

## کاربردهایی از تبدیل زمان کل آزمون در قابلیت اعتماد

مجتبی اصفهانی، محمد امینی، غلامرضا محتشمی برزادران

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۱۲/۱۴

**چکیده:** در این مقاله تبدیل زمان کل آزمون معرفی و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس ارتباط این تبدیل با برخی مفاهیم قابلیت اعتماد بیان می‌شود. نمودار زمان کل آزمون برای برخی توزیع‌های طول عمر رسم شده و تحلیل داده واقعی بر اساس این نمودار انجام می‌شود. علاوه بر این با استفاده از روش تابع تغییر شکل یک خانواده از توزیع‌های تغییر شکل یافته جدید معرفی شده؛ تفسیر آماری از دیدگاه قابلیت اعتماد برای توزیع جدید و تابع بقا متناظر آن ارائه می‌شود و در ادامه با در نظر گرفتن توزیع پایه وایبول یک تعمیم از توزیع وایبول به دست آورده و با تحلیل یک داده واقعی نشان داده می‌شود که توزیع جدید برازش بهتری نسبت به توزیع پایه به داده‌های طول عمر دارد. **واژه‌های کلیدی:** تابع نرخ خطر، تبدیل زمان کل آزمون، نمودار زمان کل آزمون.

## ۱ مقدمه

مفهوم زمان کل آزمون<sup>۱</sup> (TTT) برای اولین بار توسط **اپستاین و سوبل (۱۹۵۳)** در معرفی برخی آزمون‌ها مورد بررسی قرار گرفت. هنگامی که چند واحد به طور همزمان تحت آزمون طول عمر قرار می‌گیرند، شکست واحدهای مختلف در زمان‌های مختلف رخ می‌دهد. بنابراین، در هر لحظه از زمان در طی آزمایش، تعدادی از واحدها هنوز در حال کار کردن هستند و تعدادی از واحدها شکست خورده‌اند. آماره زمان کل آزمون نشانگر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمد امینی، m-amini@um.ac.ir  
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05, 62E15.

<sup>1</sup>Total Time on Test

مجموع طول عمر واحدها یعنی واحدهایی که تکمیل شده (شکست خورده) یا واحدهای ناقص (فعال) است. تبدیل زمان کل آزمون میانگین زمان از کار افتادن یک مولفه در یک آزمایش است، تا هنگامی که  $p$  درصد از کل مولفه‌ها مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. مفهوم زمان کل آزمون به طور جدی اولین بار توسط **بارلو و داکسوم (۱۹۷۲)** و **بارلو و همکاران (۱۹۷۲)** معرفی شد و در ادامه **بارلو و کامپو (۱۹۷۵)** برای تحلیل داده‌های با نرخ شکست صعودی و نزولی و همچنین انتخاب مدل مناسب برای داده‌ها از نمودار TTT استفاده کردند. **فام و تارکان (۱۹۹۴)**، **پرز و همکاران (۱۹۹۷)** و **کاوازاکی و همکاران (۲۰۰۹)** ارتباط تبدیل TTT با مفاهیم اقتصادی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. سپس **کوچار و همکاران (۲۰۰۲)** با معرفی ترتیب تصادفی TTT و همچنین **لی و شیکد (۲۰۰۷)** با معرفی تعمیم آن به بیان ویژگی‌ها و کاربردهای این ترتیب‌های تصادفی پرداختند. **بینیک (۲۰۱۶)** و **اسپیروی (۲۰۱۷)** نیز تبدیل TTT را از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار داده و نکاتی را در مورد آن به دست آورده‌اند.

در بخش ۲ تبدیل زمان کل آزمون معرفی و ویژگی‌های آن بیان می‌شود. سپس ارتباط تبدیل TTT با برخی مفاهیم قابلیت اعتماد بیان و برخی از مفاهیم سالخوردگی تجدید و محدب بودن نیز بر اساس این تبدیل مشخص‌سازی می‌شود. همچنین نمودار TTT و ویژگی‌ها و کاربردی از آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه با استفاده از توابع تغییر شکل یک توزیع جدید معرفی و با ارائه یک تفسیر آماری از دیدگاه قابلیت اعتماد نحوه به دست آوردن این توزیع ارائه می‌شود. سپس با در نظر گرفتن توزیع وایبول به عنوان یک توزیع پایه و به دست آوردن معیارهای برازندگی مدل نشان داده می‌شود که توزیع جدید در برازش به داده‌های طول عمر نسبت به توزیع وایبول و توزیع اصلاح شده جدید برتری دارد. همچنین نحوه رفتار تابع نرخ خطر توزیع معرفی شده بر اساس نمودار زمان کل آزمون مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش پایانی نیز با ارائه مثال‌هایی از داده‌های واقعی کاربرد ذکر شده در بخش ۲ تفسیر و تعبیر می‌شود. در این مقاله فرض می‌شود که  $F$  یک توزیع طول عمر با  $F(0^-) = 0$ ، میانگین متناهی  $\mu$  و تابع چنک  $F^{-1}(p)$  باشد.

## ۲ تبدیل زمان کل آزمون

تبدیل TTT ابزاری پرکاربرد در قابلیت اعتماد است و در مقایسه طول عمر مولفه‌های مختلف با استفاده از ترتیب تصادفی زمان کل آزمون به کار گرفته می‌شود. پس از معرفی تبدیل TTT (**بارلو و همکاران، ۱۹۷۲**) ترتیب‌های تصادفی زمان کل آزمون و تعمیم آن معرفی می‌شود. در ادامه کاربردهایی از تبدیل زمان کل آزمون در قابلیت اعتماد بیان و همچنین بر اساس **شیکد و شانتيکومار (۲۰۰۷)** ارتباط آن با مفهوم محدب بودن

مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس نمودار زمان کل آزمون و کاربرد آن در مشخص‌سازی نرخ خطر توزیع‌ها مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱. برای توزیع طول عمر  $F$ ، تبدیل TTT به صورت

$$H_F^{-1}(p) = \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(s) ds, \quad 0 \leq p \leq 1 \quad (1)$$

تعریف می‌شود و  $H_F^{-1}(p)$  یک تابع صعودی بر حسب  $p$  و  $H_F^{-1}(0) = 0$ ،  $H_F^{-1}(1) = \mu$  است و همچنین  $H_F$  یک تابع توزیع است (بارلو، ۱۹۷۹). تبدیل زمان کل آزمون مقیاسی نیز به صورت

$$\varphi_F(p) = \frac{H_F^{-1}(p)}{\mu}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (2)$$

تعریف می‌شود. تبدیل TTT در رابطه (۱) در نقطه  $p$  نشان دهنده میانگین زمانی است که یک مولفه در آزمون طول عمر تا لحظه از کار افتادن صرف می‌کند، در صورتی که آزمایش تا زمان از کار افتادن  $p$  درصد از تمام مولفه‌های تحت آزمون ادامه داشته باشد.

تعریف ۲. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب با توزیع‌های  $F$  و  $G$  باشند. الف) اگر  $H_F^{-1}(p) \leq H_G^{-1}(p)$ ،  $p \in (0, 1)$ ، آنگاه  $X$  را کوچکتر از  $Y$  در ترتیب زمان کل آزمون گویند و با نماد  $X \leq_{ttt} Y$  نشان می‌دهند.

ب) برای هر تابع  $h$  از  $\{h(u) > 0, \forall u \in (0, 1), h(u) = 0, \forall u \notin (0, 1)\}$  تبدیل  $\Lambda$  زمان کل آزمون تعمیم یافته مرتبط با توزیع  $F$  با نماد  $H_{hF}^{-1}(p)$  نشان داده می‌شود و به صورت

$$H_{hF}^{-1}(p) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} h(F(u)) du \quad (3)$$

تعریف می‌شود. اگر

$$\int_{-\infty}^{F^{-1}(p)} h(F(u)) du \leq \int_{-\infty}^{G^{-1}(p)} h(G(u)) du, \quad p \in (0, 1),$$

آنگاه  $X$  را کوچکتر از  $Y$  در ترتیب زمان کل آزمون تعمیم یافته گویند و با نماد  $X \leq_{ttt}^{(h)} Y$  نشان می‌دهند.

۴ ..... تبدیل زمان کل آزمون

تعریف ۳. (نیر و همکاران، ۲۰۱۳) فرض کنید  $F$  یک توزیع طول عمر با چگالی  $f$  و گشتاور مرکزی  $\mu_r'$  باشد. در این صورت

$$F \in IFR \iff \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} \nearrow x \quad \text{الف-}$$

$$F \in IFRA \iff -\frac{\log \bar{F}(x)}{x} \nearrow \quad \text{ب-}$$

$$F \in NWUE \implies \bar{F}(t) \leq \frac{\mu}{\mu + t}, \quad t \geq 0, \quad \text{ج-}$$

$$F \in NBUE \implies \bar{F}(t) \geq \begin{cases} 1 - \frac{t}{\mu}, & t \leq \mu \\ 0, & t > \mu \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad \text{د-}$$

$$F \in NBRU(NWRU) \iff \int_{x+t}^{\infty} \frac{\bar{F}(u)du}{\bar{F}(x)} \leq (\geq) \int_x^{\infty} \bar{F}(u)du, \quad t \geq 0, \quad \text{ه-}$$

$$F \in RNBUR(RNWUR) \iff \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)} \leq (\geq) \frac{1}{\mu} \int_x^{\infty} \bar{F}(u)du, \quad t \geq 0, \quad \text{و-}$$

$$F \in RNBUE(RNWUE) \iff \forall \mu \int_x^{\infty} \bar{F}(u)du \leq (\geq) \mu' \bar{F}(x), \quad \text{ز-}$$

$$F \in RNBRU(RNWRU) \iff \frac{(\int_x^{\infty} \bar{F}(u)du)(\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du)}{\int_{x+t}^{\infty} \bar{F}(u)du} \geq (\leq) \mu, \quad \text{ح-}$$

$$F \in RNBRUE(RNWRUE) \iff \frac{\int_x^{\infty} \int_t^{\infty} \bar{F}(u)dudt}{\int_x^{\infty} \bar{F}(u)du} \leq (\geq) \frac{\mu'}{\mu}, \quad \text{ط-}$$

$$F \in HRNBUE(HRNWUE) \iff \bar{F}_Z(t) \leq (\geq) e^{-\frac{t}{\mu_Z}}, \quad \text{ی-}$$

$$F \in GIMRL(GDMRL) \iff \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(u)du}{\bar{F}(t+x)} \nearrow (\searrow) t \quad \text{ک-}$$

$$F \in NBUR_h \iff \frac{F(x)}{\int_x^{\infty} \bar{F}(t)dt} \nearrow x, \quad \text{ل-}$$

$$F \in NBEE \iff \int_0^{\infty} \int_t^{\infty} \bar{F}(x)dxdt \leq \mu^2. \quad \text{م-}$$

## ۲.۱ کاربرد تبدیل TTT در قابلیت اعتماد

کاربرد این تبدیل در قابلیت اعتماد همواره مورد توجه محققان بوده است. به عنوان نمونه ویژگی‌های  $NBUE, IFRA, IFR$  ... بر اساس رفتار توزیع نسبت به تبدیل  $\varphi_F(p)$  توسط برخی محققان مورد مطالعه قرار گرفته است (بارلو، ۱۹۷۹؛ برگمن، ۱۹۷۷؛ برگمن، ۱۹۷۹؛ کلفسجو، ۱۹۸۲). در برخی

مواقع تبدیل زمان کل آزمون به سادگی قابل محاسبه نیست و به دست آوردن آن نیاز به محاسبات پیچیده و استفاده از روش های عددی دارد. در این حالت پیدا کردن یک کران برای این تبدیل می تواند رضایت بخش باشد.

گزاره ۱. فرض کنید  $F$  یک توزیع طول عمر باشد، در این صورت:

$$F \in NWUE \implies \varphi_F(p) \leq \ln(\mu + F^{-1}(p)) - \ln(\mu), \quad (۴)$$

$$F \in NBUE \implies \varphi_F(p) \geq \frac{1}{\mu} I_{[\mu \leq F^{-1}(p)]} + \left( \frac{F^{-1}(p)}{\mu} - \frac{(F^{-1}(p))^2}{2\mu^2} \right) I_{[\mu > F^{-1}(p)]} \quad (۵)$$

برهان: با انتگرال گیری از طرفین روابط (ج) و (د) تعریف ۳ و استفاده از رابطه (۲) به ترتیب روابط (۴) و (۵) به دست می آیند.

گزاره ۲. فرض کنید  $F$  یک توزیع طول عمر باشد، آنگاه

$$F \in NBRU(NWRU) \iff \frac{\mu - \int_0^{F^{-1}(p)+t} \bar{F}(u) du}{\bar{F}(x)\mu} \leq (\geq) 1 - \varphi_X(p), \quad \text{الف-}$$

$$F \in RNBUR(RNWU) \iff \varphi_X(p) \leq (\geq) 1 - \frac{\bar{F}(F^{-1}(p) + t)}{\bar{F}}(t), \quad \text{ب-}$$

$$F \in RNBUE(RNWUE) \iff \varphi_X(p) \geq (\leq) 1 - \frac{\mu'_X}{2\mu^2} \bar{F}(t), \quad \text{ج-}$$

$$F \in RNBRU(RNWRU) \iff 1 - \varphi_X(z) \leq (\geq) (1 - \varphi_X(p))(1 - \varphi_X(q)), \quad \text{د-}$$

$$p, q, z \in (0, 1), F^{-1}(z) = F^{-1}(p) + F^{-1}(q),$$

$$F \in RNBRUE(RNWRUE) \iff \int_{F^{-1}(q)}^{\infty} \frac{(1 - \varphi_X(p))\varphi'_X(p)}{1 - p} dp \leq (\geq), \quad \text{ه-}$$

$$\frac{\mu'_X}{2\mu^2} (1 - \varphi_X(p)), \quad p, q \in (0, 1),$$

$$F \in HRNBUE(HRNWUE) \iff \varphi_Z(p) \leq (\geq) 1 - \exp\left(-\frac{F_Z^{-1}(p)}{\mu_Z}\right) \quad \text{و-}$$

$$F \in GIMRL(GDMRL) \iff \frac{\mu(1 - \varphi_X(p))}{\bar{F}(F^{-1}(p) + x)} \nearrow (\searrow)p. \quad \text{ز-}$$

برهان: برای اثبات هر یک از موارد کافی است از تعریف ۳ استفاده شود. موارد (الف)، (ه) و (ز) را

ثابت می‌کنیم. سایر موارد با استدلالی مشابه قابل اثبات است.

الف: با قرار دادن  $F(x) = p$  در رابطه (ه) تعریف ۳ و انجام محاسبات جبری ساده و همچنین استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$F \in NBRU \iff \frac{1}{\bar{F}(x)} \left( 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)+t} \bar{F}(u) du \right) \leq (\geq) 1 - \varphi_X(p).$$

ه: با قرار دادن  $F^{-1}(p) = t$  در رابطه (ط) تعریف ۳ و استفاده از رابطه (۲) داریم:

$$F \in RNBRUE(RNWRUE) \iff \frac{\int_x^\infty \frac{(1-\varphi_F(p))}{f(F^{-1}(p))} dp}{\int_x^\infty \bar{F}(u) du} \leq (\geq) \frac{\mu'_2}{2\mu}$$

حال با قرار دادن  $F^{-1}(q) = x$  و با توجه به اینکه  $\varphi'_F(p) = \frac{1-p}{\mu f(F^{-1}(p))}$  با انجام محاسباتی ساده نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

ز: با قرار دادن  $F^{-1}(p)$  به جای  $t$  در رابطه (ک) تعریف ۳ و استفاده از رابطه (۲) اثبات کامل می‌شود.

گزاره ۳. اگر  $F$  یک توزیع طول عمر باشد، آنگاه

$$F \in NBUR_h \iff F \in IFRA, \quad \text{الف-}$$

$$F \in NBEE \iff \int_0^1 \frac{(1 - \varphi_X(p)) \varphi'_X(p)}{1 - p} \leq 1. \quad \text{ب-}$$

برهان: الف- با استفاده از رابطه (ل) تعریف ۳ و جایگذاری  $F^{-1}(p)$  به جای  $x$  صعودی بودن  $\frac{F(x)}{\int_x^\infty \bar{F}(t) dt}$  معادل با صعودی بودن  $\frac{p}{\varphi_X(p)}$  برای  $p \in (0, 1)$  است و صعودی بودن  $\frac{p}{\varphi_X(p)}$  نیز  $IFRA$  بودن توزیع طول عمر  $F$  را نتیجه می‌دهد.

ب- با تغییر متغیر  $F(t) = p$  در رابطه (م) تعریف ۳ و استفاده از رابطه (۲) به سادگی نتیجه مورد نظر به دست آمده و اثبات کامل می‌شود.

## ۲.۲ تبدیل زمان کل آزمون و محدب بودن

تبدیل زمان کل آزمون ارتباط نزدیکی با مفهوم محدب بودن دارد به طوری که یکی از کاربردهای مهم این تبدیل استفاده از آن در برقراری ترتیب تصادفی محدب می‌باشد. **نیر و همکاران (۲۰۱۳)** با معرفی کلاس‌های مختلف محدب بودن، شرایط برقراری آن‌ها را برای توزیع‌های طول عمر بیان کرده و ویژگی‌ها و کاربردهای آن‌ها را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در ادامه شرایط برقراری ترتیب محدب بر اساس تبدیل زمان کل آزمون بیان می‌شود.

**تعریف ۴.** فرض کنید  $F$  یک توزیع طول عمر باشد، آنگاه

$$F \in NBUC \iff \int_{x+y}^{\infty} \bar{F}(t) dt \leq \bar{F}(x) \int_y^{\infty} \bar{F}(t) dt, \quad \forall x, y \geq 0, \quad \text{الف-}$$

$$F \in NBUC A \iff \frac{\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \bar{F}(u+t) du dx}{\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \bar{F}(u) du dx} \leq \bar{F}(t), \quad t > 0, \quad \text{ب-}$$

$$F \in HNBUC \implies \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x+t) dx dt}{\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx} \leq \bar{F}(t), \quad t \geq 0, \quad \text{ج-}$$

$$F \in NBELC \implies \frac{\int_x^{\infty} \int_y^{\infty} \bar{F}(u) du dy}{\int_x^{\infty} \bar{F}(y) dy} \leq \mu, \quad x \geq 0. \quad \text{د-}$$

**گزاره ۴.** اگر  $F$  یک توزیع طول عمر باشد. آنگاه برای  $0 \leq p, q \leq 1$  داریم:

$$F \in NBUC \iff 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)+F^{-1}(q)} \bar{F}(t) dt \leq (1-p)(1-\varphi_X(p)), \quad \text{الف-}$$

$$F \in NBUC A \iff \frac{\int_0^1 [1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)+F^{-1}(q)} \bar{F}(u) du] \frac{\varphi'_X(p)}{1-p} dp}{\int_0^1 \frac{(1-\varphi_X(p))\varphi'_X(p)}{1-p} dp} \leq 1 - q \quad \text{ب-}$$

$$F \in HNBUC \iff 1 - \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(x) dx \leq (1-p)(1-\varphi_X(p)), \quad \text{ج-}$$

$$F \in NBELC \iff \int_{F^{-1}(q)}^{\infty} \frac{(1-\varphi_X(p))\varphi'_X(p)}{1-p} dp \leq 1 - \varphi_X(q). \quad \text{د-}$$

برهان: با جایگذاری  $F(x) = p$  و  $F(y) = q$  در تعریف هر کدام از خواص بیان شده نتیجه مورد نظر به دست خواهد آمد.

ملاحظه ۱. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع به ترتیب  $F$  و  $G$  باشند. در این صورت  $X$  را کوچکتر از  $Y$  در ترتیب تصادفی محدب نامیده و با  $F \leq_c G$  نشان می‌دهند. اگر  $G^{-1}F(x)$  یک تابع محدب روی تکیه‌گاه  $F$  باشد، یعنی با شرط مشتق پذیری  $G^{-1}F(x)$  نسبت به  $x$  تابع  $\frac{d}{dx}G^{-1}F(x) = \frac{f(x)}{g[G^{-1}F(x)]}$  یک تابع نانزولی نسبت به  $x$  است. **شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)** نشان دادند که برای  $x = F^{-1}(p)$  رابطه  $\frac{g[G^{-1}(p)]}{f[F^{-1}(p)]}$  به ازای  $0 \leq p \leq 1$  ناصعودی است. حال اگر از تبدیل زمان کل آزمون تعمیم یافته (۳)، که در آن  $h(u) = g(G^{-1}(u))$  است، نسبت به متغیر  $p$  مشتق بگیریم خواهیم داشت

$$\frac{d}{dp}H_{hF}^{-1}(p) = \frac{g[G^{-1}(p)]}{f[F^{-1}(p)]} \quad (۶)$$

که ناصعودی (نانزولی) بودن مشتق (۶) به معنی مقعر (محدب) بودن تبدیل  $H_{hF}^{-1}$  است. بنابراین می‌توان گفت  $F \leq_c G$  اگر و تنها اگر  $H_{hF}^{-1}(p)$  مقعر باشد.

### ۲.۳ نمودار زمان کل آزمون

نمودار زمان کل آزمون که برای اولین بار توسط **بارلو و همکاران (۱۹۷۲)** مورد مطالعه قرار گرفت در زمینه‌های مختلف از جمله آنالیز داده‌های خرابی برای سیستم‌های قابل تعمیر و غیر قابل تعمیر، مسائل نگهداری و آنالیز بقا کاربرد دارد. هنگامی که نتوان با استفاده از ضابطه توزیع مورد مطالعه رفتار تابع نرخ خطر آن را تشخیص داد، این نمودار بسیار مفید و کارآمد خواهد بود. نمودار TTT منحنی است که از گوشه پایین سمت چپ شروع می‌شود و انتهای آن در گوشه بالا سمت راست مربع واحد قرار دارد. اگر توزیع  $F$  به داده‌ها برازش داده شود، آنگاه با افزایش حجم نمونه، نمودار TTT داده‌ها به نمودار تابع  $\varphi_F$  در (۲) همگرا می‌شود. برای رسم نمودار TTT (**برگمن و کلفسجو، ۲۰۱۴**)، فرض کنید  $0 \leq X(0) \leq \dots \leq X(n)$  زمان‌های شکست  $n$  مولفه مستقل و هم‌توزیع از یک سیستم غیر قابل تعمیر با توزیع عمر  $F$  هستند. نمودار TTT برای این داده‌ها به صورت زیر رسم می‌شود.

گام ۱: فرض کنید  $S_0 = 0$  و  $S_j = S_{j-1} + (n - j + 1)(x_{(j)} - x_{(j-1)})$  برای  $j = 1, \dots, n$ .



گام ۲: نرمال سازی مقادیر  $S_j$  به صورت  $u_j = \frac{S_j}{S_n}$  برای  $j = 1, \dots, n$  انجام می شود.  
 گام ۳: نقاط  $(p = \frac{j}{n}, u_j)$  برای  $j = 1, \dots, n$  در صفحه مختصات مشخص و متصل می شوند.

## ۲.۴ مشخص سازی نرخ خطر توزیع به وسیله تابع $\varphi_F$

**بارلو و کامپو (۱۹۷۵)** رفتار تابع نرخ خطر توزیع طول عمر  $F$  را بر حسب نمودار  $\varphi_F$  به صورت زیر بیان کردند:

- (۱) اگر نمودار  $\varphi_F$  محدب و زیر قطر اصلی مربع واحد باشد، آنگاه تابع نرخ خطر توزیع  $F$  نزولی است.
- (۲) اگر نمودار  $\varphi_F$  مقعر و بالای قطر اصلی مربع واحد باشد، آنگاه تابع نرخ خطر توزیع  $F$  صعودی است.
- (۳) اگر نمودار  $\varphi_F$  ابتدا محدب و زیر قطر اصلی مربع واحد و سپس مقعر و بالای قطر اصلی مربع واحد باشد، آنگاه تابع نرخ خطر توزیع  $F$  وانی شکل است.
- (۴) اگر نمودار  $\varphi_F$  ابتدا مقعر و بالای قطر اصلی و سپس محدب و زیر قطر اصلی مربع واحد باشد، آنگاه تابع نرخ خطر توزیع  $F$  تک مدی است.
- (۵) اگر نمودار  $\varphi_F$  منطبق بر قطر اصلی مربع واحد باشد، آنگاه تابع نرخ خطر توزیع  $F$  ثابت است.

## ۳ مدل وایبول تغییر شکل یافته

در سال های اخیر برای افزایش قابلیت توزیع وایبول در مدل سازی داده ها، ساخت توزیع های جدید بر اساس آن مورد توجه محققان بوده و توزیع های زیادی تولید و ویژگی های آن ها مورد مطالعه قرار گرفته است. در **مورتی و همکاران (۲۰۰۴)** و **المالکی (۲۰۱۳)** اکثر توزیع های ساخته شده بر اساس توزیع وایبول معرفی و به روش های ساخت آن ها نیز اشاره شده است. **دوسترادی و همکاران (۱۳۹۵)** نیز بر مبنای توزیع وایبول یک توزیع جدید را معرفی کرده اند. همچنین **طارمی و همکاران (۱۴۰۰)** یک خانواده جدید از توزیع های وایبول تعمیم یافته ترکیبی را معرفی و برخی از ویژگی های آن را بیان کرده اند. در ادامه دو توزیع جدید بر اساس توزیع وایبول معرفی و تفسیر سیستمی آنها ارائه و تابع نرخ خطر و نحوه برآورد پارامترهای آن ها با روش ماکسیمم درستنمایی بیان می شوند. سپس با تحلیل داده های طول عمر نشان داده می شود که توزیع های جدید برازش بهتری نسبت به توزیع پایه وایبول و توزیع وایبول اصلاح شده ارائه می دهند.

### ۳.۱ روش ساخت مدل

تابع تغییر شکل را می‌توان بر اساس اصول ریاضیات و همچنین عدم حتمیت در نظریه اقتصاد تعریف کرد که کاربرد فراوانی در سایر زمینه‌ها از جمله بیمه نیز دارد.

**تعریف ۵.** تابع  $g(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  را یک تابع تغییر شکل گوییم هرگاه  $g(0) = 0$  و  $g(1) = 1$  و  $g(\cdot)$  پیوسته و نازولی بر روی بازه  $[0, 1]$  باشد.

اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع توزیع  $F_X(x)$  و  $g(\cdot)$  یک تابع تغییر شکل باشد، آنگاه تبدیل تابع توزیع  $F$  به وسیله تابع  $g(\cdot)$  به صورت  $F \circ F_X(x) = g[F_X(x)] = F_g(x)$  است، که در آن  $F_g(x)$  نیز یک تابع توزیع است و اصطلاحاً توزیع تغییر شکل یافته  $F$  نامیده می‌شود (موریلاس، ۲۰۰۵). فرض کنید  $N$  یک متغیر تصادفی با تابع جرم احتمال

$$P(N = k) = \begin{cases} (1 + \theta)e^{-\theta}, & k = 1 \\ \frac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}, & k = 2, 3, \dots \end{cases} \quad \theta > 0. \quad (7)$$

باشد. در این صورت برای هر  $0 \leq t \leq 1$  داریم

$$g_N(t) = E(t^N) = e^{-\theta(1-t)} - e^{-\theta}(1-t), \quad \theta > 0. \quad (8)$$

که در آن  $g_N(t)$  یک تابع تغییر شکل است. زیرا  $g_N(t) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  صعودی و  $g_N(0) = 0$  و  $g_N(1) = 1$  بنابراین اگر  $F(x)$  یک توزیع پایه در نظر گرفته شود، آنگاه

$$F_g(x) = g_N(F(x)) = e^{-\theta \bar{F}(x)} - e^{-\theta} \bar{F}(x), \quad (9)$$

تابع توزیع تغییر شکل یافته توزیع پایه  $F$  است. به سادگی نشان داده می‌شود که اگر  $\theta \rightarrow 0$ ، آنگاه  $F_g(x) \rightarrow F(x)$ . علاوه بر این اگر  $F(x)$  پیوسته و با تابع چگالی  $f(x)$  باشد، آنگاه تابع چگالی تابع توزیع تغییر شکل یافته به صورت  $f_g(x) = w(x)f(x)$  است، که در آن  $w(x) = \theta e^{-\theta \bar{F}(x)} + e^{-\theta}$  یک تابع صعودی است. در نتیجه اگر متغیر تصادفی  $X_w$  دارای توزیع  $F_g(x)$  باشد آنگاه  $X_w$  یک متغیر تصادفی وزنی با تابع چگالی  $f_g(x)$  است. بنابراین بر اساس **بارتازوویچ و اسکولیموسکا (۲۰۰۶)** و با در نظر گرفتن ارتباط بین تبدیل های لورنتس و  $\varphi_F$  برای  $U = w(X)$ ، تبدیل زمان کل آزمون مقیاسی

متغیر تصادفی  $U$  برای این توزیع با قرار دادن  $F(x) = p$  به صورت

$$\varphi_U(p) = e^{-\theta(1-p)} - (1-p)e^{-\theta} + \frac{(1-p)F^{-1}(p)}{\mu}.$$

بیان می‌شود. برای جزئیات به فیشر (۱۹۳۴)؛ پاتیل و رائو (۱۹۷۷) مراجعه شود.

## ۳.۲ توزیع وایبول تغییر شکل یافته

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی وایبول به ترتیب با توابع توزیع و چگالی

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0, \\ f(x) &= \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} \end{aligned} \quad (10)$$

باشد. توابع توزیع و چگالی وایبول تغییر شکل یافته بر اساس تابع تغییر شکل (۸) به صورت

$$\begin{aligned} F_{1g}(x) &= \exp\{-\theta e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}\} - e^{-\theta - (\frac{x}{\beta})^\alpha}, \\ f_{1g}(x) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} x^{\alpha-1} (e^{-\theta} + \theta e^{-\theta e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}}) \quad \alpha, \beta, \theta > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

است. این توزیع با  $GW(\alpha, \beta, \theta)$  نشان داده و توزیع وایبول تغییر شکل یافته شماره ۱ نامیده می‌شود.

فرض کنید  $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$  یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی، مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع  $F$  و  $N$  یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال (۷) و مستقل از  $X_i$  ها باشد. اگر متغیر تصادفی جدید  $Y$  به صورت  $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$  در نظر گرفته شود، آنگاه

$$\begin{aligned} G(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \leq y | N = n) P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} F^n(y) P(N = n) \\ &= \frac{F(y)(1+\theta)}{e^\theta} + \sum_{n=2}^{\infty} F^n(y) \frac{\theta^n e^{-\theta}}{n!} = \frac{F(y)(1+\theta)}{e^\theta} + e^\theta \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\theta F(y))^n}{n!} \right) \\ &= F(y)(1+\theta)e^{-\theta} + e^{-\theta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta F(y))^n}{n!} - 1 - \theta F(y) \right) \\ &= F(y)(1+\theta)e^{-\theta} + e^{-\theta} e^{\theta F(y)} - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta} F(y) \end{aligned}$$

$$= e^{-\theta \bar{F}(y)} - e^{-\theta \bar{F}(y)}, \quad (12)$$

که همان  $F_g(x)$  به دست آمده در (۹) است. بنابراین اگر  $X_1, \dots, X_N$  طول عمر مولفه‌های یک سیستم موازی با  $N$  مولفه در نظر گرفته شوند که  $N$  یک مقدار تصادفی گسسته با تابع احتمال (۷) و  $X_i$  ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع و دارای توزیع  $F$  باشند که از  $N$  نیز مستقل هستند، آنگاه  $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$  طول عمر این سیستم موازی می‌باشد که دارای تابع توزیع (۱۲) است.

فرع ۱. اگر  $X_1, \dots, X_N$  طول عمر مولفه‌های یک سیستم سری با  $N$  مولفه در نظر گرفته شوند که در آن  $N$  یک متغیر تصادفی گسسته با تابع احتمال (۷) و  $X_i$  ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک  $F$  هستند که از  $N$  نیز مستقل هستند، آنگاه متغیر تصادفی  $Z = \min\{X_1, \dots, X_N\}$  طول عمر این سیستم سری است که تابع توزیع آن عبارتست از

$$F(x) = 1 - (e^{-\theta F(x)} - e^{-\theta F(x)}). \quad (13)$$

اگر در (۸) به جای  $t$  تابع  $\bar{F}$  جایگذاری شود، آنگاه تابع به دست آمده تابع بقای یک متغیر تصادفی به صورت  $\bar{F}(x) = e^{-\theta F(x)} - e^{-\theta F(x)}$  خواهد بود، که همان تابع بقای توزیع (۱۳) است. بنابراین با در نظر گرفتن توزیع وایبول به عنوان توزیع پایه و استفاده از (۱۳)، می‌توان توزیع دیگری به صورت

$$F_{\gamma g}(x) = 1 - \exp(-\theta(1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}) + e^{-\theta}(1 - e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha})). \quad (14)$$

بدست آورد توزیع وایبول تغییر شکل یافته شماره ۲ نامگذاری می‌شود. از مدل‌های (۱۱) و (۱۴) به عنوان رقیبی برای مدل‌های (۱۰) و وایبول اصلاح شده جدید<sup>۱</sup> (NMW) (المالکی و یوان، ۲۰۱۳) در برازش به داده‌های واقعی استفاده خواهد شد که در آن توزیع NMW عبارت است از

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\theta - \beta x^\gamma e^{\lambda x}}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \theta, \lambda > 0. \quad (15)$$

<sup>1</sup>New Modified Weibull

### ۳.۳ تابع نرخ خطر

با توجه به شکل پیچیده توزیع‌های وایبول تغییر شکل یافته، بررسی رفتار تابع نرخ خطر این توزیع به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست و برای این کار باید از رسم نمودار نرخ خطر یا ابزارهای دیگری از قبیل نمودار زمان کل آزمون استفاده کرد. اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع (۱۱) باشد، تابع نرخ خطر آن به صورت

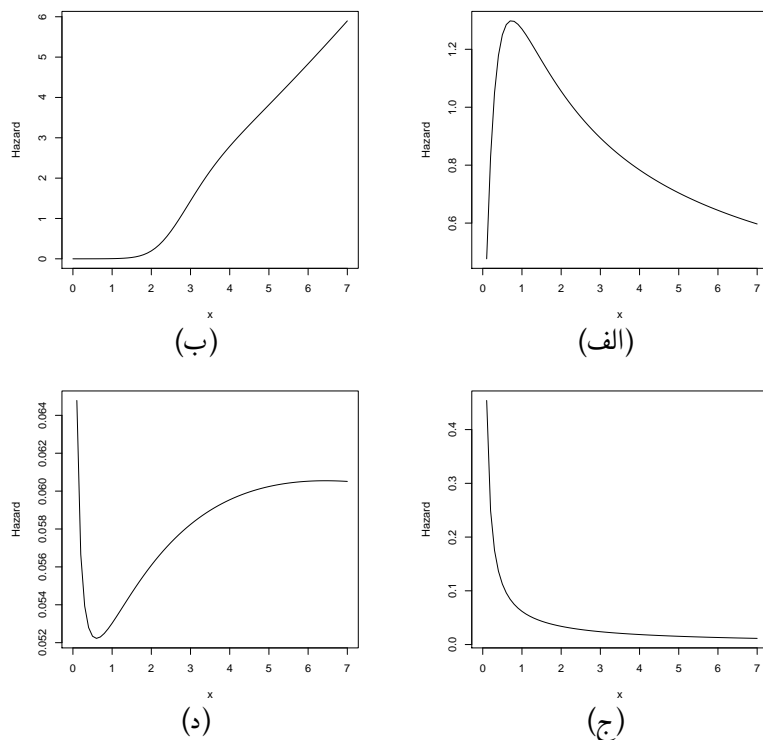
$$h(x, \alpha, \beta, \theta) = \frac{\frac{\alpha}{\beta^\alpha} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha} x^{\alpha-1} (e^{-\theta} + \theta e^{-\theta e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}})}{1 - \exp(-\theta e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}) + e^{-\theta - (\frac{x}{\beta})^\alpha}}, \quad x, \alpha, \beta, \theta > 0$$

است. شکل ۱ نمودار تابع نرخ خطر توزیع وایبول تغییر شکل یافته را برای پارامترهای مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع نرخ خطر این توزیع به ازای مقادیر مختلف پارامترها، صعودی، نزولی، تک مدی و وانی شکل است.

### ۳.۴ برآورد پارامترهای مدل

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده  $x_1, \dots, x_n$  از توزیع (۱۱) باشد. در این صورت لگاریتم تابع درستنمایی برای این توزیع به صورت

$$\begin{aligned} \ell(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta, \theta) &= \ln(\prod_{i=1}^n \frac{\alpha}{\beta^\alpha} e^{-(\frac{x_i}{\beta})^\alpha} x_i^{\alpha-1} (e^{-\theta} + \theta \exp\{-\theta e^{-(\frac{x_i}{\beta})^\alpha}\})) \\ &= \sum_{i=1}^n (\ln \alpha - \alpha \ln \beta - (\frac{x_i}{\beta})^\alpha + (\alpha - 1) \ln x_i \\ &\quad + \ln(e^{-\theta} + \theta \exp\{-\theta e^{-(\frac{x_i}{\beta})^\alpha}\})) \end{aligned}$$



شکل ۱. تابع نرخ خطر توزیع وایبول تغییر شکل یافته الف-  $G(0.5, 0.8, 10)$ ، ب-  $G(2.919881)$ ، ج-  $G(0.8, 2.65, 2)$  و د-  $G(0.5, 3, 5)$ .

از مشتق تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} - \ln \beta - \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) + \ln x_i \\ &\quad + \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right) \theta^\alpha e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha} \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}}{e^{-\theta} + \theta \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n -\frac{\alpha}{\beta} + \alpha \beta^{-\alpha-1} x_i^\alpha - \frac{\alpha \theta^\alpha \beta^{-\alpha-1} x_i^\alpha e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha} \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}}{e^{-\theta} + \theta \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}} = 0, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{-e^{-\theta} + \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\} - \theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha} \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}}{e^{-\theta} + \theta \exp\{-\theta e^{-\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\alpha}\}} = 0. \end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این معادلات شکل بسته‌ای ندارند و به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند و حل آن‌ها با روش‌های عددی مانند روش نیوتن-رافسون یا برنامه بهینه‌سازی استاندارد در نرم افزار  $R$  امکان‌پذیر است.

مثال ۱. (داده‌های استرس الیاف کربن) در این مثال نکویی برازش توزیع‌های وایبول معرفی شده روی نمونه‌ای از ۵۰ مشاهده مربوط به شکست استرس الیاف کربن بررسی می‌شود. **پاجت و اسپورییر (۱۹۹۰)** نشان دادند که این داده‌ها از توزیع وایبول با پارامترهای شکل و مقیاس به ترتیب ۴/۸ و ۳/۲ پیروی می‌کنند. برای این داده‌ها چهار مدل (۱۰)، (۱۱)، (۱۴) و (۱۵) را مورد بررسی قرار داده و برای مقایسه این چهار توزیع از معیارهای ارزیابی  $AIC$ ،  $CAIC$ ،  $BIC$  و  $HQIC$  استفاده می‌شود.

در برازش توزیع وایبول به داده‌ها پارامترهای شکل و مقیاس به ترتیب ۴/۷۸ و ۳/۲ به دست آمده و  $P$  مقدار برای آزمون کلموگوروف-اسمیرنوف نیز برابر ۰/۳۶۷۶ می‌باشد. همچنین در برازش توزیع (۱۵) به داده‌ها مقادیر پارامترهای  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\theta$  و  $\gamma$  و  $\lambda$  به ترتیب ۰/۰۰۴۷، ۰/۰۰۰۰۲۷، ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰، ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰ و ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰ می‌باشد.  $P$  مقدار برای آزمون کلموگوروف-اسمیرنوف نیز برابر ۰/۴۳۴۳ به دست آمده است. حال اگر توزیع (۱۱) به این داده‌ها برازش داده شود مقدار پارامترهای شکل و مقیاس به ترتیب ۲/۲۸۸ و ۱/۹۷۶ و همچنین  $\theta = ۸/۱۰۷$  به دست می‌آید.  $P$  مقدار برای آزمون کلموگوروف-اسمیرنوف نیز برابر ۰/۸۱۸۱ می‌باشد که نشان می‌دهد این توزیع برازش مناسبی برای داده‌های الیاف کربن است. همچنین اگر توزیع (۱۴) نیز به داده‌ها برازش داده شود پارامترهای شکل و مقیاس و  $\theta$  به ترتیب برابر ۶/۰۸۱، ۳/۹۵۸ و ۴/۵۸۱ به دست می‌آیند و  $P$  مقدار برای آزمون کلموگوروف-اسمیرنوف نیز برابر ۰/۸۶۸۱ می‌باشد که نشان می‌دهد این توزیع نیز برازش مناسبی برای داده‌های الیاف کربن است و در مقایسه با توزیع (۱۱) عملکرد بهتری نیز دارد. مقدار انحراف معیار هر کدام از برآوردهای مورد نظر در برآورد پارامترهای توزیع‌های مورد مطالعه در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. انحراف معیار برآوردها					
مدل	$SE(\hat{\alpha})$	$SE(\hat{\beta})$	$SE(\hat{\theta})$	$SE(\hat{\gamma})$	$SE(\hat{\lambda})$
NMW	۰/۰۰۱۷	NAN	۰/۲۹۹	۲۱۴	۵۷/۵۰۹
Weibull	۰/۴۸	۰/۱	...	...	...
GW	۰/۵۵۲	۰/۳۷۹	۴/۱۷۶	...	...
$F_{\gamma g}$	۰/۶۴۲	۰/۲۸	۱/۶۸۴	...	...

جدول ۲ نیز معیارهای ارزیابی مدل را برای مقایسه چهار توزیع مورد بررسی نشان می‌دهد. با توجه به

مقادیر به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که توزیع (۱۴) دارای بهترین عملکرد در بین این چهار توزیع است و همچنین توزیع (۱۱) نیز نسبت به توزیع وایبول برازش بهتری را به داده‌های مورد نظر ارائه می‌دهد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که توزیع‌های تولید شده به وسیله تابع تغییر شکل  $g(t) = e^{-\theta(1-t)} - e^{-\theta}(1-t)$  نسبت به توزیع وایبول و وایبول اصلاح شده جدید (NMW) برازش مناسب‌تری را بر روی داده‌ها ایجاد می‌کنند. قابل ذکر است که برآورد پارامترهای توزیع‌های مورد مطالعه با استفاده از روش درستنمایی

جدول ۲. معیارهای ارزیابی مدل

مدل	AIC	CAIC	BIC	HQIC
NMW	۱۱۰/۲۷	۱۱۱/۶۳	۱۱۹/۸۳	۱۱۳/۹۱
Weibull	۱۰۴/۱۵	۱۰۴/۴۱	۱۰۷/۹۷	۱۰۵/۶۱
GW	۱۰۰/۴۶	۱۰۰/۹۸	۱۰۶/۲	۱۰۲/۶۴
$F_{\gamma g}$	۱۰۰/۳۲	۱۰۰/۸۴	۱۰۶/۰۵	۱۰۲/۵

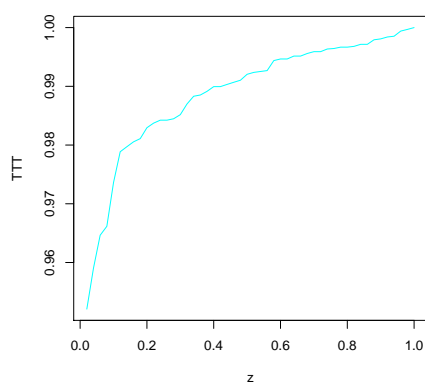
ماکزیم به دست آمده‌اند و همچنین در بررسی نیکویی برازش توزیع‌های مورد نظر و برآورد پارامترهای آنها از بسته‌های *GenSa* و *AdequacyModel* در نرم افزار *R* استفاده شده است.

همان طور که در بخش ۲.۴ نیز اشاره شد یکی از روش‌های بررسی رفتار تابع نرخ خطر یک توزیع استفاده از نمودار زمان کل آزمون است. شکل ۲ نمودار زمان کل آزمون داده‌های الیاف کربن که دارای توزیع  $GW(2/288, 1876, 8107)$  است را نشان می‌دهد. چون این نمودار مقعر است تابع نرخ خطر یک تابع صعودی است (شکل ۱).

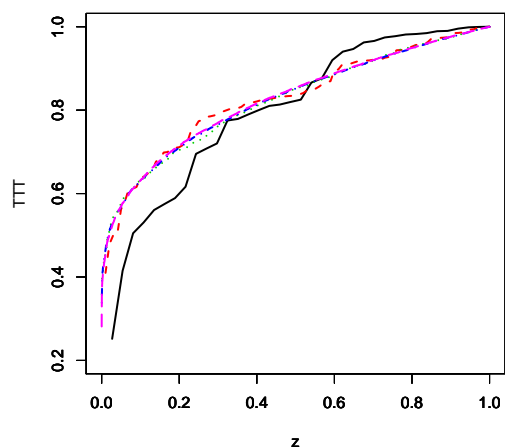
## ۴ تحلیل داده‌های واقعی

مثال ۲. (داده‌های لوکوموتیو) در این مثال می‌خواهیم نمودار TTT طول عمر لوکوموتیوها بر حسب هزار مایل را رسم کنیم. نلسن (۱۹۸۲) نشان داد توزیع لگ نرمال برازش خوبی به این داده‌ها ارائه می‌دهد و بر اساس روش ماکسیم درستنمایی پارامترهای توزیع را به صورت  $\mu = 2/2223$  و  $\sigma = 0/3064$  برآورد کرده است. با توجه به مقدار پارامتر مقیاس مدل برازش شده که کمتر از ۱ است قطعا نرخ شکست داده‌ها باید صعودی باشد. پس از رسم نمودار TTT برای این داده‌ها و داده‌هایی از توزیع لگ نرمال با پارامترهای فوق در حجم‌های ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ و همچنین نمودار  $\varphi_F$  برای توزیع لگ نرمال با پارامترهای ذکر شده (شکل ۳) مشاهده می‌شود که نمودار TTT داده‌ها مقعر است و این تاییدی بر صعودی بودن تابع نرخ خطر توزیعی است که داده‌ها از آن آمده‌اند. همچنین برای حجم نمونه‌ی زیاد نمودارهای زمان کل آزمون





شکل ۲. نمودار TTT داده‌های الیاف کربن

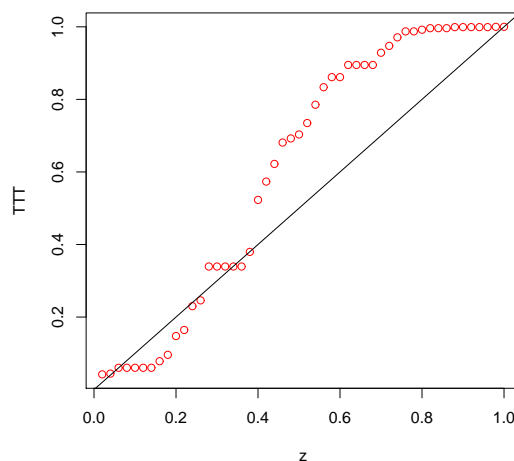


شکل ۳. نمودار TTT زمان شکست ۳۷ لوکوموتیو (خط ممتد) - نمونه به حجم ۱۰۰ (خط چین کوتاه)، حجم ۱۰۰۰ (نقطه چین)، حجم ۵۰۰۰ (نقطه خط) و  $\varphi$  (خط چین بلند)

نزدیک به یکدیگر هستند و همگرا به منحنی تابع  $\varphi_F$  می‌شوند.

مثال ۳. (داده‌های طول عمر) در این مثال داده‌های **آورست** (۱۹۸۷) را که در مورد طول عمر ۵۰ مولفه است در نظر می‌گیریم. قبلاً **موده‌لکار و سریواستاوا** (۱۹۹۳)، **سارهان و زین الدین** (۲۰۰۹) و

سیلوا و همکاران (۲۰۱۰) مدل‌های پیشنهادی خود را روی این داده‌ها برازش داده‌اند. از مدل‌های مناسبی که به این داده‌ها برازش داده شده است می‌توان مدل (۱۵) را نام برد که نسبت به سایر مدل‌های مطالعه شده برازش مناسب تری برای این داده‌ها است و معیارهای نیکویی برازش برای آن نشان دهنده مناسب بودن مدل جدید معرفی شده است. این مدل توسط المالکی و یوان (۲۰۱۳) معرفی شده و به دلیل پیچیدگی تابع توزیع و تعداد زیاد پارامترهای آن به راحتی نمی‌توان رفتار تابع نرخ خطر آن را تحلیل کرد. بنابراین اهمیت نمودار TTT بیش از پیش آشکار می‌شود و با رسم این نمودار برای داده‌های مورد مطالعه می‌توان رفتار تابع نرخ خطر داده‌ها را حدس زد. با رسم نمودار زمان کل آزمون برای این داده‌ها (شکل ۴) مشاهده می‌شود که این نمودار ابتدا محدب و سپس مقعر است یعنی توزیعی که این داده‌ها از آن پیروی می‌کند یک توزیع با نرخ خطر وانی شکل است.



شکل ۴. نمودار TTT طول عمر ۵۰ مولفه

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برخی از ویژگی‌های تبدیل زمان کل آزمون مورد بررسی قرار گرفته و سپس بر اساس برخی از مفاهیم پرکاربرد در قابلیت اعتماد کران‌هایی برای تبدیل زمان کل آزمون ارائه شده است. همچنین برخی از مفاهیم سالخورده‌گی تجدید و کلاس‌های محدب بر اساس تبدیل زمان کل آزمون مشخصه سازی شده‌اند.

تشخیص رفتار تابع نرخ خطر به عنوان یکی از کاربردهای مهم نمودار زمان کل آزمون مطالعه شده و با ارائه چند مثال کاربردی به طور مفصل مورد بحث و تفسیر قرار گرفته است. در پایان نیز با معرفی یک خانواده جدید از توزیع‌ها نشان داده می‌شود که این خانواده توزیع نسبت به توزیع وایبول و وایبول اصلاح شده جدید برازش بهتری روی داده‌های الیاف کربنی ایجاد می‌کند. یافتن کاربردهای بیشتر از تبدیل زمان کل آزمون و همچنین ارتباط آن با توزیع‌های ثروت در ادامه تحقیق مد نظر می‌باشد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی، سردبیر و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود و ارائه بهتر این مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

- دوسترمدادی، ع.، زادکرمی، م.، ر.، خنجری عیدنک، ع. و فریدونی، ز. (۱۳۹۵)، تعمیم جدید توزیع وایبول، مجله علوم آماری، ۱۰، ۸۱-۹۴.
- طارمی، ب.، آوجی، م. و سنجرى فارسى‌پور، ن. (۱۴۰۰)، خانواده توزیع‌های وایبول تعمیم‌یافته ترکیبی با توزیع دوجمله‌ای منفی بریده در صفر، مجله علوم آماری، ۱۵، ۱۶۵-۱۹۱.
- Aarset, M. V. (1987), How to Identify a Bathtub Hazard Rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106-108.
- Almalki, S. J. and Yuan, J. (2013), A New Modified Weibull Distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **111**, 164-170.
- Almalki, S. J. (2013), A Reduced New Modified Weibull Distribution, *arXiv preprint arXiv:1307.3925*.
- Barlow, R. E., Bartholomew, D. J, Bremner, J. M. and Brunk, H. D. (1972), *Statistical Inference Under Order Restrictions*, John Wiley & Sons, New York.

- Barlow, R. E. and Doksum, K. A. (1972), Isotonic Tests for Convex Orderings, *In Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 1: Theory of Statistics. The Regents of the University of California.*
- Barlow, R. E. (1979), Geometry of the Total Time on Test Transform, *Naval Research Logistics Quarterly*, **26**, 393-402.
- Barlow, R. E. and Campo, R. (1975), Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis, *In:Reliability and Fault Tree Analysis.SIAM,Philadelphia,PA.*
- Bartoszewicz, J., and Skolimowska, M. (2006), Preservation of Classes of Life Distributions and Stochastic Orders Under Weighting, *Statistics & Probability Letters*, **76**, 587-596.
- Bergman, B. (1977), Crossings in the Total Time on Test Plot, *Scandinavian Journal of Statistics*, 171-177.
- Bergman, B. (1979), On Age Replacement and the Total Time on Test Concept, *Scandinavian Journal of Statistics*, 161-168.
- Bergman, B. and Klefsjö, B. (2014), Total Time on Test Plots, *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online.*
- Bieniek, M. (2016), Optimal Bounds for the Mean of the Total Time on Test for Distributions with Decreasing Generalized Failure Rate, *Statistics*, **50**, 1206-1220.
- Cao, J. and Wang, Y. (1991), The NBUC and NWUC Classes of Life Distributions, *Journal of Applied Probability*, **28(2)**, 473-479.

- Epstein, B. and Sobel, M. (1953), Life Testing. *Journal of the American Statistical Association*, **48**, 486-502.
- Fisher, R. A. (1934). The Effect of Methods of Ascertainment Upon the Estimation of Frequencies. *Annals of Eugenics*, **6**, 13-25.
- Kawczak , J., Kulperger, R. and Yu, H. (2009), Equivalent Processes of Total Time on Test Lorenz and Inverse Lorenz Processes, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 125-130.
- Klefsjö, B. (1982), On Aging Properties and Total Time on Test Transforms, *Scandinavian Journal of Statistics*, **37**-41.
- Kochar, S. C., Li, X. and Shaked, M. (2002), The Total Time on Test Transform and the Excess Wealth Stochastic Orders of Distributions, *Advances in Applied Probability*, **34**, 826-845.
- Li, X. and Shaked, M. (2007), A General Family of Univariate Stochastic Orders, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 3601-3610.
- Morillas, P. M. (2005), A method to obtain new copulas from a given one. *Metrika*, **61**, 169-184.
- Mudholkar, G. S. and Srivastava, D. K. (1993), Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-Rate Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 299-302.
- Murthy, D. P., Xie, M. and Jiang, R. (2004), *Weibull Models*(Vol.505), John Wiley & Sons.
- Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Balakrishnan, N. (2013), *Quantile-Based Reliability Analysis*, Basel: Birkhäuser

Nelson, W.(1982), *Applied Life Data Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Padgett, W. J., and Spurrier, J. D. (1990), Shewhart-Type Charts for Percentiles of Strength Distributions, *Journal of Quality Technology*, **22**, 283-288.

Patil, G. P., and Rao, C. R. (1977), The Weighted Distributions: A Survey and Their Applications, *Applications of Statistics*.

Perez Ocon, R., Gámiz Pérez, M. L. and Ruíz Castro, J. E. (1997), A Study of Different Ageing Classes via Total Time on Test Transform and Lorenz Curves, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **13**, 241-248.

Pham, T. G. and Turkkan, N. (1994), The Lorenz and the Scaled Total-Time-on-Test Transform Curves: A Unified Approach, *IEEE Transactions on Reliability*, **43**, 76-84.

Shaked, M., and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer Science & Business Media.

Sarhan, A. M. and Zaindin, M. (2009), Modified Weibull Distribution, *APPS. Applied Sciences*, **11**, 123-136.

Silva, G. O., Ortega, E. M. and Cordeiro, G. M. (2010), The Beta Modified Weibull Distribution, *Lifetime Data Analysis*, **16**, 409-430.

Spiroiu, M. A. (2017), Estimation of Total Time on Test for Large Samples, *In MATEC Web of Conferences (Vol. 112, p. 09008)*, EDP Sciences.

## **On The Applications Of Total Time on Test Transform In Reliability**

Esfahani, M., Amini, M., Mohtashami Borzadaran, G. R.  
Department of Statistics, Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

**Abstract:** In this article, the total time on test (TTT) transformation and its major properties are investigated. Then, the relationship between the TTT transformation and some subjects in reliability theory is expressed. The TTT diagram is also drawn for some well-known lifetime distributions, and a real-data analysis is performed based on this diagram. A new distorted family of distributions is introduced using the distortion function. The statistical interpretation of the new life distribution from the perspective of reliability is provided, and its survival function is derived. Finally, a generalization of the Weibull distribution is introduced using a new distortion function. A real data analysis shows its superiority in fitting in comparison to the traditional Weibull model.

**Keywords:** Hazard rate function, Total time on test transform, Total time on test plot.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62N05, 62E15.