مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۹
جلد ۱۴، شماره ۲، ص ۴۲۹ – ۴۴۸
DOI: 10.29252/jss.14.2.429

برآوردگر بیزی و بیز تجربی تابع قابلیت اعتماد در سیستم تنش-مقاومت چندمولفه‌ای براساس توزیع رایلی تعمیم‌یافته

رضا زارعی[1]، شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی[2]

[1]گروه آمار، دانشگاه گیلان

[2]گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۶/۰۷   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۹/۰۱/۱۷

چکیده: در این مقاله رویکرد بیز و بیز تجربی در برآورد تابع قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای در حالتی‌که متغیرهای تنش و مقاومت دارای توزیع رایلی تعمیم‌یافته با پارامترهای شکل متفاوت و پارامتر مقیاس یکسان هستند، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برآورد بیز، بیز تجربی و ماکسیمم درستنمایی تابع قابلیت اعتماد در دو حالت معلوم و نامعلوم پارامتر مقیاس تحت تابع زیان درجه دوم خطا ارائه می‌شود. سپس به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و با استفاده از دو مجموعه داده واقعی، برآوردگرهای پیشنهادی تابع قابلیت اعتماد با یکدیگر و با برآورد ماکسیمم درستنمایی متناظرشان مقایسه می‌شوند.
واژه‌های کلیدی: مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای، تابع قابلیت اعتماد، برآوردگر بیز، برآوردگر بیز تجربی، توزیع رایلی تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

در مدل‌های تنش-مقاومت به بررسی مقاومت مولفه تحت بررسی در برابر فشار وارد بر آن پرداخته می‌شود که میزان این فشار یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود. این مدل‌ها به‌طور گسترده در بسیاری از

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: رضا زارع، r.zarei@guilan.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N02, 62N05.

زمینه‌های تحقیقاتی مانند روان‌شناسی، داروسازی، پزشکی، مهندسی و به‌طور کلی در مسائلی که با مقایسه دو متغیر مواجه هستند، به‌کار می‌رود. اگر X بیانگر متغیر مقاومت سیستم و Y بیانگر متغیر فشار وارد بر آن باشد، سیستم تا زمانی فعال است که مقاومت سیستم از فشار وارد بر آن بیشتر باشد؛ یعنی $X > Y$. بنابراین $R = P(X > Y)$ که تابع قابلیت اعتماد سیستم نام دارد، میزان طول عمر سیستم را نشان می‌دهد. ایده اصلی قابلیت اعتماد برای نخستین بار توسط بیرنبام (۱۹۵۶) معرفی شد.

محققین بسیاری به مطالعه برآورد تابع قابلیت اعتماد در سیستم‌های تنش-مقاومت تک مولفه‌ای برای توزیع‌های مختلف پرداخته‌اند (کاندو و گوپتا ، ۲۰۰۶؛ رکب و همکاران ، ۲۰۰۸؛ اصغرزاده و همکاران ، ۲۰۱۱؛ لیو و تسای ، ۲۰۱۲؛ ال-موتایری و همکاران ، ۲۰۱۳؛ گیتانی و همکاران ، ۲۰۱۵). برآورد تابع قابلیت اعتماد تنش-مقاومت چندمولفه‌ای اولین بار توسط باتاچاریا و جانسون (۱۹۷۴) مورد بررسی قرار گرفت و در سال‌های اخیر بیشتر مورد توجه محققین قرار گرفته است (رائو و کانتام ، ۲۰۱۰؛ رائو ، ۲۰۱۴؛ رائو و همکاران ، ۲۰۱۷). همچنین مطالعاتی درباره تابع قابلیت اعتماد سیستم تنش-مقاومت چندمولفه‌ای بر اساس توزیع رایلی تعمیم‌یافته توسط رائو (۲۰۱۴) انجام شد که در آن برآورد ماکسیمم درستنمایی به‌دست آورده شده است. توزیع رایلی که توسط سورلس و پادگت (۲۰۰۱) معرفی شد، مهم‌ترین توزیع از خانواده توزیع‌های وایبول تعمیم‌یافته است که بسیاری از خواص توزیع‌های گاما، وایبول و نمایی تعمیم‌یافته را دارد و در حوزه‌های مختلف علوم مانند پزشکی، کشاورزی، زیست‌شناسی و نظریه قابلیت اعتماد کاربرد دارد و برای مدل‌بندی داده‌های سانسور شده، بریده شده، سانسور فزآینده و داده‌های مربوط به تنش-مقاومت به‌کار می‌رود.

تابع چگالی احتمال توزیع رایلی تعمیم‌یافته به‌صورت

$$f(x;\alpha,\lambda) = ۲\alpha\lambda x e^{-\lambda x^۲}(۱ - e^{-\lambda x^۲})^{\alpha-۱}, \qquad x > ۰, \quad \alpha,\lambda > ۰,$$

و با نماد $GR(\alpha,\lambda)$ نشان داده می‌شود، که در آن λ پارامتر مقیاس و α پارامتر شکل است. به ازای $\alpha \leq \frac{۱}{۲}$ توزیع رایلی تعمیم‌یافته نسبت به α کاهشی و به ازای $\alpha > \frac{۱}{۲}$ تک مدی و چوله به راست است.

در این مقاله برآوردهای بیزی و بیز تجربی برای تابع قابلیت اعتماد سیستم تنش-مقاومت چندمولفه‌ای بر اساس توزیع رایلی تعمیم‌یافته در دو حالت معلوم و نامعلوم پارامتر مقیاس، به‌دست آورده شده و با برآورد ماکسیمم درستنمایی آن که توسط رائو (۲۰۱۴) ارائه شده است، مقایسه می‌شود. در بخش‌های ۲ و ۳، برآوردگرهای بیزی و بیز تجربی تابع قابلیت اعتماد سیستم تنش-مقاومت تحت تابع زیان درجه دوم خطا در دو حالت معلوم و نامعلوم پارامتر مقیاس به‌دست آورده می‌شود. در بخش ۴ بر اساس روش شبیه‌سازی

مونت‌کارلو و در بخش ۵ با استفاده از دو مجموعه داده واقعی، به مقایسه برآوردگرهای ارائه شده با یکدیگر و سپس با برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پرداخته می‌شود. در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲ برآورد تابع قابلیت اعتماد سیستم در حالت λ معلوم

یک سیستم با k مولفه را در نظر بگیرید که به‌ترتیب دارای مقاومت‌های تصادفی $X_1, \dots, X_k$ و تنش تصادفی یکسان Y هستند. سیستم تا زمانی فعال است که مقاومت حداقل s مولفه از k مولفه بر تنش آن غلبه کند ($1 \leq s \leq k$). با فرض این‌که $G(y)$ تابع توزیع Y و $F(x)$ تابع توزیع مشترک $X_1, \dots, X_k$ باشند، تابع قابلیت اعتماد در سیستم چندمولفه‌ای به‌صورت

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F(y))^i (F(y))^{k-i} dG(y) \qquad (1)$$

تعریف می‌شود (باتاچاریا و جانسون ، ۱۹۷۴). فرض کنید X و Y به‌ترتیب مقاومت و تنش متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع رایلی تعمیم یافته $GR(\alpha, \lambda)$ و $GR(\beta, \lambda)$ باشند. در این‌صورت با استفاده از (۱)، تابع قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چند مولفه‌ای بر اساس توزیع رایلی تعمیم‌یافته به‌صورت

$$\begin{aligned} R_{s,k}(\alpha, \beta) &= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{0}^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda y^2})^\alpha]^i (1 - e^{-\lambda y^2})^{\alpha(k-i)} \\ &\times (2\beta\lambda y) e^{-\lambda y^2} (1 - e^{-\lambda y^2})^{\beta - 1} dy \end{aligned} \qquad (2)$$

به‌دست آورده می‌شود. با استفاده از بسط دوجمله‌ای برای عبارت $[1 - (1 - e^{-\lambda y^2})^\alpha]^i$ می‌توان نوشت

$$R_{s,k}(\alpha, \beta) = \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=0}^{i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-1)^j \int_{0}^{\infty} (2\beta\lambda y) e^{-\lambda y^2} (1 - e^{-\lambda y^2})^{\alpha(k-i+j)+\beta-1} dy$$

که با تغییر متغیر $t = ۱ - e^{-\lambda y^۲}$ داریم:

$$R_{s,k}(\alpha, \beta) = \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=\circ}^{i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-۱)^j \beta}{\beta + (k-i+j)\alpha} \tag{۳}$$

۲.۱ برآوردگر بیزی تابع $R_{s,k}$

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ و $Y_۱, \ldots, Y_m$ نمونه‌های تصادفی مستقل به‌ترتیب از توزیع‌های $GR(\alpha, \lambda)$ و $GR(\beta, \lambda)$ باشند. به‌منظور استفاده از رویکرد بیز، فرض کنید پارامترهای α و β مستقل از هم و به‌ترتیب دارای توزیع‌های پیشین $Gamma(a_۱, b_۱)$ و $Gamma(a_۲, b_۲)$ باشند. بنابراین به ازای مشاهدات $\mathbf{x} = (x_۱, \cdots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱, \cdots, y_m)$ و با توجه به تابع درستنمایی

$$L(\alpha, \beta) = ۲^{n+m} \alpha^n \beta^m \lambda^{n+m} (\prod_{i=۱}^{n} x_i)(\prod_{j=۱}^{m} y_j) e^{-(\alpha-۱)t(\lambda)-(\beta-۱)u(\lambda)}$$

که در آن $t(\lambda) = -\sum_{i=۱}^{n} \log(۱ - e^{-\lambda x_i^۲})$ و $u(\lambda) = -\sum_{j=۱}^{m} \log(۱ - e^{-\lambda y_j^۲})$، توزیع توام پسین α و β عبارتست از

$$\pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(t(\lambda) + b_۱)^{n+a_۱} (u(\lambda) + b_۲)^{m+a_۲}}{\Gamma(n + a_۱)\Gamma(m + a_۲)} \alpha^{n+a_۱-۱} \beta^{m+a_۲-۱} e^{-(b_۱+t(\lambda))\alpha} e^{-(b_۲+u(\lambda))\beta}. \tag{۴}$$

با در نظر گرفتن تابع زیان توان دوم خطا و استفاده از (۳) و (۴)، برآوردگر بیزی $R_{s,k}$ به‌صورت

$$\hat{R}^B_{s,k}(\lambda) = \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=\circ}^{i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-۱)^j \int_\circ^\infty \int_\circ^\infty \frac{\beta \pi(\alpha, \beta | \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\beta + (k-i+j)\alpha} d\alpha d\beta. \tag{۵}$$

به‌دست می‌آید. با تغییر متغیرهای $w_{ij} = \frac{\beta}{\beta + (k-i+j)\alpha}$ و $v_{ij} = \beta + (k-i+j)\alpha$ داریم

$$\int_\circ^\infty \int_\circ^\infty \frac{\alpha^{n+a_۱-۱} \beta^{m+a_۲}}{\beta + (k-i+j)\alpha} e^{-(b_۱+t(\lambda))\alpha} e^{-(b_۲+u(\lambda))\beta} d\alpha d\beta$$

$$= \frac{\Gamma(n+m+a_۱+a_۲)}{(k-i+j)^{n+a_۱}} \int_۰^۱ \frac{w_{ij}^{m+a_۲}(۱-w_{ij})^{n+a_۱-۱}}{A_{ij}^{n+m+a_۱+a_۲}} dw_{ij},$$

که در آن $A_{ij} = w_{ij}(u(\lambda)+b_۲) + \frac{(t(\lambda)+b_۱)(۱-w_{ij})}{k-i+j}$. بنابراین رابطه (۵) به‌صورت

$$\hat{R}_{s,k}^B(t,u) = B \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=۰}^{i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} \frac{(-۱)^j}{(k-i+j)^{n+a_۱}} \int_۰^۱ \frac{w_{ij}^{m+a_۲}(۱-w_{ij})^{n+a_۱-۱}}{A_{ij}^{n+m+a_۱+a_۲}} dw_{ij} \quad (۶)$$

تبدیل می‌شود، که در آن $B = \frac{(t(\lambda)+b_۱)^{n+a_۱}(u(\lambda)+b_۲)^{m+a_۲}\Gamma(n+m+a_۱+a_۲)}{\Gamma(n+a_۱)\Gamma(m+a_۲)}$.
با فرض $K_{ij} = ۱ - \frac{(u(\lambda)+b_۲)(k-i+j)}{t(\lambda)+b_۱}$، انتگرال موجود در (۶) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} &(t(\lambda)+b_۱)^{-(n+m+a_۱+a_۲)}(k-i+j)^{n+m+a_۱+a_۲} \\ &\times \int_۰^۱ w_{ij}^{m+a_۲}(۱-w_{ij})^{n+a_۱-۱}(۱-K_{ij}w_{ij})^{-(n+m+a_۱+a_۲)} dw_{ij}. \end{aligned} \quad (۷)$$

نوشت. اکنون با جایگذاری (۷) در (۶) و با استفاده از رابطه

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{۱}{B(\beta,\gamma-\beta)} \int_۰^۱ t^{\beta-۱}(۱-t)^{\gamma-\beta-۱}(۱-tz)^{-\alpha} dt, |z| < ۱$$

که در آن $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ تابع فوق هندسی و $G = \frac{u(\lambda)+b_۲}{t(\lambda)+b_۱}$ است، رابطه (۶) به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{R}_{s,k}^B &= \sum_{i=s}^{k} \sum_{j=۰}^{i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} (-۱)^j (k-i+j)^{m+a_۲} [\frac{m+a_۲}{n+m+a_۱+a_۲} G^{m+a_۲} F_۱^*(i,j) \\ &\times I_{(-۱,۱)}(K_{ij}) + \frac{m+a_۲}{n+m+a_۱+a_۲} G^{-n-a_۱} F_۲^*(i,j) I_{(-\infty,-۱)}(K_{ij})] \end{aligned}$$

بازنویسی می‌شود، که درآن

$$\begin{aligned} F_۱^*(i,j) &= F(n+m+a_۱+a_۲, m+a_۲+۱, n+m+a_۱+a_۲+۱; K_{ij}), \\ F_۲^*(i,j) &= F(n+m+a_۱+a_۲, n+a_۱+۱, n+m+a_۱+a_۲+۱; \frac{K_{ij}}{K_{ij}-۱}). \end{aligned}$$

علاوه بر آن، برآورد بیزی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ تحت تابع زیان توان دوم خطا را با بازنویسی به‌صورت

$$\begin{aligned}\hat{R}^B_{s,k}=E(R_{s,k}(\alpha,\beta)|\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty R_{s,k}(\alpha,\beta)L(\alpha,\beta)\pi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty L(\alpha,\beta)\pi(\alpha,\beta)d\alpha d\beta}\\ &= \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty R_{s,k}(\alpha,\beta)e^{\ln L(\alpha,\beta)+\ln\pi(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{\ln L(\alpha,\beta)+\ln\pi(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}\end{aligned}$$

نیز می‌توان به روش تقریب لیندلی به‌دست آورد.

۲.۱.۱ برآوردگر بیزی تابع $R_{s,k}$ به روش تقریب لیندلی

فرض کنید

$$E(u(\Lambda)|\mathbf{X})=\frac{\int u(\Lambda)e^{Q(\Lambda)}d\Lambda}{\int e^{Q(\Lambda)}d\Lambda}, \qquad (۸)$$

که در آن $Q(\Lambda)=\ell(\Lambda)+\rho(\Lambda)$ بوده، $\ell(\Lambda)$ لگاریتم تابع درستنمایی مشاهدات و $\rho(\Lambda)$ لگاریتم توزیع پیشین Λ است. رابطه (۸) را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}E(u(\Lambda)|\mathbf{X}) &= \{u+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j(u_{ij}+2u_i\rho_j)\sigma_{ij}\\ &+ \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_\ell L_{ijk}\sigma_{ij}\sigma_{k\ell}u_\ell\}_{\hat{\Lambda}}\end{aligned} \qquad (۹)$$

بازنویسی کرد، که در آن $\Lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m)$ و $\hat{\Lambda}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی Λ است (لیندلی ، ۱۹۸۰) . همچنین

$$u=u(\Lambda),u_i=\frac{\partial u}{\partial\lambda_i},u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j},L_{ijk}=\frac{\partial^3\ell}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j\lambda_k},\rho_j=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda_j},$$

که σ_{ij} درایه (i,j)-ام معکوس ماتریس $\{-L_{ij}\}$ است. در حالت $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$، رابطه (۹) به‌صورت

$$\hat{u}_B=E(u(\Lambda)|\mathbf{X})=(u+Au_1+Bu_2+C)_{\hat{\Lambda}},\quad \hat{\Lambda}=(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2)$$

تبدیل می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned}
A &= \rho_۱\sigma_{۱۱} + \rho_۲\sigma_{۱۲} + \frac{۱}{۲}L_{۱۱۱}\sigma_{۱۱}^۲ + \frac{۳}{۲}L_{۱۱۲}\sigma_{۱۱}\sigma_{۲۲} + \frac{۱}{۲}L_{۲۲۱}(\sigma_{۱۱}\sigma_{۲۲} + ۲\sigma_{۱۲}^۲) \\
&+ \frac{۱}{۲}L_{۲۲۲}\sigma_{۲۱}\sigma_{۲۲}, \\
B &= \rho_۱\sigma_{۱۲} + \rho_۲\sigma_{۲۲} + \frac{۱}{۲}\sigma_{۱۱}\sigma_{۱۲}L_{۱۱۱} + \frac{۱}{۲}L_{۱۱۲}(\sigma_{۱۱}\sigma_{۲۲} + ۲\sigma_{۱۲}^۲) + \frac{۳}{۲}\sigma_{۱۲}\sigma_{۲۲}L_{۱۲۲} \\
&+ \frac{۱}{۲}\sigma_{۲۲}^۲L_{۲۲۲}, \\
C &= \frac{۱}{۲}(u_{۱۱}\sigma_{۱۱} + ۲u_{۱۲}\sigma_{۱۲} + u_{۲۲}\sigma_{۲۲}).
\end{aligned}$$

بنابراین، برای $\Lambda = (\alpha, \beta)$ و $u(\alpha, \beta) = R_{s,k}(\alpha, \beta)$ داریم

$$\rho_۱ = \frac{a_۱ - ۱}{b_۱}, \rho_۲ = \frac{a_۲ - ۱}{b_۲}, L_{۱۱۱} = \frac{۲n}{\alpha^۳}, L_{۱۱۲} = L_{۱۲۲} = ۰, L_{۲۲۲} = \frac{۲m}{\beta^۳},$$

$$\sigma_{۱۱} = \frac{\alpha^۲}{n + a_۱ - ۱}, \sigma_{۱۲} = \sigma_{۲۱} = ۰, \sigma_{۲۲} = \frac{\beta^۲}{m + a_۲ - ۱},$$

$$u_۱ = \sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j+۱}(k-i+j)\beta}{[\beta + (k-i+j)\alpha]^۲},$$

$$u_۲ = \sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}(k-i+j)\alpha}{[\beta + (k-i+j)\alpha]^۲},$$

$$u_{۱۱} = ۲\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j}(k-i+j)^۲\beta}{[\beta + (k-i+j)\alpha]^۳},$$

$$u_{۲۲} = ۲\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^{j+۱}(k-i+j)\alpha}{[\beta + (k-i+j)\alpha]^۳},$$

$$u_{12} = u_{21} = \sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-1)^j(k-i+j)[\beta-(k-i+j)\alpha]}{[\beta+(k-i+j)\alpha]^3},$$
$$A = \frac{nb_1\alpha+(a_1-1)(n+a_1-1)\alpha^2}{b_1(n+a_1-1)^2},$$
$$B = \frac{mb_2\beta+(a_2-1)(m+a_2-1)\beta^2}{b_2(m+a_2-1)^2},$$

$$C = \frac{\alpha\beta}{2(n+a_1-1)(m+a_2-1)}\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{i}\{\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-1)^j(k-i+j)}{[\beta+(k-i+j)\alpha]^3}$$
$$\times[\alpha^2(k-i+j)(m+a_2-1)-\beta^2(n+a_1-1)\}.$$

در نتیجه، برآوردگر بیزی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ به روش تقریب لیندلی به‌صورت

$$\begin{aligned}\hat{R}^{B}_{s,k} &= \beta\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{i}\{\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-1)^j}{[\beta+(k-i+j)\alpha]^2}\\ &\times [\beta+(k-i+j)(\alpha-A+B(k-i+j)^{\alpha-1}+D(i,j))]\}_{(\hat{\alpha},\hat{\beta})}\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $D(i,j)=\frac{\alpha(k-i+j)}{2(n+a_1-1)(m+a_2-1)[\beta+(k-i+j)\alpha]}$.

۲.۲ برآوردگر بیز تجربی تابع $R_{s,k}$

در این بخش فرض می‌شود ابر پارامترهای a_1 و a_2 معلوم و b_1 و b_2 نامعلوم هستند. به کمک تابع درستنمایی بردار مشاهدات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ تابع چگالی شرطی $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ به شرط b_1 و b_2 عبارتست از

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\mathbf{y}|b_1,b_2) &= \frac{2^{n+m}b_1^{a_1}b_2^{a_2}\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)(t(\lambda)+b_1)^{n+a_1}(u(\lambda)+b_2)^{m+a_2}}\\ &\times \prod_{i=1}^{n}(\frac{x_ie^{-\lambda x_i^2}}{1-e^{-\lambda x_i^2}})\prod_{j=1}^{m}(\frac{y_je^{-\lambda y_j^2}}{1-e^{-\lambda y_j^2}}).\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی $b_۱$ و $b_۲$ به‌ترتیب $\hat{b}_۱ = \frac{a_۱}{n}t(\lambda)$ و $\hat{b}_۲ = \frac{a_۲}{m}u(\lambda)$ هستند. با جایگذاری $\hat{b}_۱$ و $\hat{b}_۲$ در (۶)، برآوردگر بیز تجربی $R_{s,k}$ به‌صورت

$$\hat{R}^{EB}_{s,k}(\lambda) = \hat{B}\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-۱)^j}{(k-i+j)^{n+a_۱}}\int_۰^۱ \frac{w_{ij}^{m+a_۲}(۱-w_{ij})^{n+a_۱-۱}}{(\hat{A}_{ij}(\lambda))^{n+m+a_۱+a_۲}}dw_{ij},$$

به‌دست می‌آید که در آن

$$\hat{B}(\lambda) = \frac{[t(\lambda)(۱+\frac{a_۱}{n})]^{n+a_۱}[u(\lambda)(۱+\frac{a_۲}{m})]^{m+a_۲}\Gamma(n+m+a_۱+a_۲)}{\Gamma(n+a_۱)\Gamma(m+a_۲)},$$
$$\hat{A}_{ij}(\lambda) = w_{ij}[t(\lambda)(۱+\frac{a_۱}{n})] + \frac{(۱-w_{ij})[u(\lambda)(۱+\frac{a_۲}{m})]}{k-i+j}.$$

۳ برآورد تابع قابلیت اعتماد سیستم در حالت λ نامعلوم

فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ و $Y_۱,\ldots,Y_m$ نمونه‌های تصادفی مستقل به‌ترتیب از توزیع‌های $GR(\alpha,\lambda)$ و $GR(\beta,\lambda)$ باشند که تمام پارامترهای مدل نامعلوم هستند. به‌منظور استفاده از رویکرد بیزی، فرض کنید پارامترهای α، β و λ متغیرهای تصادفی مستقل از هم به‌ترتیب دارای توزیع $Gamma(a_۱,b_۱)$، $Gamma(a_۲,b_۲)$ و $Gamma(a_۳,b_۳)$ باشند. مشابه زیربخش ۲.۱، توزیع توام پسین α، β و λ عبارت است از

$$\pi(\alpha,\beta,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\alpha^{n+a_۱-۱}\beta^{m+a_۲-۱}\lambda^{n+m+a_۳-۱}e^{-\alpha[b_۱+t(\lambda)]-\beta[b_۲+u(\lambda)]-\lambda(b_۳+\ell)}}{\Gamma(n+a_۱)\Gamma(m+a_۲)\int_۰^\infty \frac{\lambda^{n+m+a_۳-۱}e^{-\lambda(b_۳+\ell)}}{[b_۱+t(\lambda)]^{n+a_۱}[b_۲+u(\lambda)]^{m+a_۲}}d\lambda}, \quad (۱۰)$$

که در آن $t(\lambda)$ و $u(\lambda)$ در بخش ۲.۱ تعریف شدند و $\ell = b_۳ + \sum_{i=۱}^n x_i^۲ + \sum_{j=۱}^m y_j^۲$ است.

۳.۱ برآوردگر بیزی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$

بر اساس (۲) و (۱۰)، برآوردگر بیزی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ تحت تابع زیان درجه دوم خطا به‌صورت

$$\hat{R}^{B}_{s,k} = \sum_{i=s}^{k}\sum_{j=۰}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}(-۱)^j\int_۰^\infty\int_۰^\infty\int_۰^\infty \frac{\beta\pi(\alpha,\beta,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y})}{\beta+(k-i+j)\alpha}d\alpha d\beta d\lambda. \quad (۱۱)$$

به‌دست می‌آید. با تغییر متغیرهای $z_{ij}=\frac{\beta}{\beta+(k-i+j)\alpha}$ و $v_{ij}=\beta+(k-i+j)\alpha$، داریم

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\alpha^{n+a_1-1}\beta^{m+a_2}}{\beta+(k-i+j)\alpha}e^{-[b_1+t(\lambda)]\alpha}e^{-[b_2+u(\lambda)]\beta}d\alpha d\beta$$

$$=\frac{\Gamma(n+m+a_1+a_2)}{(k-i+j)^{n+a_1}}\int_{0}^{1}\frac{z_{ij}^{m+a_2}(1-z_{ij})^{n+a_1-1}}{[T(z_{ij},\lambda,i,j)]^{n+m+a_1+a_2}}dz_{ij},$$

که در آن $T(z_{ij},\lambda,i,j)=z_{ij}[u(\lambda)+b_2]+\frac{[t(\lambda)+b_1](1-z_{ij})}{k-i+j}$. از این‌رو، می‌توان (۱۱) را به‌صورت

$$\hat{R}^B_{s,k}=\frac{1}{B(n+a_1,m+a_2)}\sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}\frac{(-1)^j}{(k-i+j)^{n+a_1}}g(i,j),\qquad (۱۲)$$

بازنویسی کرد که در آن

$$g(i,j)=\frac{\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{z_{ij}^{m+a_2}(1-z_{ij})^{n+a_1-1}\lambda^{n+m+a_3-1}e^{-\lambda(b_3+l)}}{[T(z_{ij},\lambda,i,j)]^{n+m+a_1+a_2}}dz_{ij}d\lambda}{\int_{0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+m+a_3-1}e^{-\lambda(b_3+l)}}{[b_1+t(\lambda)]^{n+a_1}[b_2+u(\lambda)]^{m+a_2}}d\lambda},$$

و $B(\cdot,\cdot)$ نشان دهنده تابع بتا است. با توجه به این‌که انتگرال‌های موجود در این رابطه دارای جواب صریحی نیستند، در ادامه برای محاسبه آن‌ها از روش میانگین نمونه مونت‌کارلو استفاده خواهد شد.

۳.۱.۱ برآورد بیزی تابع $R_{s,k}$ به روش تقریب لیندلی

برای محاسبه تابع $\hat{R}^B_{s,k}$، ابتدا انتگرال سه‌گانه در (۱۰) به‌صورت

$$\begin{aligned}I_{ij}&=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{\beta\pi(\alpha,\beta,\lambda|\mathbf{x},\mathbf{y})}{\beta+(k-i+j)\alpha}d\alpha d\beta d\lambda\\&=\frac{\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}h_{ij}(\alpha,\beta)e^{\ln L(\alpha,\beta,\lambda)+\ln\pi(\alpha,\beta,\lambda)}d\alpha d\beta d\lambda}{\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}e^{\ln L(\alpha,\beta,\lambda)+\ln\pi(\alpha,\beta,\lambda)}d\alpha d\beta d\lambda}\end{aligned}$$

بازنویسی می‌شود، که در آن $h_{ij}(\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\beta+(k-i+j)\alpha}$. برای $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$، رابطه (۸) به‌صورت

$$\begin{aligned}E(u(\Lambda)) &= \{u+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}u_i\rho_j\sigma_{ij}+[u_{12}\sigma_{12}+u_{13}\sigma_{13}+u_{23}\sigma_{23}]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}u_{ii}\sigma_{ii}\\ &+ \frac{1}{2}[A\sum_{i=1}^{3}u_i\sigma_{1i}+B\sum_{i=1}^{3}u_i\sigma_{2i}+C\sum_{i=1}^{3}u_i\sigma_{3i}]\}_{\hat\Lambda}\end{aligned}$$

تبدیل می‌شود، که در آن $\hat\Lambda=(\hat\lambda_1,\hat\lambda_2,\hat\lambda_3)$ برآورد ماکسیمم درستنمایی $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ بوده و σ_{ij} ها مشابه زیربخش ۲.۱ تعریف می‌شوند. همچنین

$$\begin{aligned}A&=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}L_{ii1}+2(\sigma_{12}L_{121}+\sigma_{13}L_{131}+\sigma_{23}L_{231}),\\ B&=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}L_{ii2}+2(\sigma_{12}L_{122}+\sigma_{13}L_{132}+\sigma_{23}L_{232}),\\ C&=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}L_{ii3}+2(\sigma_{12}L_{123}+\sigma_{13}L_{133}+\sigma_{23}L_{233}).\end{aligned}$$

بنابراین برای $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\alpha,\beta,\lambda)$ و $u=u(\alpha,\beta,\lambda)=h_{ij}(\alpha,\beta)$ مقادیر $\rho_1=\frac{a_1-1}{\alpha}-b_1$، $\rho_2=\frac{a_2-1}{\beta}-b_2$، $\rho_3=\frac{a_3-1}{\lambda}-b_3$، $L_{11}=-\frac{n}{\alpha^2}$، $L_{22}=-\frac{m}{\beta^2}$ و $L_{12}=L_{21}=0$ به‌دست می‌آیند. علاوه بر آن

$$\begin{aligned}&L_{13}=L_{31}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2e^{-\lambda x_i^2}}{1-e^{-\lambda x_i^2}},\quad L_{23}=L_{32}=\sum_{j=1}^{m}\frac{y_i^2e^{-\lambda y_j^2}}{1-e^{-\lambda x_i^2}},\quad L_{111}=\frac{2n}{\alpha^3},\\ &L_{222}=\frac{2m}{\beta^3},\quad L_{221}=L_{122}=0,\quad L_{233}=L_{332}=-\sum_{i=j}^{m}\frac{y_j^4e^{-\lambda y_j^2}}{(1-e^{-\lambda y_j^2})^2},\\ &u_1=-\frac{(k-i+j)\beta}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^2},\quad u_2=\frac{(k-i+j)\alpha}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^2},\\ &u_{12}=u_{21}=\frac{(k-i+j)(\beta-(k-i+j)\alpha)}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^3},\quad u_{11}=\frac{\beta-(k-i+j)\alpha}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^3},\end{aligned}$$

$$u_{11} = \frac{2\beta(k-i+j)^2}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^3}, \quad u_{22} = -\frac{2\alpha(k-i+j)}{(\beta+(k-i+j)\alpha)^3},$$
$$u_{13} = u_{23} = u_{33} = 0.$$

همچنین

$$\begin{aligned} L_{33} &= -\frac{n+m}{\lambda^2} - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^4 e^{-\lambda x_i^2}}{(1-e^{-\lambda x_i^2})^2} - (\beta-1)\sum_{j=1}^{m}\frac{y_j^4 e^{-\lambda y_j^2}}{(1-e^{-\lambda y_j^2})^2}, \\ L_{333} &= \frac{2(n+m)}{\lambda^3} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^6 e^{-\lambda x_i^2}(1+e^{-\lambda x_i^2})}{(1-e^{-\lambda x_i^2})^3} \\ &+ (\beta-1)\sum_{j=1}^{m}\frac{y_j^6 e^{-\lambda y_j^2}(1+e^{-\lambda y_j^2})}{(1-e^{-\lambda y_j^2})^2}. \end{aligned}$$

از این‌رو می‌توان نوشت

$$A = \sigma_{11}L_{111} + \sigma_{33}L_{331}, B = \sigma_{22}L_{222} + \sigma_{33}L_{332},$$
$$C = 2\sigma_{13}L_{133} + 2\sigma_{23}L_{233} + \sigma_{33}L_{333},$$

در نتیجه به ازای $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و $\hat{\lambda}$، I_{ij} به روش تقریب لیندلی به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{I}_{ij} &= h_{ij}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) + [u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_1 2\sigma_{12} + \frac{u_{11}\sigma_{11} + u_{22}\sigma_{22}}{2}] \\ &+ \frac{1}{2}(\sigma_{11}L_{111} + \sigma_{33}L_{331})(u_1\sigma_{11} + u_2\sigma_{12}) \\ &+ \frac{1}{2}(\sigma_{22}L_{222} + \sigma_{33}L_{332})(u_1\sigma_{21} + u_2\sigma_{22}) \\ &+ \frac{1}{2}(2\sigma_{13}L_{133} + 2\sigma_{23}L_{233} + \sigma_{33}L_{333})(u_1\sigma_{31} + u_2\sigma_{32}) \end{aligned}$$

و از (۱۰)، برآورد بیزی $R_{s,k}$ به‌صورت $\hat{R}^B_{s,k} = \sum_{i=s}^{k}\sum_{j=0}^{i}\binom{k}{i}\binom{i}{j}(-1)^j\hat{I}_{ij}$ حاصل می‌شود.

۳.۲ برآوردگر بیز تجربی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$

فرض کنید ابرپارامترهای a_1، a_2 و a_3 معلوم و b_1، b_2 و b_3 نامعلوم باشند. با استفاده از تابع درستنمایی مشاهدات $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ تابع چگالی شرطی $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ به شرط b_1، b_2 و b_3 به‌صورت

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x},\mathbf{y}|b_1,b_2,b_3) &= (\prod_{i=1}^{n} x_i)(\prod_{j=1}^{m} y_j)\frac{2^{n+m} b_1^{a_1} b_2^{a_2} b_3^{a_3}\Gamma(n+a_1)\Gamma(m+a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\Gamma(a_3)} \\ &\times \int_0^\infty \frac{\lambda^{a_3-1}e^{-b_3\lambda}h(\lambda)}{(t(\lambda)+b_1)^{n+a_1}(u(\lambda)+b_2)^{m+a_2}}d\lambda, \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

حاصل می‌شود، که در آن $h(\lambda) = e^{-\lambda\{\sum_{i=1}^{n}[x_i^2+\ln(1-e^{-\lambda x_i^2})]+\sum_{j=1}^{m}[y_j^2+\ln(1-e^{-\lambda y_j^2})]\}}$. با استفاده از (۱۳)، می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی b_1، b_2 و b_3 را به‌دست آورد و با جایگذاری آن‌ها در (۱۲)، برآوردگر بیز تجربی $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ را به‌دست آورد.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

در این زیر بخش ابتدا از متغیرهای مقاومت و تنش که به‌ترتیب دارای توزیع‌های $GR(\alpha,\lambda)$ و $GR(\beta,\lambda)$ هستند، تعداد ۲۰۰۰ نمونه تصادفی به اندازه‌های ۱۵، ۲۰، ۳۰ و ۳۵ به ازای $\lambda = ۲$ و مقادیر (۳, ۱٫۵)، (۲٫۵, ۱٫۵)، (۲, ۱٫۵)، (۱٫۵, ۱٫۵)، (۱٫۵, ۲)، (۱٫۵, ۲٫۵) برای (α,β) تولید می‌شود. سپس، بر اساس تقریب لیندلی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ به ازای $a_1 = ۲$، $a_2 = ۳$، $b_1 = ۱٫۵$ و $b_2 = ۲٫۵$ و برآورد بیز تجربی تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ به ازای $a_1 = ۲$ و $a_2 = ۳$ در حالت‌های $(s,k) = (۱,۳),(۲,۴)$ و در دو حالت λ معلوم و نامعلوم به‌دست آورده می‌شود. میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای برآوردهای $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ در حالت λ معلوم در جداول ۱ و ۲ و در حالت λ نامعلوم در جداول ۳ و ۴ ارائه شده‌اند. همچنین، مقدار واقعی تابع قابلیت اعتماد در مدل تنش–مقاومت چندمولفه‌ای به ازای مقادیر متفاوت در نظر گرفته شده برای (α,β) و به ازای $(s,k) = (۱,۳)$، برابر با ۰٫۸۵۷۱، ۰٫۸۳۳۳، ۰٫۸۰، ۰٫۷۵، ۰٫۶۹۲۳، ۰٫۶۴۲۸، ۰٫۶۰ و به ازای $(s,k) = (۲,۴)$، برابر با ۰٫۷۶۱۹، ۰٫۷۲۴۶، ۰٫۶۷۳۶، ۰٫۶۰، ۰٫۵۱۹۲، ۰٫۴۵۳۷ و ۰٫۴ به‌دست آمده‌اند. با توجه به این مقادیر، واضح است که در هر دو حالت در نظر گرفته شده برای (s,k) و به ازای α ثابت، با افزایش β مقدار واقعی $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ کاهش یافته است. در مقابل به ازای مقادیر ثابت β، با افزایش α مقدار واقعی $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ افزایش

می‌یابد. از این‌رو، به‌طور کلی می‌توان چنین گفت که با افزایش $v = \frac{\beta}{\alpha}$، مقدار $R_{s,k}(\alpha, \beta)$ نیز افزایش می‌یابد.

همان‌طور که در جداول ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود با افزایش اندازه نمونه، برای هر ترکیبی از پارامترهای (α, β)، قدر مطلق میانگین اریبی و میانگین توان دوم خطای برآورد $R_{s,k}(\alpha, \beta)$ در هر دو حالت (s, k) در نظر گرفته شده، در هر سه روش برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآورد بیزی و برآورد بیز تجربی کاهش می‌یابد. همچنین در هر دو حالت (s, k)، برآورد ماکسیمم درستنمایی $R_{s,k}(\alpha, \beta)$ بهتر از برآوردهای بیزی و بیز تجربی بوده و به ازای $v < 1$، برآورد بیز تجربی از برآورد بیزی و به ازای $v \geq 1$ برآورد بیزی از برآورد بیز تجربی در هر دو حالت (s, k) بهتر است. علاوه بر آن، در هر دو حالت (s, k) با افزایش v، میانگین توان دوم خطای برآورد $R_{s,k}(\alpha, \beta)$ در هر سه روش برآورد، کاهش می‌یابد.

جدول ۱. میانگین اریبی (میانگین توان دوم خطا) برای $\hat{R}^{ML}$، $\hat{R}^{B}$ و $\hat{R}^{EB}$ در حالت λ معلوم

(s,k)	$n=m$	(α,β): (۱/۵, ۱/۵)	(۲, ۱/۵)	(۲/۵, ۱/۵)	(۳, ۱/۵)
(۱, ۳)	۱۵	−۰/۰۱۵۷(۰/۵۷۱۷)	۰/۰۱۰۴(۰/۶۴۹۱)	۰/۰۲۵۷(۰/۷۰۰۱)	۰/۰۳۳۷(۰/۷۳۸۳)
		−۰/۳۰۷۳(۰/۵۷۴۶)	−۰/۲۸۰۶(۰/۶۶۸۹)	−۰/۲۶۳۸(۰/۷۲۴۳)	−۰/۲۵۱۴(۰/۷۷۲۷)
		−۰/۳۲۶۰(۰/۵۸۱۹)	−۰/۲۶۵۰(۰/۶۵۰۶)	−۰/۲۲۳۰(۰/۷۰۴۴)	−۰/۱۸۲۳(۰/۷۴۵۵)
	۲۰	−۰/۰۱۳۲(۰/۵۷۱۱)	۰/۰۱۰۳(۰/۶۴۶۰)	۰/۰۲۱۲(۰/۶۹۸۳)	۰/۰۳۲۷(۰/۷۳۷۵)
		−۰/۳۱۱۵(۰/۵۷۱۴)	−۰/۲۷۶۶(۰/۶۶۲۵)	−۰/۲۴۵۳(۰/۷۲۳۱)	−۰/۲۳۳۹(۰/۷۷۱۲)
		−۰/۳۲۵۷(۰/۵۷۳۷۲)	−۰/۲۶۴۱(۰/۶۵۰۵)	−۰/۲۰۹۰(۰/۷۰۳۶)	−۰/۱۷۶۹(۰/۷۴۸۹)
	۳۰	−۰/۰۱۰۷(۰/۵۶۸۶)	۰/۰۱۰۲(۰/۶۴۳۸)	۰/۰۱۱۰(۰/۶۹۶۹)	۰/۰۳۰۲(۰/۷۳۶۳)
		−۰/۳۱۰۸(۰/۵۷۱۲)	−۰/۲۶۱۴(۰/۶۵۹۲)	−۰/۲۴۰۳(۰/۷۲۰۹)	−۰/۲۱۴۶(۰/۷۶۳۳)
		−۰/۳۲۴۰(۰/۵۷۲۹)	−۰/۲۵۳۳(۰/۶۴۹۰)	−۰/۱۹۸۷(۰/۷۰۰۷)	−۰/۱۷۱۵(۰/۷۵۵۶)
	۳۵	−۰/۰۰۴۶(۰/۵۶۷۳)	۰/۰۱۰۱(۰/۶۴۳۳)	۰/۰۱۰۱(۰/۶۹۶۷)	۰/۰۲۱۴(۰/۷۳۶۰)
		−۰/۳۱۰۷(۰/۵۷۰۶)	−۰/۲۵۱۱(۰/۶۵۹۱)	−۰/۲۳۳۳(۰/۷۲۰۱)	−۰/۲۰۶۴۲(۰/۷۵۹۵)
		−۰/۳۲۳۵(۰/۵۷۲۱)	−۰/۲۴۷۴(۰/۶۴۳۰)	−۰/۱۸۵۹(۰/۶۹۹۸)	−۰/۱۷۰۷(۰/۷۴۴۰)
(۲, ۴)	۱۵	−۰/۰۱۹۱۲(۰/۳۷۰۲۳)	۰/۰۱۶۶۸(۰/۴۶۵۲۱)	۰/۰۴۰۳۵(۰/۵۳۷۹۸)	۰/۰۵۴۶۹(۰/۵۹۰۹۵)
		−۰/۲۷۸۹(۰/۳۸۰۸)	−۰/۲۷۵۴(۰/۴۸۱۹)	−۰/۲۶۶۶(۰/۵۵۸۴)	−۰/۲۵۵۴(۰/۶۲۶۹)
		−۰/۲۹۴۶(۰/۳۸۱۸)	−۰/۲۶۲۸(۰/۴۷۱۷)	−۰/۲۱۹۴(۰/۵۳۶۴)	−۰/۱۷۳۹(۰/۵۹۳۲)
	۲۰	−۰/۰۱۱۶(۰/۳۷۰۱)	۰/۰۱۰۱(۰/۴۶۵۹)	۰/۰۴۰۲(۰/۵۳۴۶)	۰/۰۴۲۱(۰/۵۸۷۳)
		−۰/۲۷۵۳(۰/۳۷۶۹)	−۰/۲۶۰۳(۰/۴۷۸۹)	−۰/۲۵۰۲(۰/۵۵۷۴)	−۰/۲۳۴۲(۰/۶۲۵۶)
		−۰/۳۰۱۳(۰/۳۷۷۲)	−۰/۲۵۹۸(۰/۴۶۷۰)	−۰/۲۰۷۷(۰/۵۳۵۲)	−۰/۱۶۹۶(۰/۵۹۲۶)
	۳۰	−۰/۰۰۸۵(۰/۳۶۹۱)	۰/۰۱۰۱(۰/۴۶۲۸)	۰/۰۳۲۹(۰/۵۳۰۸)	۰/۰۳۴۹(۰/۵۸۴۷)
		−۰/۲۷۴۰(۰/۳۷۲۰)	−۰/۲۵۵۶(۰/۴۷۴۹)	−۰/۲۳۵۴(۰/۵۵۳۵)	−۰/۲۱۱۹(۰/۶۲۳۰)
		−۰/۳۰۰۶(۰/۳۷۲۷)	−۰/۲۵۱۱(۰/۴۶۶۹)	−۰/۲۰۷۰(۰/۵۳۰۹)	−۰/۱۶۱۰(۰/۵۸۱۶)
	۳۵	−۰/۰۰۷۶(۰/۳۶۸۱)	۰/۰۱۰۰(۰/۴۶۲۱)	۰/۰۲۱۶(۰/۵۳۰۳)	۰/۰۲۵۴(۰/۵۸۴۱)
		−۰/۲۶۹۰(۰/۳۶۹۹)	−۰/۲۵۰۱(۰/۴۷۴۸)	−۰/۲۲۰۶(۰/۵۵۲۸)	−۰/۲۱۱۰(۰/۶۲۱۵)
		−۰/۲۹۲۲(۰/۳۷۰۸)	−۰/۲۵۰۱(۰/۴۶۵۵)	−۰/۲۰۶۸(۰/۵۲۲۴)	−۰/۱۶۰۱(۰/۵۰۳۸)

جدول ۲. ادامه جدول ۱

(α,β)				
(۱/۵, ۲)	(۱/۵, ۲/۵)	(۱/۵, ۳)	$n=m$	(s,k)
−۰/۰۴۶۸(۰/۴۸۷۹)	−۰/۰۸۳۹(۰/۴۲۰۱)	−۰/۱۱۱۵(۰/۳۶۶۲)	۱۵	(۱, ۳)
−۰/۳۲۳۰(۰/۴۹۷۱)	−۰/۲۹۳۸(۰/۴۲۶۶)	−۰/۲۷۷۳(۰/۳۷۰۷)		
−۰/۳۵۷۸(۰/۴۹۷۳)	−۰/۳۸۲۱(۰/۴۳۳۸)	−۰/۳۸۶۶(۰/۳۸۱۵)		
−۰/۰۴۳۷(۰/۴۸۶۹)	−۰/۰۸۳۳(۰/۴۱۹۴)	−۰/۱۰۴۵(۰/۳۶۵۲)	۲۰	
−۰/۳۱۶۵(۰/۴۹۲۰)	−۰/۲۱۲۸(۰/۳۶۷۶)	−۰/۲۰۰۳(۰/۳۶۷۶)		
−۰/۳۵۴۰(۰/۴۹۲۶)	−۰/۳۷۶۳(۰/۴۲۸۸)	−۰/۳۷۳۸(۰/۳۷۵۷)		
−۰/۰۴۰۳(۰/۴۸۶۵)	−۰/۰۷۶۴(۰/۴۱۹۱)	−۰/۱۰۲۰(۰/۳۶۴۶)	۳۰	
−۰/۳۰۹۰(۰/۴۸۸۹)	−۰/۲۱۲۳(۰/۳۲۱۱)	−۰/۱۹۴۱(۰/۳۶۶۴)		
−۰/۳۴۴۶(۰/۴۸۹۹)	−۰/۳۶۸۷(۰/۴۲۳۷)	−۰/۳۶۵۷(۰/۳۷۱۳)		
−۰/۰۴۰۲(۰/۴۸۶۰)	−۰/۰۷۵۷(۰/۴۱۸۷)	−۰/۱۰۱۲(۰/۳۶۴۴)	۳۵	
−۰/۳۰۷۹(۰/۴۸۷۰)	−۰/۲۰۹۴(۰/۳۲۰۶)	−۰/۱۳۱۶(۰/۳۶۵۳)		
−۰/۳۳۹۸(۰/۴۸۸۸)	−۰/۳۵۸۵(۰/۴۲۲۴)	−۰/۳۵۳۱(۰/۳۶۹۴)		
−۰/۰۵۱۷۴(۰/۲۷۷۶۲)	−۰/۰۸۱۲۲(۰/۲۱۲۷۲)	−۰/۱۰۵۲۲(۰/۱۶۵۷۳)	۱۵	(۲, ۴)
−۰/۲۶۱۴(۰/۲۸۴۳)	−۰/۲۳۲۸(۰/۲۱۷۱)	−۰/۲۰۳۹(۰/۱۶۷۶)		
−۰/۳۱۲۶(۰/۲۹۵۴)	−۰/۳۰۸۳(۰/۲۳۲۱)	−۰/۲۹۵۱(۰/۱۸۳۵)		
−۰/۰۴۸۰۸(۰/۲۷۷۱۸)	−۰/۰۸۰۰(۰/۲۱۱۷)	−۰/۱۰۴۲(۰/۱۶۴۳)	۲۰	
−۰/۲۵۱۵(۰/۲۸۱۷)	−۰/۲۲۳۹(۰/۲۱۴۰)	−۰/۲۰۳۴(۰/۱۶۴۹)		
−۰/۳۰۷۲۸(۰/۲۲۶۳۳)	−۰/۲۸۴۲(۰/۱۷۷۳)	−۰/۳۱۱۰(۰/۲۸۹۸)		
−۰/۰۴۴۶(۰/۲۷۶۳)	−۰/۰۷۵۳(۰/۲۱۰۷)	−۰/۱۰۲۴(۰/۱۶۳۲)	۳۰	
−۰/۲۴۷۹۲(۰/۲۷۸۲۵)	−۰/۲۱۴۴۲(۰/۲۱۱۱۲)	−۰/۲۰۲۶(۰/۱۶۳۴)		
−۰/۳۰۹۲(۰/۲۸۳۵)	−۰/۳۰۳۳(۰/۲۲۰۶)	−۰/۲۷۹۶(۰/۱۷۲۲)		
−۰/۰۳۷۷(۰/۲۷۵۴)	−۰/۰۶۶۷(۰/۲۰۹۹)	−۰/۱۰۱۱(−۰/۱۶۱۳)	۳۵	
−۰/۲۳۶۶(۰/۲۷۵۴)	−۰/۲۱۲۹(۰/۲۱۰۲)	−۰/۲۰۱۳(۰/۱۶۲۷)		
−۰/۳۰۷۰(۰/۲۸۱۴)	−۰/۲۹۶۷(۰/۲۱۷۶)	−۰/۲۱۱۹(۰/۱۷۰۴)		

۵ تحلیل مجموعه داده‌های الیاف کربن

در این بخش از دو مجموعه داده واقعی برای تحلیل و مقایسه روش‌های برآورد تابع $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ استفاده می‌شود. این دو مجموعه داده که در جدول ۵ آورده شده‌اند، مربوط به مقاومت اندازه‌گیری شده الیاف کربن در طول‌های ۱۰ و ۲۰ میلی‌متری بر اثر فشار وارد بر آن‌ها است (بدار و پریست ، ۱۹۸۲). در اولین گام، با استفاده از آزمون نیکویی برازش کولموگوروف–اسمیرنوف نشان داده می‌شود توزیع رایلی تعمیم‌یافته به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. همان‌طور که در جدول ۶ ملاحظه می‌شود توزیع رایلی تعمیم‌یافته به‌خوبی به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. همچنین برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای شکل و مقیاس توزیع نیز در این حالت گزارش شده است. با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی تعمیم‌یافته فرضیه برابری پارامترهای مقیاس بررسی می‌شود. مقدار آماره آزمون برابر $\Lambda = ۰/۳۸۷۶$ حاصل شده است که $p-$مقدار متناظر با آن ۰/۵۳۳۵ است. بنابراین فرضیه برابری پارامترهای مقیاس قویا تایید می‌شود. علاوه بر آن، جدول ۶ نشان می‌دهد که در این حالت نیز توزیع رایلی تعمیم‌یافته به‌درستی به مجموعه داده‌ها برازش

جدول ۳. میانگین اریبی (میانگین توان دوم خطا) برای $\hat{R}^{ML}$، $\hat{R}^{B}$ و $\hat{R}^{EB}$ در حالت λ نامعلوم

(s,k)	$n=m$	(α,β) (۱/۵, ۱/۵)	(۲, ۱/۵)	(۲/۵, ۱/۵)	(۳, ۱/۵)
(۱, ۳)	۱۵	−۰/۲۱۳۶(۰/۵۶۴۱)	۰/۲۰۶۸(۰/۶۲۸۲)	۰/۲۶۲۶(۰/۶۰۲۳)	۰/۲۴۶۱(۰/۰/۶۳۸۷)
		−۰/۱۸۳۰(۰/۵۴۳۴)	−۰/۱۴۸۷(۰/۶۱۲۲)	−۰/۲۲۲۵(۰/۶۰۱۴)	−۰/۲۰۳۵(۰/۶۴۷۹)
		−۰/۱۱۳۷(۰/۴۸۴۴)	−۰/۱۲۳۶(۰/۵۷۱۴)	−۰/۱۲۳۵(۰/۵۳۳۲)	−۰/۱۲۲۹(۰/۵۸۲۸)
	۲۰	−۰/۲۰۹۳(۰/۵۵۱۵)	۰/۱۹۳۱(۰/۶۰۶۰)	۰/۲۵۷۸(۰/۵۹۸۵)	۰/۲۳۷۲(۰/۶۳۷۲)
		−۰/۱۷۴۹(۰/۵۲۳۶)	−۰/۱۴۳۲(۰/۵۴۶۰)	−۰/۲۱۰۶(۰/۵۷۸۸)	−۰/۱۸۳۲(۰/۶۲۹۷)
		−۰/۱۰۴۵(۰/۴۶۰۸۸)	−۰/۱۱۷۳(۰/۵۲۵۹)	−۰/۱۱۳۴(۰/۵۲۹۱)	−۰/۱۲۶۲(۰/۵۷۷۸)
	۳۰	−۰/۱۹۴۰(۰/۵۴۸۰)	۰/۱۸۲۳(۰/۵۸۴۱)	۰/۲۳۱۴(۰/۵۸۷۰)	۰/۲۱۴۳(۰/۶۰۶۷)
		−۰/۱۶۱۴(۰/۵۱۱۸)	−۰/۱۳۸۰(۰/۵۲۴۲)	−۰/۱۹۶۱(۰/۵۱۲۵)	−۰/۱۹۳۹(۰/۵۹۳۶)
		−۰/۱۰۱۵(۰/۴۴۵۶)	−۰/۱۰۱۷(۰/۵۰۳۳)	−۰/۱۰۷۳(۰/۴۹۲۴)	−۰/۱۱۱۷(۰/۵۵۸۱)
	۳۵	−۰/۱۷۶۷(۰/۵۱۷۴)	۰/۱۷۷۱(۰/۵۴۳۳۱)	۰/۲۲۳۹(۰/۵۶۶۵)	۰/۲۰۴۳(۰/۵۹۶۱)
		−۰/۱۴۸۶(۰/۵۰۱۹)	−۰/۱۳۴۴(۰/۵۰۱۸)	−۰/۱۷۰۵(۰/۵۰۴۸)	−۰/۱۵۷۸(۰/۵۶۰۳)
		−۰/۰۰۹۱(۰/۴۲۴۹)	−۰/۰۹۸۴(۰/۴۹۴۶)	−۰/۱۰۲۹(۰/۴۲۶۰)	−۰/۱۱۱۵(۰/۵۲۶۰)
(۲, ۴)	۱۵	−۰/۱۵۸۷(۰/۴۸۲۳)	۰/۱۲۳۹۱(۰/۵۲۱۴)	۰/۱۴۴۴(۰/۵۳۸۴)	۰/۱۵۶۱(۰/۵۹۰۲)
		−۰/۱۲۸۶(۰/۴۷۰۴)	−۰/۱۱۱۶(۰/۵۰۲۰)	−۰/۱۳۱۷(۰/۵۳۷۲)	−۰/۱۵۵۶(۰/۵۷۳۰)
		−۰/۱۱۵۰(۰/۴۰۱۶)	−۰/۱۰۶۴(۰/۴۹۱۷)	−۰/۱۱۱۲(۰/۵۲۳۰)	−۰/۱۴۱۲(۰/۵۱۴۶)
	۲۰	−۰/۱۴۱۱(۰/۴۷۶۶)	۰/۱۱۴۲(۰/۴۶۷۰)	۰/۱۴۲۹(۰/۵۳۵۴)	۰/۱۴۷۴(۰/۵۸۷۲)
		−۰/۱۲۴۹(۰/۴۵۰۹)	−۰/۱۰۶۵(۰/۴۴۵۸)	−۰/۱۲۱۵(۰/۵۲۹۳)	−۰/۱۲۲۹(۰/۵۵۵۲)
		−۰/۱۰۱۹(۰/۳۹۷۲)	−۰/۱۰۲۱(۰/۴۲۷۳)	−۰/۱۰۸۲(۰/۵۱۵۲)	−۰/۱۱۰۴(۰/۵۰۱۸)
	۳۰	−۰/۱۳۲۱(۰/۴۷۶۶)	۰/۱۰۵۸(۰/۴۶۳۲)	۰/۱۳۲۱(۰/۵۳۰۸)	۰/۱۳۴۸(۰/۵۸۴۸)
		−۰/۱۲۴۳(۰/۳۹۹۰)	−۰/۱۰۴۸(۰/۴۳۷۶)	−۰/۱۲۰۵(۰/۵۰۸۶)	−۰/۱۲۲۰(۰/۵۰۰۷)
		−۰/۱۰۰۹(۰/۳۷۲۷)	−۰/۱۰۱۲(۰/۴۲۴۴)	−۰/۱۰۷۲(۰/۴۹۵۸۵)	−۰/۱۰۳۱(۰/۴۹۱۱)
	۳۵	−۰/۱۲۹۷(۰/۳۶۹۸)	۰/۱۰۲۷(۰/۴۶۱۱)	۰/۱۲۶۹(۰/۵۳۰۲)	۰/۱۲۶۴(۰/۵۷۲۳)
		−۰/۱۱۷۴(۰/۳۶۸۲)	−۰/۱۰۳۴(۰/۴۲۶۶)	−۰/۱۱۳۸(۰/۴۸۳۲)	−۰/۱۲۰۷(۰/۴۹۶۹)
		−۰/۰۹۰۴(۰/۳۵۰۶)	−۰/۱۰۰۱(۰/۴۱۲۹)	−۰/۱۰۶۱(۰/۴۵۶۰)	−۰/۱۰۱۳(۰/۴۸۱۹)

می‌شود. بر اساس مجموعه داده‌ها و به‌ازای $(\alpha,\beta) = (۲, ۱/۵)$، مقادیر اریبی برآورد تابع قابلیت اعتماد سیستم چندمولفه‌ای به روش‌های ماکسیمم درستنمایی، بیزی (به ازای $a_1 = ۲$، $a_2 = ۳$، $b_1 = ۱/۵$ و $b_2 = ۲/۵$) و بیز تجربی (به ازای $a_1 = ۲$ و $a_2 = ۳$) که به ترتیب با نمادهای $\hat{R}^{ML}_{s,k}$،$\hat{R}^{B}_{s,k}$ و $\hat{R}^{EB}_{s,k}$ نشان داده می‌شوند، در دو حالت λ معلوم و نامعلوم، محاسبه و در جدول ۷ گزارش شده‌اند. در هر دو حالت (s,k)، نتایج نشان دهنده بهتر بودن برآورد ماکسیمم درستنمایی نسبت به برآوردهای بیزی و بیز تجربی در حالت معلوم بودن پارامتر λ و بهتر بودن برآورد بیز تجربی نسبت به برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی در حالت نامعلوم بودن پارامتر λ است.

بحث و نتیجه‌گیری

برآورد تابع قابلیت اعتماد در یک مدل تنش–مقاومت چندمولفه‌ای دارای توزیع رایلی تعمیم‌یافته با پارامترهای شکل متفاوت و پارامتر مقیاس یکسان با رویکرد بیزی تحت تابع زیان توان دوم خطا و

جدول ۴. ادامه جدول ۳

(s,k)	$n=m$	(α,β)		
		(۱٫۵, ۲)	(۱٫۵, ۲٫۵)	(۱٫۵, ۳)
(۱, ۳)	۱۵	−۰٫۱۰۷۷(۰٫۳۵۹۸)	−۰٫۰۷۳۳(۰٫۳۳۵۱)	−۰٫۱۱۰۷(۰٫۳۸۱۷)
		−۰٫۱۰۶۹(۰٫۳۵۶۲)	−۰٫۰۷۰۵(۰٫۳۲۱۸)	−۰٫۱۱۰۲(۰٫۳۶۷۰)
		−۰٫۱۰۴۷(۰٫۳۴۹۲)	−۰٫۰۶۹۵(۰٫۳۱۷۹)	−۰٫۱۰۴۳(۰٫۳۵۹۶)
	۲۰	−۰٫۱۰۶۴(۰٫۳۵۷۸)	−۰٫۰۷۳۲(۰٫۳۲۸۳)	−۰٫۱۱۰۱(۰٫۳۷۶۰)
		−۰٫۱۰۳۴(۰٫۳۴۸۲)	−۰٫۰۶۱۹(۰٫۳۰۰۲)	−۰٫۱۰۲۲(۰٫۳۶۵۶)
		−۰٫۱۰۲۸(۰٫۳۳۳۵)	−۰٫۰۶۰۴(۰٫۲۹۳۰)	−۰٫۱۰۱۸(۰٫۳۵۶۷)
	۳۰	−۰٫۱۰۵۸(۰٫۳۵۱۳)	−۰٫۰۷۱۱(۰٫۳۲۳۷)	−۰٫۱۰۴۳(۰٫۳۶۷۷)
		−۰٫۱۰۲۷(۰٫۳۴۴۵)	−۰٫۰۶۱۲(۰٫۲۹۵۰)	−۰٫۱۰۲۰(۰٫۲۸۷۰)
		−۰٫۱۰۲۱(۰٫۳۲۴۸)	−۰٫۰۵۲۳۱(۰٫۲۷۰۸)	−۰٫۰۹۹۹(۰٫۲۵۰۱)
	۳۵	−۰٫۱۰۱۲(۰٫۳۴۴۴)	−۰٫۰۶۸۷(۰٫۳۱۴۲)	−۰٫۱۰۳۹(۰٫۳۶۴۷)
		−۰٫۱۰۱۱(۰٫۳۳۶۳)	−۰٫۰۶۰۸(۰٫۲۸۴۲)	−۰٫۱۰۲۰(۰٫۲۸۴۲)
		−۰٫۱۰۰۳(۰٫۳۱۶۴)	−۰٫۰۴۸۵(۰٫۲۶۲۴)	−۰٫۰۹۹۸(۰٫۲۴۴۳)
(۲, ۴)	۱۵	−۰٫۱۰۴۲(۰٫۱۶۴۳)	−۰٫۰۵۶۴(۰٫۲۳۱۱)	−۰٫۰۴۳۴(۰٫۲۹۷۲)
		−۰٫۱۰۳۵(۰٫۱۶۲۵)	−۰٫۰۵۵۸(۰٫۲۲۲۴)	−۰٫۰۳۵۸(۰٫۲۷۸۶)
		−۰٫۲۹۵۱(۰٫۱۸۳۵)	−۰٫۰۵۱۱(۰٫۲۱۶۱)	−۰٫۳۴۴۶(۰٫۲۷۶۶)
	۲۰	−۰٫۱۰۴۲(۰٫۱۶۴۳)	−۰٫۰۵۲۴(۰٫۲۲۵۸)	−۰٫۰۴۱۲(۰٫۲۸۹۸)
		−۰٫۱۰۳۵(۰٫۱۶۲۵)	−۰٫۰۵۱۰(۰٫۲۱۱۷)	−۰٫۰۳۱۳(۰٫۲۷۷۳)
		−۰٫۰۹۵۷(۰٫۱۶۰۴)	−۰٫۰۵۰۹(۰٫۲۰۳۶)	−۰٫۳۰۶۴(۰٫۲۷۱۸)
	۳۰	−۰٫۱۰۳۰(۰٫۱۶۲۷)	−۰٫۰۴۹۸(۰٫۲۱۹۳)	−۰٫۰۴۰۵(۰٫۲۸۳۱)
		−۰٫۱۰۲۷(۰٫۱۶۱۲)	−۰٫۰۴۶۷(۰٫۲۱۷۲)	−۰٫۰۴۰۳(۰٫۲۷۵۹)
		−۰٫۰۹۲۳(۰٫۱۶۰۳)	−۰٫۰۳۶۰(۰٫۲۱۵۸)	−۰٫۰۳۴۴(۰٫۲۷۴۹)
	۳۵	−۰٫۱۰۲۹(۰٫۱۶۰۸)	−۰٫۰۴۷۴(۰٫۲۱۷۹)	−۰٫۰۴۰۵(۰٫۲۸۱۷)
		−۰٫۱۰۲۱(۰٫۱۶۱۱)	−۰٫۰۴۳۲(۰٫۲۰۹۷)	−۰٫۰۴۰۳(۰٫۲۷۵۶)
		−۰٫۰۹۱۴(۰٫۱۶۰۸)	−۰٫۰۳۲۳(۰٫۲۰۰۵)	−۰٫۰۳۴۳(۰٫۲۷۴۳)

جدول ۵. مجموعه داده‌های مقاومت الیاف کربن

طول ۲۰ میلی‌متر									
۱٫۳۱۲	۱٫۳۱۴	۱٫۴۷۹	۱٫۵۵۲	۱٫۷۰۰	۱٫۸۰۳	۱٫۸۶۱	۱٫۸۵۶	۱٫۹۴۴	۱٫۹۵۸
۱٫۹۶۶	۱٫۹۹۷	۲٫۰۰۶	۲٫۰۲۱	۲٫۰۲۷	۲٫۰۵۵	۲٫۰۶۳	۲٫۰۹۸	۲٫۱۴۰	۲٫۱۷۹
۲٫۲۲۴	۲٫۲۴۰	۲٫۲۵۳	۲٫۲۷۰	۲٫۲۷۲	۲٫۲۷۴	۲٫۳۰۱	۲٫۳۰۱	۲٫۳۵۹	۲٫۳۸۲
۲٫۳۸۲	۲٫۴۲۶	۲٫۴۳۴	۲٫۴۳۵	۲٫۴۷۸	۲٫۴۹۰	۲٫۵۱۱	۲٫۵۱۴	۲٫۵۳۵	۲٫۵۵۴
۲٫۵۶۶	۲٫۵۷۰	۲٫۵۸۶	۲٫۶۲۹	۲٫۶۳۳	۲٫۶۴۲	۲٫۶۴۸	۲٫۶۸۴	۲٫۶۹۷	۲٫۷۲۶
۲٫۷۷۰	۲٫۷۷۳	۲٫۸۰۰	۲٫۸۰۹	۲٫۸۱۸	۲٫۸۲۱	۲٫۸۴۸	۲٫۸۸۰	۲٫۹۵۴	۳٫۰۱۲
۳٫۰۶۷	۳٫۰۸۴	۳٫۰۹۰	۳٫۰۹۶	۳٫۱۲۸	۳٫۲۳۳	۳٫۴۳۳	۳٫۵۸۵	۳٫۵۸۵	
طول ۱۰ میلی‌متر									
۱٫۹۰۱	۲٫۱۳۲	۲٫۲۰۳	۲٫۲۲۸	۲٫۲۵۷	۲٫۳۵۰	۲٫۳۶۱	۲٫۳۹۶	۲٫۳۹۷	۲٫۴۴۵
۲٫۴۵۴	۲٫۴۷۴	۲٫۵۱۸	۲٫۵۲۲	۲٫۵۲۵	۲٫۵۳۲	۲٫۵۷۵	۲٫۶۱۴	۲٫۶۱۶	۲٫۶۱۸
۲٫۶۲۴	۲٫۶۵۹	۲٫۶۷۵	۲٫۷۳۸	۲٫۷۴۰	۲٫۸۵۶	۲٫۹۱۷	۲٫۹۲۸	۲٫۹۳۷	۲٫۹۳۷
۲٫۹۷۷	۲٫۹۹۶	۳٫۰۳۰	۳٫۱۲۵	۳٫۱۳۹	۳٫۱۴۵	۳٫۲۲۰	۳٫۲۲۳	۳٫۲۳۵	۳٫۲۴۳
۳٫۲۶۴	۳٫۲۷۲	۳٫۲۹۴	۳٫۳۳۲	۳٫۳۴۶	۳٫۳۷۷	۳٫۴۰۸	۳٫۴۳۵	۳٫۴۹۳	۳٫۵۰۱
۳٫۵۳۷	۳٫۵۵۴	۳٫۵۶۲	۳٫۶۲۸	۳٫۸۵۲	۳٫۸۷۱	۳٫۸۸۶	۳٫۹۷۱	۴٫۰۲۴	۴٫۰۲۷
۴٫۲۲۵	۴٫۳۹۵	۵٫۰۲۰							

رویکرد بیز تجربی در دو حالت معلوم و نامعلوم پارامتر مقیاس مورد بررسی قرار گرفت و برآوردهایی برای آن به‌دست آورده شد. با روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بر اساس معیارهای میانگین اریبی و میانگین توان

جدول ۶. نتایج آزمون نیکویی برازش و برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع

پارامترهای مقیاس	مقاومت الیاف	برآورد پارامتر (مقیاس، شکل)	آماره آزمون	p-مقدار
نابرابر	۲۰ میلی‌متر	(۸٫۷۸۹۸, ۰٫۶۶۶۷)	۰٫۱۱۰۲	۰٫۳۷۱۳
	۱۰ میلی‌متر	(۱۱٫۸۶۵۷, ۰٫۵۶۴۴)	۰٫۰۹۴۴	۰٫۶۲۸۴
برابر	۲۰ میلی‌متر	(۶٫۲۴۴۴, ۰٫۶۰۹۶)	۰٫۱۱۳۱	۰٫۳۳۹۷
	۱۰ میلی‌متر	(۱۷٫۲۱۹۱, ۰٫۶۰۹۶)	۰٫۱۳۴۹	۰٫۲۰۱۶

جدول ۷. میزان اریبی برآوردگرهای تابع قابلیت اعتماد چندمولفه‌ای

	λ معلوم			λ نامعلوم		
(s,k)	$\hat{R}_{s,k}^{ML}$	$\hat{R}_{s,k}^{B}$	$\hat{R}_{s,k}^{EB}$	$\hat{R}_{s,k}^{ML}$	$\hat{R}_{s,k}^{B}$	$\hat{R}_{s,k}^{EB}$
$(۱,۳)$	$-$۰٫۰۷۸۱	۰٫۱۲۳۴	۰٫۱۰۱۲	$-$۰٫۰۵۴۳	۰٫۱۰۷۸	۰٫۰۰۹۸
$(۲,۴)$	$-$۰٫۰۱۳۷	۰٫۱۱۳۶	۰٫۰۹۸۷	۰٫۰۱۱۲	۰٫۱۰۲۹	۰٫۰۰۶۵

دوم خطا، برآوردهای $R_{s,k}(\alpha,\beta)$ در دو حالت $(s,k)=(۱,۳),(۲,۴)$ مورد مقایسه قرار گرفت. در حالت معلوم بودن λ، برآورد ماکسیمم درستنمایی از برآوردهای بیزی و بیز تجربی بهتر است و در حالت λ نامعلوم برآورد بیز تجربی نسبت به برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی عملکرد بهتری را داراست. بر اساس برآوردهای تابع قابلیت اعتماد سیستم تنش-مقاومت چندمولفه‌ای، نتایج به‌دست آمده با نتایج نمونه شبیه‌سازی شده مطابقت داشتند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از سردبیر محترم، داوران گرامی و ویراستار ارجمند مجله که با ارائه پیشنهادها و نظرات بسیار مفید و ارزشمندشان سبب ارتقاء سطح مقاله شدند نهایت تشکر و قدردانی را دارا هستند.

مراجع

Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011), Stress-Strength Reliability of Weibull Distribution Based on Progressively Censord Samples, *SORT*, **35**, 103-124.

Al-Mutairi, D. K., Gitany, M. E. and Kundu, D. (2013), Inferences on Stress-Strength Reliability from Lindley Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 1443-1463.

Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of Mann-Whitney Statistics. *Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 13–17.

Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model, *JASA*, **69**, 966-970.

Badar, M. G. and Priest, A. M. (1982), Statistical Aspects of Fiber and Bundle Strength in Hybrid Composites. In: Hayashi, T., Kawata, K., Umekawa, S. (Eds.), Progress in Science and Engineering Composites, ICCM-IV, Tokyo, 1129-1136.

Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Aboukhamseen, S. M. (2015), Estimation of the Reliability of a Stress-Strength System from Power Lindley Distributions, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.

Kantam, R. R. L. and Rao G. S. (2002), Log-Logistic Distribution: Modified Maximum Likelihood Estimation, *Gujarat Statistical Review*, **29**, 25-36.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2006), Estimation of $P(Y < X)$ for Weibull Distribution, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 270-280.

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, **31**, 223-245.

Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012), Estimation of for Burr XII Distribution based on The Progressivey First Failure-Censord Samples, *Journal of Applied Statistics*, **39**, 465-483.

Raqab, M. Z., Madi, M. T. and Kundu, D. (2008), Estimation of $P(Y < X)$ for the 3-Parameter Generalized Exponential Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **37**, 2854-2864.

Rao, G. S. and Kantam, R. R. L. (2010), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model: Log-Logistic Distribution, *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **3**, 75-84.

Rao, G. S. (2014), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength based on Generalized Rayleigh Distribution, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **13**, 367-379.

Rao, G. S., Aslam, M. and Aril, O. H. (2017), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Model based on Exponentiated Weibull Distribution, *Communications Statistics Simulation and Computation*, **46**, 7495-7502.

Surles, J. G. and Padgett, W. J. (2001), Inference for Reliability and Stress-Strength for a Scaled Burr Type X Distribution, *Lifetime Data Analysis*, **7**, 187-200.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2020
Vol. 14, No. 2, pp 429-448
DOI: 10.29252/jss.14.2.429

Bayes and Empirical Bayes Estimator of Reliability Function in Multicomponent Stress–Strength System based on Generalized Rayleigh Distribution

Zarei[1], R. and Yaghoobzadeh Shahrestani[2], S.
[1]Department of Statistics, University of Guilan, Rasht, Iran.
[2]Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, the Bayesian and empirical Bayesian approaches studied in estimate the multicomponent stress–strength reliability model when the strength and stress variables have a generalized Rayleigh distribution with different shape parameters and identical scale parameter. The Bayesian, empirical Bayesian and maximum likelihood estimation of reliability function is obtained in the two cases known and unknown of scale parameter under the mean squared error loss function. Then, these estimators are compared empirically using Monte Carlo simulation and two real data sets.

Keywords: Multicomponent stress–strength Model, Reliability function, Empirical Bayesian estimation, Generalized Rayleigh distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N02, 62N05.