرپی، آماره‌های $T_1^{(r)}, \dots, T_m^{(r)}$ را به دست آورده قرار داده شود

$$S_i^{(r)} = \max(T_1^{(r)}, \dots, T_i^{(r)}) \quad i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, B$$

گام ۵- آستانه C_i به ازای $i = 1, \dots, m$ با محاسبه بزرگترین مقدار $\lfloor \alpha B \rfloor$ ، در بین $S_i^{(1)}, \dots, S_i^{(B)}$ تقریب زده شود، که در آن $\lfloor \alpha B \rfloor$ نشان‌دهنده جزء صحیح αB است.

۳ مطالعه شبیه‌سازی پایش پروفایل مدل‌های آمیخته رگرسیونی

در این بخش، مطالعه‌ای شبیه‌سازی برای مقایسه عملکرد شیوه پیشنهادی با دو آزمون چندگانه ارائه شده در فاز یک پایش پروفایل انجام خواهد شد. با استفاده از چندین طرح مورد بحث در مدل‌های تحت کنترل و خارج از کنترل و گزارش اندازه تجربی و توان آزمون پیشنهاد شده مبتنی بر $\hat{\eta}_i$ ها به شیوه سیداک با نماد TS_i و به روش بیشین-کمینه با نماد T_{\max} نشان داده می‌شود، عملکرد شیوه پیشنهادی با شیوه مختلف آزمون فرض چندگانه شامل روش سیداک و گام به پس بیشین-کمینه است، مقایسه می‌شود. برای این‌منظور نخست یک مدل آمیخته ناپارامتری تحت کنترل در نظر گرفته می‌شود و با مقایسه خطای نوع اول و نیز توان آزمون، میزان کارآمدی این روش‌ها در کشف پروفایل‌های دورافتاده مشخص خواهد شد. کلیه محاسبات بر مبنای روش ارائه شده از طریق برنامه نویسی با استفاده از نرم افزار R بدست آمده است.

۱.۳ بررسی اندازه تجربی آزمون‌ها

مدل رگرسیونی با اثرات آمیخته مطابق (۲) را به صورت

$$Y_{ij} = g_0(x_{ij}) + f_i(x_{ij}) + \epsilon_{ij} \quad j = 1, \dots, n_i, i = 1, \dots, m$$

در نظر بگیرید. برای بررسی هشدار به غلط تجربی در فاز یک پایش، سناریوی تحت کنترل

$$g_0(x) = 2(x - 0.5)^2 + 2.4 \sin(2\pi(x - 0.5)) \quad (6)$$

برای جمله ثابت مدل فوق در نظر گرفته می‌شود. برای ساده‌تر شدن می‌توان فرض کرد که تعداد نقاط نمونه در هر پروفایل با پروفایل دیگر برابر و یا به عبارتی دیگر $n_i = n$ است و نیز نقاط طرح، x_{i1}, \dots, x_{in_i} ، برای همه پروفایل‌ها یکسان و به صورت x_1, \dots, x_n است. برای تمام طرح‌های پیشنهاد شده جمله اثر تصادفی به صورت $f_i(x_j) = b\alpha_i x_j$ است که در آن $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد و b یک مقدار ثابت است که می‌توان از مجموعه $0.1, 1, 1/8$ انتخاب کرد.

برای برآورد پارامترهای مدل (۲) به روش هموارسازی هسته‌ای موضعی از تابع هسته اپانچنیکوف

$$K(x) = 0.75(1 - x^2), \quad -1 < x < 1 \quad (7)$$

به دلیل خواص بهینه آن (ویب، ۲۰۱۵؛ وو و ژانگ، ۲۰۰۲) استفاده می‌شود. به علاوه نقاط طرح ثابت x_1, \dots, x_n به طور تصادفی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ انتخاب می‌شوند. با انجام ۱۰۰۰۰ شبیه‌سازی مونت‌کارلویی و $B = 500$ تکرار برای روش بوت‌استرپ پارامتری به منظور محاسبه مقادیر بحرانی، آماره‌های $T_1^{(r)}, \dots, T_m^{(r)}$ را به ازای $r = 1, \dots, 10000$ محاسبه کرده و چنک $\alpha\%$ را مطابق با الگوریتم ۱ از $S_j^{(1)}, \dots, S_j^{(10000)}$ به عنوان تقریبی از کران بالای $C_j (j = 1, \dots, m)$ به دست آورده می‌شود.

در مدل (۵) براساس روش بوت‌استرپ پارامتری برای به دست آوردن حد آستانه که به آن اشاره شد، حد بالای کنترل فاز یک نمودار کنترل را به دست آورده و نرخ خطای خانوادگی FWER، نسبت پروفایل‌های به غلط دورافتاده شناسایی شده، در سطح اسمی $\alpha = 0.05$ کنترل می‌شود (جدول ۲). با روش آزمون چندگانه سیداک، FWER مربوطه را با نماد $FWER_{T_{Si}}$ و مطابق با الگوریتم ۱ روش گام به پس بیشین-کمینه، FWER آن را با نماد $FWER_{T_{max}}$ در جدول ۲ تحت فرضیه صفر و سناریوی فوق بیان شده است. مقادیر به ازای $m = 20, 50$ تعداد پروفایل، $n = 20, 40$ نقطه طرح و همچنین مقادیر عددی متفاوت ضریب جمله اثر تصادفی برای سناریوی معرفی شده محاسبه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مقادیر در سطح معنی‌داری اسمی موردنظر بسیار نزدیک هستند، خصوصاً هنگامی که m و n افزایش می‌یابد. همچنین محافظه‌کارانه بودن روش سیداک در مواردی که در جدول مشخص شده است به ازای مقادیر مختلف نقاط طرح و تعداد پروفایل مشابه نتیجه ال‌اوش و ال‌زید (۱۹۸۷) که برای آماره مورد نظر با استفاده از روش بون‌فرنی پایش پروفایل را در فاز یک انجام دادند مطابقت دارد. نرخ کشف نادرست^۷

جدول ۲: مقادیر FWER سناریوی پیشنهادی با سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$

$FWER_{T_{max}}$	$FWER_{T_{Si}}$	b	m	n	$FWER_{T_{max}}$	$FWER_{T_{Si}}$	b	m	n
۰/۰۴۶۵	۰/۰۵۴۳	۰/۱			۰/۰۴۵	۰/۰۳۷	۰/۱		
۰/۰۴۶۸	۰/۰۵۴	۱	۵۰	۲۰	۰/۰۴۴	۰/۰۳۶	۱	۲۰	۲۰
۰/۰۴۶۹	۰/۰۵۴	۱/۸			۰/۰۴۶	۰/۰۳۷۴	۱/۸		
۰/۰۴۹۹	۰/۰۴۴۵	۰/۱			۰/۰۴۹۵	۰/۰۴۱	۰/۱		
۰/۰۵	۰/۰۴۵۱	۱	۵۰	۴۰	۰/۰۴۹۸	۰/۰۴۱۲	۱	۲۰	۴۰
۰/۰۵	۰/۰۴۶۷	۱/۸			۰/۰۵۴	۰/۰۴۱	۱/۸		

(FDR) عبارت است از امید ریاضی نسبت تعداد خطاهای نوع اول به کل فرض‌های رد شده است (ژنگ و همکاران، ۲۰۰۶). توجه کنید تحت فرضیه صفر کامل (اگر همه فرضیه‌های صفر درست باشد)، حتی

^۷False Discovery Rate

اگر یک فرضیه صفر رد شود و چون در این حالت هر فرضیه صفر رد شده به غلط رد شده است در نتیجه مطابق با جدول ۱ داریم $FDR = FWER = Pr(V > 0)$. پس در این حالت هر روشی که $FDR \leq FWER$ را کنترل می‌کند، به طور کلی نامساوی $FDR \leq FWER$ همواره برقرار است (لی من و رومانو، ۲۰۰۵). وقتی کنترل ضعیف اعمال می‌شود بروز نتیجه معنی‌دار فقط نشان‌دهنده آن است که بعضی از فرض‌های صفر رد شده‌اند، نظیر آنچه در آزمون فرض برابری چند تیمار انجام می‌شود. ولی کنترل قوی این امکان را می‌دهد که همه فرض‌ها به تنهایی آزمون شوند و یک نتیجه معنی‌دار دقیقاً معلوم می‌کند که کدام فرض صفر رد شده است، که این شیوه کنترل دقیقاً آن چیزی است که در آزمون فرض چندگانه انجام می‌گیرد. با استفاده از روش آزمون چندگانه سیداک، FDR مربوطه را با نماد FDR_{TSi} و مطابق با روش گام به‌پس بیشین-کمینه، FDR آن را با نماد FDR_{Tmax} در جدول ۳ تحت فرضیه صفر سناریوی گفته شده و مطابق با (۶)، $g_0(x)$ و تعداد پروفایل‌ها، $m = 20, 50$ و تعداد نقاط طرح در مدل‌های ذکر شده به‌ازای $n = 20$ و 40 و همچنین مقادیر عددی متفاوت ضریب جمله اثر تصادفی نمایش داده شده است.

جدول ۳: مقادیر FDR سناریوی پیشنهادی با سطح معنی‌داری $\alpha = 0.05$

FDR_{Tmax}	FDR_{TSi}	b	m	n	FDR_{Tmax}	FDR_{TSi}	b	m	n
0.045	0.03	0.1			0.044	0.026	0.1		
0.048	0.034	1	50	20	0.044	0.013	1	20	20
0.0469	0.0415	1.8			0.043	0.0174	1.8		
0.0487	0.04	0.1			0.047	0.01	0.1		
0.0501	0.041	1	50	40	0.0471	0.012	1	20	40
0.05	0.047	1.8			0.0495	0.031	1.8		

۲.۳ بررسی توان تجربی آزمون

همچنان‌که اشاره شد در آزمون فرض تکی، تابع توان یک اندازه یا یک معیار برای ارزیابی توانایی یک آزمون است که آیا به‌درستی فرضیه صفر را رد می‌کند یا خیر. اما در آزمون فرض چندگانه یک اندازه توان واحد وجود ندارد و بنابراین توان یک آزمون توسط چندین اندازه یا معیار مختلف ارزیابی می‌شود. در این مقاله دو معیار برای بررسی توان آزمون به‌کار گرفته شده است. نرخ کشف درست TDR^* ، عبارت است از امیدریاضی نسبت تعداد مثبت‌های درست (فرضیه صفری که به درستی رد شود) به تعداد فرضیه‌های رد

⁸True Discovery Rate

شده و نیز احتمال رد به درستی تمام فرضیه‌های صفر نادرست، را به‌عنوان توان فراموضعی^۹ دو معیار توان هستند که برای بررسی عملکرد روش پیشنهادی فاز یک پایش پروفایل از آن‌ها استفاده شده است. رجبی و همکاران (۲۰۱۷) آماره پیشنهادی (۴) در فاز یک پایش پروفایل را با روش ال‌اوش و ال‌زید (۱۹۸۷) با بکارگیری آماره T^2 هتلینگ برای شناسایی پروفایل‌های دورافتاده در فاز یک مقایسه کرده‌اند.

شبیه‌سازی براساس حالت بیان شده در مدل تحت کنترل و خارج از کنترل ساخته می‌شود. متناظر با حالت تحت کنترل ذکر شده در بخش قبل، مطابق با (۶)، مدل

$$g_i(x) = g_0(x) + i, \quad i = 1, \dots, m.$$

برای پروفایل‌های خارج از کنترل در نظر گرفته می‌شود. در حالت خارج از کنترل، هر پروفایل دورافتاده از مدل خاص خود پیروی می‌کند. از آنجا که عملکرد آزمون‌ها می‌تواند به نسبت پروفایل‌های دورافتاده وابسته باشد برای بررسی اثر این عامل، در شبیه‌سازی‌ها نسبت پروفایل‌های دورافتاده را کنترل می‌کند. فرض کنید ρ نسبت پروفایل‌های دورافتاده است. در بررسی توان در شبیه‌سازی انجام شده تحت هریک از مقادیر ρ (۵٪، ۱۰٪، ۳۰٪) برای مدل خارج از کنترل، انجام گرفته است. در جدول‌های ۴ و ۵ نسبت اعلام

جدول ۴: نرخ‌های کشف درست روش‌های بیشین-کمینه و سیداک با سناریوی پیشنهادی در سطح ۰/۰۵

$TD_{T_{\max}}$	$TD_{T_{Si}}$	ρ	m	n	$TD_{T_{\max}}$	$TD_{T_{Si}}$	ρ	m	n
۰/۸۹۱۵۶	۰/۸۷۱۱۲	۰/۰۵			۰/۸۶۹۶۴۳	۰/۸۳۹۸۷۲	۰/۰۵		
۰/۹۱۲۳۶۷	۰/۸۸۷۴۳۲	۰/۱	۵۰	۲۰	۰/۸۹۲۶۵	۰/۸۵۸۷۳۲	۰/۱	۲۰	۲۰
۰/۹۵۳۸۷۶	۰/۸۸۷۵۷	۰/۳۰			۰/۹۲۶۶۴	۰/۸۷۶۸۵	۰/۳۰		
۰/۸۷۸۲۸	۰/۸۸۸۴۸	۰/۰۵			۰/۸۸۷۴۲	۰/۸۶۵۴۸	۰/۰۵		
۰/۹۸۰۲۸	۰/۹۶۰۳۲	۰/۱	۵۰	۴۰	۰/۸۹۹۸۰۸	۰/۸۸۳۴۶	۰/۱	۲۰	۴۰
۰/۹۳۷۷۲	۰/۹۲۳۴۸	۰/۳۰			۰/۹۲۱۴۵۴	۰/۹۱۶۴۴۸	۰/۳۰		

به درستی رد فرضیه صفر به کل فرضیه‌های رد شده، $TD_{T_{Si}}$ براساس روش سیداک و نیز با استفاده از روش بیشین-کمینه $TD_{T_{\max}}$ و به‌درستی حداقل یک فرضیه صفر نادرست به عنوان نرخ کشف درست $GP_{T_{\max}}$ و $GP_{T_{Si}}$ به‌ترتیب روش سیداک و نیز با استفاده از روش بیشین-کمینه برای روش پیشنهادی

^۹Global Power

تحت حالت فوق، محاسبه شده است. با توجه به جدول ۱ نرخ کشف درست (TDR) برابر است با:

$$TDR \equiv E\left[\frac{S}{r}\right] = E\left[\frac{(r-V)}{r}\right]$$

با این شرط که اگر $r = 0$ آنگاه $\frac{(r-V)}{r} = 0$ تعریف می شود. می توان TDR را به صورت

$$\begin{aligned} TDR &= E\left[\frac{(r-V)}{r} \mid r > 0\right] Pr(r > 0) \\ &= E\left[\frac{r}{r} \mid r > 0\right] Pr(r > 0) - E\left[\frac{V}{r} \mid r > 0\right] Pr(r > 0) \\ &= Pr(r > 0) - FDR. \end{aligned}$$

بازنویسی کرد. اگر همه فرضیه های صفر نادرست باشند، در این صورت هر فرضیه رد شده، به درستی رد شده است و در نتیجه $V = 0$ و توان کامل یا توان کلی نیز عبارت است:

$$GP \equiv Pr(S = m_1) = Pr(U = 0) = F_U(0)$$

محاسبات کامپیوتری آزمون فرض چندگانه با استفاده از نرم افزار R، بسته stats و با دستور p.adjust انجام می گیرد، این دستور تنها برای روش های بون فرنی، هلم و چندین روش دیگر است، در نتیجه مقایسه دو روش ذکر شده سیداک و گام به پس که توسط لی من و رومانو (۲۰۰۵) بیان شده با کدنویسی در نرم افزار R انجام شده است^{۱۰}. نتایج به دست آمده نشان می دهد که در هر دو توان با افزایش تعداد پروفایل ها و همچنین ضرایب نسبت داده شده به مدل خارج از کنترل مقادیر توان ها نیز افزایش می یابد و این نتیجه به مراتب در روش بیشین-کمینه بیشتر خواهد بود.

۴ مثال کاربردی

یکی از مهمترین مشخصه کیفیت موتور اتومبیل رابطه بین گشتاور تولید شده توسط موتور با سرعت موتور در دقیقه است. کاربرد آن در مونتاژ موتور اتومبیل پژوی فرانسه تیپ TU3 بکار رفته است. در این سری از داده ها (قابل دسترس در ال زید و ال اوش (۱۹۸۸)) با حرکت هر موتور سرعت های متفاوتی ثبت

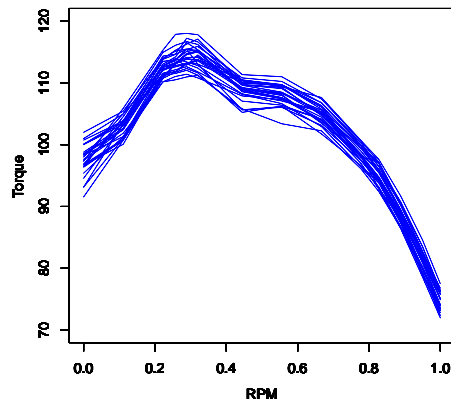
^{۱۰} کدهای مربوطه از طریق ایمیل به نویسنده قابل دریافت است.

جدول ۵: توان‌های فراموضعی روش‌های بیشین-کمینه و سیداک با سناریوی پیشنهادی در سطح ۰/۰۵

$GP_{T_{\max}}$	$GP_{T_{Si}}$	ρ	m	n	$GP_{T_{\max}}$	$GP_{T_{Si}}$	ρ	m	n
۰/۹۲۴۱۱۲۹	۰/۹۱۱۵۱۷	۰/۰۵			۰/۸۷۹۲۹	۰/۸۳۰۹۱	۰/۰۵		
۰/۹۴۹۳۲۷	۰/۹۱۸۳۶۵	۰/۱	۵۰	۲۰	۰/۸۸۱۰۹۵	۰/۸۵۹۳۶	۰/۱	۲۰	۲۰
۰/۹۵۴۱۹۴۳	۰/۹۱۸۵۱۸	۰/۳۰			۰/۹۴۹۸۰۳	۰/۹۰۳۲۴	۰/۳۰		
۰/۹۲۱۲۱۸۶	۰/۹۳۲۹۵۷	۰/۰۵			۰/۹۱۲۴۳۶	۰/۸۷۹۸۹	۰/۰۵		
۰/۹۸۹۴۶۳۸	۰/۹۶۸۸۳۰	۰/۱	۵۰	۴۰	۰/۹۴۳۲۳۸	۰/۸۹۹۸۳	۰/۱	۲۰	۴۰
۰/۹۶۶۰۹۷۸	۰/۹۵۱۳۰۲	۰/۳۰			۰/۹۴۹۸۳۸	۰/۹۲۰۱۱	۰/۳۰		

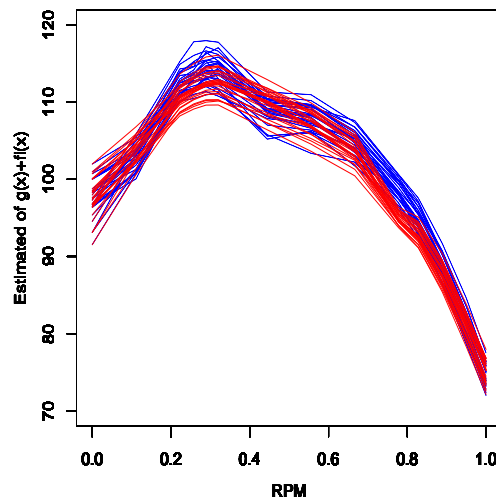
شده و متناظر با آن گشتاور تولید شده توسط موتور به دست آمده است. بنابراین گشتاور تولید شده توسط موتور به عنوان متغیر پاسخ و سرعت موتور نیز به عنوان متغیر تبیینی در نظر گرفته می‌شود. هنگامی که فرایند تحت کنترل باشد، پروفایل‌هایی که رابطه بین گشتاور تولید شده توسط موتور و سرعت موتور را نشان می‌دهند، مشابه هم خواهند بود و هر نقص مکانیکی یا عامل دیگری که بر روی موتور تاثیر بگذارد می‌توان آنرا به عنوان پروفایل دورافتاده در نظر گرفت. در این سری از داده‌ها سرعت موتور به ازای ۱۴ مقدار مختلف برحسب دور بر دقیقه به ترتیب عبارت است از: ۱۵۰۰، ۲۰۰۰، ۲۵۰۰، ۲۶۶۰، ۲۸۰۰، ۲۹۴۰، ۳۵۰۰، ۴۰۰۰، ۴۵۰۰، ۵۰۰۰، ۵۲۲۵، ۵۵۰۰، ۵۷۷۵ و ۶۰۰۰ که مطابق با آنها مقادیر گشتاور تولید شده توسط موتور گزارش شده است. در نتیجه نقاط طرح برای هر موتور و یا پروفایل در نظر گرفته می‌شود، این مجموعه داده‌ها شامل ۲۶ پروفایل است که هر کدام ۱۴ مقدار اندازه‌گیری شده را در طول پروفایل به همراه دارند.

شکل ۱، ۲۶ پروفایل (گشتاور تولید شده توسط موتور) را به ازای ۱۴ دور بر دقیقه این موتورها را نشان می‌دهد. ال‌زید و ال‌اوش (۱۹۸۸) به منظور در نظر گرفتن همبستگی ذاتی درون پروفایلی یک مدل آمیخته خطی را به این مجموعه داده‌ها برازش داده که منجر به تشخیص هیچ پروفایل دورافتاده‌ای نشد. ال‌اوش و ال‌زید (۱۹۸۷) به صورت سه مدل پارامتری، نیمه‌پارامتری و ناپارامتری با اثرات آمیخته این پروفایل‌ها را در نظر گرفته و با آزمون چندگانه به روش بون‌فرنی در مورد رد یا قبول پروفایل دورافتاده نتیجه را بررسی کرده‌اند. ال‌اوش و ال‌زید (۱۹۸۷) برتری مدل‌های نیمه‌پارامتری و ناپارامتری را در کارایی، انعطاف‌پذیری و نیرومندی نسبت به مدل پارامتری در داده‌های مربوط به صنعت خودروسازی نشان داده‌اند. یک مدل‌بندی خوب، مدل‌بندی است که در بین انواع مختلفی از مدل‌های بالقوه، مدلی را به عنوان ساده‌ترین شکل ممکن انتخاب کند در حالی‌که هنوز درصد قابل توجهی از تغییرپذیری داده‌ها را توضیح دهد (ال‌زید و ال‌اوش، ۱۹۸۸). مدل (۲) به صورت $Y_{ij} = g_0(x_{ij}) + f_i(x_{ij}) + \epsilon_{ij}$ که در آن



شکل ۱: گشتاور تولید شده توسط موتور (Torque) در سرعت موتور در دقیقه (RPM)

۱۴, ..., i تعداد پروفایل و $j = 1, \dots, 26$ تعداد نقاط طرح به طوری که x_1, \dots, x_n نقاط طرح ثابتی هستند که به طور تصادفی از توزیع یکنواخت $(0, 1)$ انتخاب شده اند را به مجموعه داده های ذکر شده برازش داده و سپس با استفاده از روش هموار سازی هسته ای خطی موضعی، پروفایل های برآورد شده مدل را به صورت $\hat{g}_e(x_{ij}) + \hat{f}_i(x_{ij})$ به دست آورده می شود، که در شکل ۲ نمایش داده شده است. اینک شیوه



شکل ۲: برآورد گشتاور تولید شده به روش هسته ای خطی موضعی

پیشنهادی برای شناسایی پروفایل‌های دورافتاده به کار می‌گرفته می‌شود. برای این کار، ابتدا با جایگزینی $\frac{x.j - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}$ در نقاط طرح به جای $x.j$ برای کاهش اثر هم خطی چندگانه در داده‌ها براساس رابطه (۴)، مقادیر مشاهده شده آماری، $\hat{\eta}_i$ به ازای $i = 1, \dots, 26$ ، محاسبه کرده سپس با استفاده از آزمون چندگانه بیشین-کمینه برای تعیین نقاط برینش C_j ، $(j = 1, \dots, 26)$ ، با استفاده از الگوریتم ۱ که در فصل دوم بیان شده با $B = 200$ تکرار بوت‌استرپ و سطح اسمی $\alpha = 0.05$ به شناسایی پروفایل‌های دورافتاده پرداخته می‌شود. لی‌من و رومانو (۲۰۰۵) شیوه دیگری را برای فهم بیشتر گام به پس بیشین-کمینه بیان کرده‌اند، در اینجا برای به دست آوردن نقاط برینش از این مفهوم برای داده‌های واقعی استفاده می‌شود. فرض کنید $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m$ - مقدارهای متناظر با آماره آزمون‌های T_1, \dots, T_m باشند و p -مقدارهای مرتب شده توسط $\hat{p}_{(1)} \leq \dots \leq \hat{p}_{(m)}$ نشان داده شوند. اگر F توزیع حاشیه‌ای مشترک T_i ها تحت فرض $\theta_i = 0$ باشد، آنگاه، $\hat{p}_i = 1 - F(T_i)$ و $\hat{p}_{(1)} = 1 - F(T_{(m)})$. بنابراین در گام‌های شیوه گام به پس داریم $\hat{p}_{(1)} \leq \alpha_1, \hat{p}_{(2)} \leq \alpha_2, \dots$ که معادل $T_{(m)} \geq C_1, T_{(m-1)} \geq C_2, \dots$ است. برای α_i های مناسب. به خصوص توجه کنید که $T_{(m)} \geq C_1$ معادل $\hat{p}_{(1)} \leq \alpha_1$ است. بنابراین $T_{(m)} < C_1$ معادل است با $1 - \alpha_1 < F(T_{(m)})$ و $F(T_{(m)}) < 1 - \alpha_1$ در نتیجه $C_1 = F^{-1}(1 - \alpha_1)$. از طرف دیگر اگر G_m توزیع $T_{(m)}$ تحت فرض اینکه تمام θ_i ها برابر صفرند، باشد، آنگاه با استفاده از رابطه (۵) داریم $C_1 = G_m^{-1}(1 - \alpha)$ ، بنابراین

$$1 - \alpha_1 = F(G_m^{-1}(1 - \alpha)) \quad (۸)$$

یعنی α_1 تابعی از α است. حال به طور مختصر طرح گسترش یافته برای α_2 بیان می‌شود. چون $\hat{p}_{(2)} \leq \alpha_2$ معادل است با $T_{(m-1)} \geq C_2$ به طوری که C_2 در آن از رابطه (۵) به دست می‌آید. بنابراین $G_{m-1}(C_2) = 1 - \alpha$ توجه کنید که G_{m-1} توزیع $T_{(m-1)}$ نیست. یعنی G_{m-1} توزیع دومین بزرگ‌ترین آماره در بین m تا T نیست. بلکه توزیع بزرگ‌ترین آماره بین T_1, \dots, T_{m-1} است، یعنی بزرگ‌ترین بین $m - 1$ تا T است. مشابه استدلال بالا و مطابق با (۸) داریم

$$1 - \alpha_2 = F(G_{m-1}^{-1}(1 - \alpha))$$

اگر $T_1 = \dots = T_{m-1}$ ، آنگاه α_2 مقدار ماکسیم خود را اختیار می‌کند، همانند مقدار ماکسیم α_1 . به همین ترتیب با ادامه این مراحل در حالتی که در شیوه گام به پس بیشین - کمینه، حدود بحرانی مقادیر

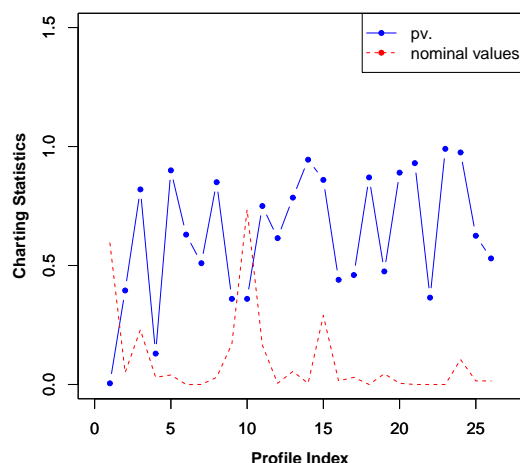
ثابت باشند و G_j توزیع ماکسیمم آماره‌های T_1, \dots, T_j باشد، خواهیم داشت

$$1 - \alpha_i = F(G_{m-i+1}^{-1}(1 - \alpha))$$

شکل‌های ۱، ۲، ۳ با کدنویسی در نرم‌افزار R رسم شده‌اند. با توجه به روابط ذکر شده می‌توان نقاط برینش را برای رد یا قبول فرضیه صفر یا شناسایی پروفایل دور افتاده به دست آورد. مقادیر احتمال $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_m$ و متناظر با این مقادیر، نقاط $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار \hat{p}_1 که مربوط به احتمال رد فرضیه صفر برای پروفایل اول از مقدار اسمی مربوطه یعنی α_1 کمتر است ($\hat{p}_{(1)} \leq \alpha_1$) و نشان‌دهنده آن است که پروفایل اول از مجموعه داده‌ها نسبت به سایر پروفایل‌ها دور افتاده می‌باشد. همچنین $\hat{p}_{(10)} \leq \alpha_{10}$ ولی پروفایل دهم را به عنوان پروفایل دور افتاده شناسایی نمی‌شود زیرا در روش گام به پس بیشین-کمینه مقایسه براساس آماره‌های ترتیبی و یا به عبارتی دیگر دنباله‌ای صورت می‌گیرد. در موارد یاد شده (ال‌اوش و ال‌زید، ۱۹۸۷؛ ال‌زید و ال‌اوش، ۱۹۸۸) سیگنالی را به عنوان پروفایل دور افتاده مشاهده نکرده‌اند. به روش سیداک نیز داده‌ها مورد بررسی گرفته و پروفایل دور افتاده‌ای مشاهده نشده است نتایج در این قسمت ثبت نشده است. این نتایج با در نظر گرفتن مدل رگرسیونی با اثرات آمیخته و آماره پیشنهادی (۴) و به کارگیری روش بیشین-کمینه برای شناسایی پروفایل دور افتاده انجام شده و روش پیشنهادی یک سیگنال را در داده‌های فوق مشاهده می‌کند. دلیل این مطلب را تنها در به کارگیری روش آزمون چندگانه گام به پس بیشین-کمینه بیان می‌شود زیرا این روش برای طرح‌هایی با اندازه‌گیری‌های مکرر نتایج مطلوب‌تری را به دست می‌آورد.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله براساس روش هموارسازی هسته‌ای موضعی خطی در قالب مدل‌های رگرسیونی با اثرات آمیخته، شیوه‌ای جدید را براساس آزمون‌های چندگانه برای شناسایی پروفایل‌های دور افتاده در فاز یک پایش، معرفی شد. همچنین عملکرد این شیوه جدید را با روش بوت‌استرپ پارامتری و روش مونت‌کارلویی با روش‌های دیگر آزمون چندگانه ارائه شده مقایسه کرده و نیز این شیوه در قالب یک مثال کاربردی پیاده‌سازی شد. در اغلب مقالات در حوزه پایش پروفایل از آزمون چندگانه به روش بون‌فرنی یا سیداک استفاده می‌شود. مطابق با نتایج شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که روش گام به پس به مراتب نرخ خطای خانواده یا FWER را به سادگی کنترل می‌کند و این در دو روش فوق صورت نمی‌پذیرد و همچنین در به دست آوردن توان بالا



شکل ۳: مقادیر p-value و سطح معنی‌داری متناظر با هر پروفایل یا گشتاور تولید شده توسط موتور

نیز روش گام به‌پس بهتر عمل کرده به‌طوری‌که مطالعات توسط داده واقعی نیز این نتیجه را نشان می‌دهد. پایش پروفایل فاز یک با استفاده از مدل‌های رگرسیونی با خطای اندازه‌گیری، پایش پروفایل فاز یک با استفاده از مدل‌های ناپارامتری با توزیع خطای غیر نرمال، پایش پروفایل فاز یک و دو به‌شیوه بیزی برای مدل‌های ناپارامتری و نیم‌پارامتری می‌توانند موضوعاتی برای مطالعات بعدی باشند.

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از پیشنهادات و نظرات داوران محترم و همچنین از ویراستار مجله که در بهبود مقاله موثر واقع شدند، کمال تشکر را دارد.

مراجع

احمدی، م. و.، سرمد، م. (۱۳۸۸)، شناسایی نقاط دورافتاده در داده‌های نرمال بر اساس مقادیر Z اصلاح شده مشاهدات، مجله علوم آماری، ۳، ۱۱۹-۱۳۹.

- Abdel-Salam, G. A., Birch, J. B. and Jensen, W. A. (2013), A Semiparametric Mixed Model Approach Phase I Profile Monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*, **29**, 555-569.
- Adibi, A., Montgomery, D. C. and Borrór, C. M. (2014), A P-value Approach for Phase II Monitoring of Multivariate Profiles. *International Quality Engineering & Technology*, **4**, 1757-2177.
- Amiri, A., Jensen, W. A. and Kazemzadeh, R. B. (2009), A case study on monitoring polynomial profiles in the automotive industry. *Quality and Reliability Engineering International*, **26**, 509-520.
- Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, C. and Noorossana, R. (2012), A Parameters Reduction Method for Monitoring Multiple Linear Regression Profiles, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **58**: 621-629
- Barnett, V., and Lewis, T. (1998), Outliers in Statistical Data, New York: Wiley.
- Bonferroni, C. E. (1936), Teoria Statistica Delle Classi e Calcolo Delle Probabilit, *Pubblicazioni del R Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciali di Firenze*, 3-62.
- Chen, B. E., Sakoda, L. C., Hsing, A. W., and Rosenberg, P. S. (2006), Resampling-based multiple testing procedures for genetic case-control association studies, *Genetic Epidemiology* , **30**, 495-507
- Fan, J., and Gijbels, I. (1996), Local Polynomial Modeling and Its Applications, *Chapman Hall*, London, **35**, 42.
- Fan, J., Zhang, C. and Zhang, J. (2001), Generalized Likelihood Ratio Statistics and Wilks Phenomenon, *The Annals of Statistics*, **29**, 153-193.
- Ghosh, D. (2010), Discrete nonparametric algorithms for outlier detection with genomic data. *J Biopharm Stat*, **20**, 193-208.
- Hawkins, D. (1980), Identification of Outliers. New York: Chapman and Hall.
- Hochberg, Y. (1988), A Sharper Bonferroni Procedure for Multiple Tests of Significance, *Biometrika*, **75**, 800-802.
- Holm, S. (1979), A Simple Sequentially Rejective Multiple Test Procedure, *Scandinavian Journal of Statistics*, **6**, 65-70.
- Lehmann, E.L., Romano, J. P. (2005), Testing Statistical Hypotheses (Third edition), Springer.

- Lix, L., and Tolulope, S., (2010), Testing Multiple Outcomes in Repeated Measures Designs. *Psychological Methods*, **15**, 268-280.
- Noorossana, R., Saghaei, A., Amiri, A. (2011), Statistical Analysis of Profile Monitoring, First Edition, New Jersey, Wiley.
- Qiu, P., Zou, C., and Wang, Z. (2010), Nonparametric Profile Monitoring by Mixed-Effects Modeling, *Technometrics*, **52**, 265-277.
- Rajabi, M., Faridrohani, M. R. and Chenouri, S. (2017), Phase I Profile Monitoring with Nonparametric Mixed Effect Models. *Quality and Reliability Engineering International*, John Wiley, **33**, 1929-1941.
- Sidak, Z. (1967), Rectangular Confidence Regions for the Means of Multivariate Normal Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 626-633.
- Wei, P., Zhao, Z., and Lin, D. K. (2012), Profile Control Charts based on Nonparametric L-1 Regression Method. *The Annals of Applied Statistics*, **6**, 409-427.
- Wu, H., and Zhang, J. (2002), Local Polynomial Mixed-affect Models for Longitudinal Data. *Journal of the American Statistical Association*, **97**, 883-897.
- Yu, G., Zou, C., and Wang, Z. (2012), Outlier Detecting in Functional Observation with Applications to Profile Monitoring, *Technometrics*, **54**, 308-318.