مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۱، ص ۱۶۵ – ۱۹۱
DOI: 10.29252/jss.15.1.165
مقاله پژوهشی

خانواده توزیع‌های وایبل تعمیم‌یافته ترکیبی با توزیع دوجمله‌ای منفی بریده در صفر

بهرام طارمی[1]، محسن آوجی[2]، ناهید سنجری فارسی پور[3]

[1]بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز
[2]گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز
[3]گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۲۶ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۳۹۹/۰۸/۳۰

چکیده: در این مقاله با استفاده از خانواده توزیع‌های مارشال–اولکین–ناداراجه تعمیم یافته وایبل، توزیع‌های نمایی، وایبل اصلاح شده و گمپرتز را بدست آورده تابع بقا، تابع چگالی و تابع مخاطره رآن‌ها تعیین شده است. سپس الگویی برای شبیه‌سازی از توزیع‌ها ارائه گردیده است. برای حالت نمایی نیز تحت تابع زیان‌های توان دوم خطا، آنتروپی، توان دوم خطای لگاریتمی و لاینکس اصلاح شده پارامترها به روش بیزی برآورد شده‌اند. در انتها توزیع‌های ارائه شده به داده‌های واقعی برازانده شده است.
واژه‌های کلیدی: توزیع مارشال–اولکین، وایبل تعمیم‌یافته، آمار بیزی، تابع بقاء، تابع مخاطره، تابع چگالی.

واژه‌های کلیدی: توزیع مارشال–اولکین، وایبل تعمیم‌یافته، آمار بیزی، تابع بقاء، تابع مخاطره.

۱ مقدمه

مارشال (۱۹۹۷) توزیع‌های طول عمر را با توزیع هندسی بریده در صفر ترکیب کردند و به خانواده توزیع‌های

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: بهرام طارمی، tarami@shirazu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E05 62C10 62F15. .

مارشال اولکین دست یافتند. آن‌ها با استفاده از $\overline{F}(x)$ (تابع بقاء) خانواده جدیدی از توزیع‌ها را به صورت

$$\overline{G}(x;a) = \frac{a\overline{F}(x)}{F(x) + a\overline{F}(x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ a > 0, \tag{1}$$

معرفی کردند. یک خاصیت جالب این توزیع این است که اگر متغیر تصادفی Nدارای توزیع هندسی با پارامتر α و تابع جرم احتمال

$$\mathrm{P}(N = n) = \alpha(1 - \alpha)^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha \in (0, 1)$$

آنگاه $U_n = \min(X_1, \ldots, X_N)$ دارای تابع بقاء (۱) خواهد بود و اگر

$$\mathrm{P}(N = n) = \alpha^{-1}(1 - \alpha^{-1})^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots, \quad \alpha > 1$$

باشد، آنگاه $V_N = \max(X_1, \ldots, X_N)$ دارای تابع بقاء (۱) است. ناداراجه و همکارانش (۲۰۱۲) با استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی بریده در صفر، یک خانواده جدید از توابع بقاء به صورت

$$\overline{G}(x;a,b) = \frac{a^b}{1 - a^b}\left[\left(F(x) + a\overline{F}(x)\right)^{-b} - 1\right],\ x \in \mathbb{R},\ a, b > 0$$

معرفی کردند و بدینوسیله یک پارامتر به توزیع مارشال اولکین اضافه کردند. توجه شود که اگر $a \to 1$ آنگاه $\overline{G}(x;a,b) \to \overline{F}(x)$ و اگر $b \to 1$ آنگاه $\overline{G}(x;a,b)$ به تابع بقاء مارشال–اولکین میل می‌کند. تابع توزیع، تابع چگالی احتمال و تابع مخاطره این توزیع به ترتیب به صورت

$$G(x;a,b) = \frac{[1 - \overline{F}(x)\overline{a}]^b - a^b}{[1 - \overline{F}(x)\overline{a}]^b(1 - a^b)},$$

$$g(x;a,b) = \frac{\overline{a}ba^b f(x)}{[1 - \overline{F}(x)\overline{a}]^{b+1}(1 - a^b)},$$

$$r_G(x;a,b) = \frac{\overline{a}b\overline{F}(x)r_F(x)}{[1 - \overline{F}(x)\overline{a}][1 - (F(x) + a\overline{F}(x))^b]},$$

هستند، که در آن $\overline{a} = 1 - a$، $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ و $r_F(x)$ تابع مخاطره X است. با بررسی شکل $r_G(x;a,b)/r_F(x)$، واضح است که هرگاه $0 < a < 1$ باشد، آنگاه این تابع نزول می‌کند. همچنین $\frac{b\overline{a}}{a(1-a^b)} \leq \frac{r_G(x;a,b)}{r_F(x)} \leq 1$. از طرف دیگر، به ازای $a > 1$ این تابع صعود می‌کند و $1 \leq \frac{r_G(x;a,b)}{r_F(x)} \leq \frac{b\overline{a}}{a(1-a^b)}$. لازم به توضیح است که

$$\lim_{x\to-\infty} r_G(x;a,b) = \frac{b\overline{a}}{a(1-a^b)} \lim_{x\to-\infty} r_F(x),$$

$$\lim_{x\to\infty} r_G(x;a,b) = \lim_{x\to\infty} r_F(x).$$

سانتوز-نتو و همکارانش (۲۰۱۴) برای توزیع مارشال-اولکین پارامترهایی مانند گشتاورها، توابع مولد گشتاور، تابع چندکی، تابع مولد اعداد تصادفی، میانگین انحراف‌ها و متوسط زمان زندگی را بدست آوردند و مطالبی در مورد اندازه‌های نظریه اطلاع و فاصله واگرایی ارائه کردند. کلاس وایبل تعمیم‌یافته که توسط گورویچ و همکارانش (۱۹۹۷) به صورت

$$F(x;\alpha,\boldsymbol{\xi}) = 1 - \exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})],\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^+,\ \alpha > 0, \qquad (2)$$

معرفی شد، در مدل‌های زندگی و بقاء مورد استفاده قرار گرفته است. رابطه (۲) برای حالت خاص $H(x;\boldsymbol{\xi}) = x$ به توزیع نمایی، برای $H(x;\boldsymbol{\xi}) = x^2$ به توزیع ریلی، برای $H(x;\boldsymbol{\xi}) = \log(\frac{x}{k})$ به توزیع پارتو و برای $H(x;\boldsymbol{\xi}) = \beta^{-1}[\exp(\beta x) - 1]$ به توزیع گمپرتز تبدیل می‌شود. در بخش ۲ خانواده وایبل تعمیم‌یافته که توسط گورویچ و همکارانش معرفی شده است، پرداخته می‌شود. بخش ۳ در مورد خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین-نادارا‌جه تعمیم‌یافته وایبل بحث می‌کند. در بخش ۴ به برآوردیابی پارامترها می‌پردازیم. در بخش ۵ خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین-نادارا‌جه نمایی و شبیه‌سازی، آمار بیزی آن مورد مطالعه قرار گرفته است. بخش‌های ۶ و ۷ به ترتیب به خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح‌شده و خانواده توزیع‌های گمپرتز می‌پردازند. در بخش ۸ به داده‌های واقعی پرداخته شده و در بخش ۹ بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ خانواده وایبل تعمیم‌یافته

کلاس توزیع‌های وایبل تعمیم‌یافته که توسط گورویچ و همکارانش (۱۹۹۷) معرفی شده است موقعیتی شاخص در مدل‌های طول زندگی بدست آورده‌اند. تابع توزیع تجمعی این مدل‌ها به صورت (۲) است که در آن، $H(x;\boldsymbol{\xi})$ یک تابع صعودی غیر منفی است که به بردار پارامتری $\boldsymbol{\xi}$ بستگی دارد. تابع چگالی و تابع بقاء آن به ترتیب به صورت

$$f(x;\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \alpha h(x;\boldsymbol{\xi})\exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})],$$
$$\bar{F}(x;\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})]$$

هستند، که در آن $h(x;\boldsymbol{\xi})$ مشتق $H(x;\boldsymbol{\xi})$ است. در این مقاله خانواده جدیدی از توزیع‌ها توسط ترکیب کلاس مارشال–اولکین–ناداراجه و کلاس وایبل نمایی بدست آوره می‌شود. خانواده توزیع‌های مارشال–اولکین–ناداراجه تعمیم‌یافته وایبل (مانتیو) شامل مدل‌های خاصی می‌شوند که در سانتوز–نتو و همکارانش (۲۰۱۴) با توابع $H(\cdot;\cdot)$ و $h(\cdot;\cdot)$ آورده شده‌اند.

۳ خانواده توزیع‌های مانتیو

تابع توزیع این خانواده به صورت

$$G(x;a,b,\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \frac{[1-\bar{a}\exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})]]^b - a^b}{(1-a^b)[1-\bar{a}\exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})]]^b}, \qquad (۳)$$

مشخص می‌شود، که در آن $x \in D \subseteq \mathbb{R}^+,\ a, b, \alpha > 0$. تابع بقاء، تابع چگالی و تابع مخاطره به ترتیب به صورت

$$\overline{G}(x; a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \frac{a^b - a^b[1 - \overline{a}\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]]^b}{(1 - a^b)[1 - \overline{a}\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]]^b}, \tag{۴}$$

$$g(x; a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \frac{a^b b\bar{a}\alpha h(x; \boldsymbol{\xi})\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]}{(1 - a^b)[1 - \bar{a}\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]]^{b+1}}, \tag{۵}$$

$$r_G(x; a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \frac{b\overline{a}\alpha h(x; \boldsymbol{\xi})\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]}{(1 - \overline{a}\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})])(1 - [1 - \overline{a}\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]]^b)}, \tag{۶}$$

تعیین می‌شوند. برای عدد حقیقی و مثبت r و $|z| < 1$، بسط دوجمله‌ای تعمیم‌یافته به صورت

$$(1 - z)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(r)_k}{k!} z^k, \tag{۷}$$

است، که در آن $(r)_k = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} = r(r+1)\cdots(r+k-1)$ و $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما هستند. بنابراین بسط دوجمله‌ای تعمیم‌یافته تابع چگالی (۵)، برای $0 < a < 1$ به صورت

$$g(x; a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j f(x, (j+1)\alpha, \boldsymbol{\xi}) \tag{۸}$$

است، که در آن $\eta_j = \frac{(b+1)_j}{(j+1)!} a^b b\overline{a}^{j+1}$ و $f(x, (j+1)\alpha, \boldsymbol{\xi})$ تابع چگالی وایبل تعمیم‌یافته با پارامترهای $(j+1)\alpha$ و $\boldsymbol{\xi}$ است. حال برای $a > 1$ داریم

$$g(x; a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \frac{a^b b\bar{a}\alpha h(x; \boldsymbol{\xi})\exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]}{(1 - a^b)a^{b+1}(1 - (1 - \frac{1}{a})\{1 - \exp[-\alpha H(x; \boldsymbol{\xi})]\})^{b+1}}. \tag{۹}$$

در این حالت می‌توان نشان داد $(1-\frac{1}{a})(1-\exp[-\alpha H(x;\boldsymbol{\xi})]) < 1$. با دو بار استفاده از (۷) در معادله (۹) داریم

$$g(x;a,b,\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_j f(x,(j+1)\alpha,\boldsymbol{\xi}) \qquad (10)$$

که در آن $\nu_j = \frac{(-1)^j b\overline{a}}{(j+1)!(1-a^b)^a}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{(b+1)_k}{(k-j)!}(1-\frac{1}{a})^k$. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، معادلات (۸) و (۱۰) بجز در ضرایب η_j و ν_j، فرم یکسانی دارند. با ترکیب این دو رابطهف تابع $g(x;a,b,\alpha,\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j f(x,(j+1)\alpha,\boldsymbol{\xi})$ به دست می‌آید، که در آن

$$w_j = \begin{cases} \eta_j, & 0 < a < 1 \\ \nu_j, & a > 1 \end{cases}$$

این بدین معناست که تابع چگالی توزیع‌های مانیتو می‌تواند بصورت ترکیب خطی بی‌نهایت تابع چگالی‌های وایبل تعمیم‌یافته نوشته شود. مقدار q-اُمین تابع چندکی X با معکوس کردن معادله (۳) به صورت

$$Q(u) = H^{-1}\Big(\frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{a}[1-u(1-a^b)]}{[1-u(1-a^b)]^{\frac{1}{b}}-a}\Big)$$

بدست می‌آید. سانتوز-نتو و همکارانش (۲۰۱۴) چند تابع خاص برای $H^{-1}(x;\boldsymbol{\xi})$ ارائه کردند. بنابراین برای تولید عدد تصادفی از توزیع X، الگوریتم زیر قابل استفاده است.

الگوریتم ۱. تولید اعداد تصادفی برای توزیع‌های مانیتوپپ

گام ۱: عدد تصادفی U از توزیع $U(0,1)$ تولید شود.
گام ۲: مقدار $Q(u) = H^{-1}\big(\frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{a}[1-u(1-a^b)]}{[1-u(1-a^b)]^{\frac{1}{b}}-a}\big)$ محاسبه شود.
گام ۳: با استفاده از معادله $x = Q(u)$، مقدار x تعیین شود.

۴ برآورد پارامترهای توزیع‌های مانتیو

اگر $X_1, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از این توزیع باشد، تابع درستنمایی $\boldsymbol{\theta} = (a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}^T)^T$ بصورت

$$L(a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) = \frac{a^{nb} b^n \overline{a}^n \alpha^n \prod_{i=1}^n h(x_i; \boldsymbol{\xi}) \exp[-\alpha \sum_{i=1}^n H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}{(1 - a^b)^n \prod_{i=1}^n [1 - \bar{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]]^{b+1}}$$

و لگاریتم آن نیز بصورت

$$\begin{aligned}\ell(a, b, \alpha, \boldsymbol{\xi}) &= nb \log a + n \log b + n \log \bar{a} + n \log \alpha + \sum_{i=1}^n \log h(x_i; \boldsymbol{\xi}) \\ &- \alpha \sum_{i=1}^n H(x_i; \boldsymbol{\xi}) - n \log(1 - a^b) - \sum_{i=1}^n (b+1) \log[1 - \bar{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]]\end{aligned}$$

هستند. مشتق‌های جزئی لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامترهای توزیع عبارتند از

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{nb}{a} - \frac{n}{\overline{a}} + \frac{nba^{b-1}}{1 - a} - \sum_{i=1}^n (b+1) \frac{\exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}{1 - \overline{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = n \log a + \frac{n}{b} + \frac{na^b \log a}{1 - a^b} - \sum_{i=1}^n \log[1 - \overline{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]]$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n H(x_i; \boldsymbol{\xi}) - \sum_{i=1}^n (b+1) \frac{\overline{a} H(x_i, \boldsymbol{\xi}) \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}{1 - \overline{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \xi_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial h(x_i; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k}}{h(x_i; \boldsymbol{\xi})} - \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x_i; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} - \sum_{i=1}^n (b+1) \frac{\overline{a} \alpha \frac{\partial H(x_i; \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]}{[1 - \overline{a} \exp[-\alpha H(x_i; \boldsymbol{\xi})]]}$$

بر اساس مشتق‌های مرتبه دوم، ماتریس اطلاعات افراز شده برای خانواده توزیع‌های مانتیو به صورت

$$I(\theta)=\left(\begin{array}{ccc|c}
\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial a^{۲}} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial a\partial b} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial a\partial\alpha} & (\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial a\partial\boldsymbol{\xi}})^T\\
\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial b\partial a} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial b^{۲}} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial b\partial\alpha} & (\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial b\partial\boldsymbol{\xi}})^T\\
\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\alpha\partial a} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\alpha\partial b} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\alpha^{۲}} & (\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\alpha\partial\boldsymbol{\xi}})^T\\
\hline
\dfrac{\partial^{۲}\ell}{\boldsymbol{\xi}\partial a} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\boldsymbol{\xi}\partial b} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\boldsymbol{\xi}\partial\alpha} & \dfrac{\partial^{۲}\ell}{\partial\boldsymbol{\xi}\partial\boldsymbol{\xi}}
\end{array}\right)$$

حاصل می‌شود. اگر شرایط منظم برقرار باشند کاکس (۱۹۶۲) ثابت کردند $\sqrt{n}([\hat{a},\hat{b},\hat{\alpha},\hat{\boldsymbol{\xi}}]^T-[a,b,\alpha,\boldsymbol{\xi}]^T)$ در توزیع، به نرمال چند متغیره $\mathcal{N}_{P+۳}(0,K[\hat{a},\hat{b},\hat{\alpha},\hat{\boldsymbol{\xi}}]^{-۱})$ همگرا است، که در آن p بعد بردار $\boldsymbol{\xi}$ و $K[\hat{a},\hat{b},\hat{\alpha},\hat{\boldsymbol{\xi}}]$ امید ریاضی ماتریس اطلاعات است که برای آن رابطه حدی $\lim_{n\to\infty}I_n[a,b,\alpha,\boldsymbol{\xi}]=K[\hat{a},\hat{b},\hat{\alpha},\hat{\boldsymbol{\xi}}]$ برقرار است. بر اساس نتیجه حاصل می‌توان ناحیه اطمینان را برای پارامترهای توزیع‌های مانتیو بدست آورد.

۵ خانواده توزیع‌های مارشال - اولکین - ناداراجه نمایی (مانن)

در این خانواده از توزیع‌ها، $H(x;\boldsymbol{\xi})=x$ و $h(x;\boldsymbol{\xi})=۱$ است. براساس روابط (۳)، (۴)، (۵) و (۶) تابع توزیع، تابع بقا، تابع چگالی و تابع مخاطره برای $x\in D\subseteq\mathbb{R}^+$ به ترتیب عبارتند از

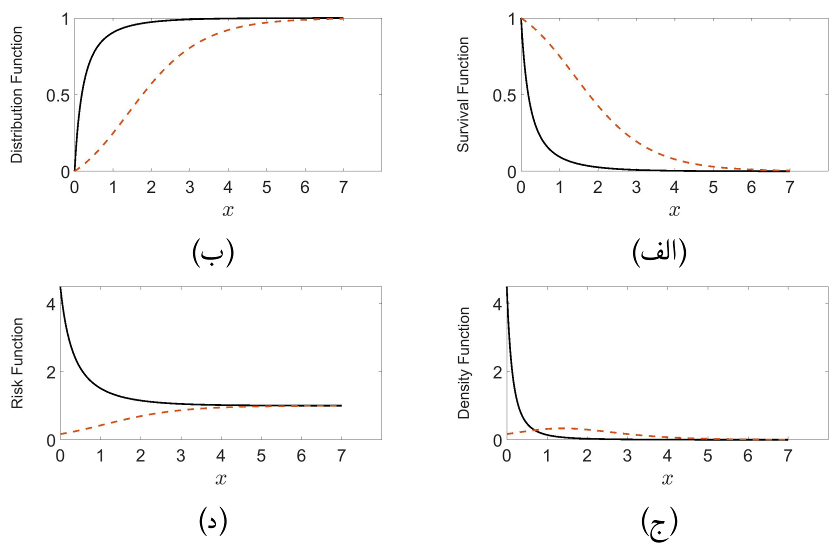
$$G(x;a,b,\alpha)=\frac{[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^b-a^b}{(۱-a^b)[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^b},$$

$$\overline{G}(x;a,b,\alpha)=\frac{a^b-a^b[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^b}{(۱-a^b)[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^b},$$

$$g(x;a,b,\alpha)=\frac{a^b b\overline{a}\alpha\exp[-\alpha x]}{(۱-a^b)[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^{b+۱}},$$

$$r_G(x;a,b,\alpha)=\frac{b\overline{a}\alpha\exp[-\alpha x]}{[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]\{۱-[۱-\overline{a}\exp[-\alpha x]]^b\}}.$$

در شکل ۱، نمودارهای تابع توزیع، تابع بقا، تابع چگالی و تابع مخاطره برای دو حالت $a = \frac{1}{3}, b = 2, \alpha = 1$ (نمودارهای سیاه) و $a = 3, b = 2, \alpha = 1$ (نمودارهای سبز) آورده شده است. قابل ذکر است که ناداراجه و همکارانش (۲۰۱۲)، شکل تابع چگالی، تابع مخاطره، گشتاورها، آماره‌های ترتیبی، آنتروپی رنیی وشانون، برآورد ماکسیمم درستنمایی و کاربرد داده‌ها را بدست آوردند. در اینجا به شبیه‌سازی داده‌های مانن و برآورد بیزی تحت توابع زیان مختلف پرداخته می‌شود. برای شبیه‌سازی از الگوریتم ۱

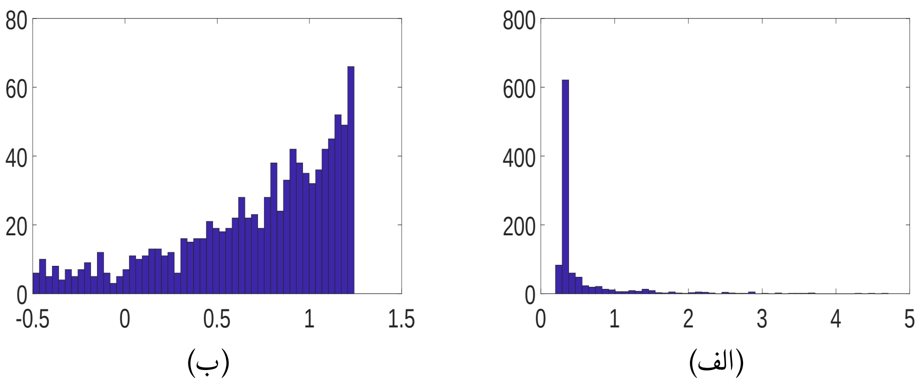


شکل ۱. الف- تابع بقا، ب- تابع توزیع، ج- تابع چگالی و د- تابع مخاطره خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین-نادارجه نمایی برای دو حالت $a = \frac{1}{3}, b = 2, \alpha = 1$ (نمودارهای سیاه) و $a = 3, b = 2, \alpha = 1$ (نمودارهای خط چین)

استفاده می‌شود. در اینجا $H^{-1}(x) = x$ است. بنابراین

$$X = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\overline{a}[1 - U(1 - a^b)]}{[1 - U(1 - a^b)]^{\frac{1}{b}} - a}$$

که در آن U دارای توزیع یکنواخت روی بازه $(0, 1)$ است. در اینجا برآورد بیزی تحت توابع زیان توان دوم خطا، آنتروپی، توان دوم خطای لگاریتمی و لاینکس اصلاح شده ارائه گردیده است. یک انتخاب طبیعی برای توزیع پیشین a، b و λ می‌تواند سه توزیع گامای مستقل باشد. در اینجا توزیع پیشین این سه پارامتر را به ترتیب $Gamma(\alpha, \beta)$، $Gamma(\theta, \gamma)$ و $Gamma(\eta, \varepsilon)$ قرار داده می‌شود. بنابراین تابع



شکل ۲. شبیه‌سازی الف- توزیع‌های مانن به ازای $\alpha = ۱$، $b = ۲$ و $a = \frac{۱}{۲}$، و ب- توزیع‌های مانن به ازای $\alpha = ۱$، $b = ۲$ و $a = ۳$.

چگالی احتمال توام پیشین پارامترهای a، b و λ به صورت

$$f_{\alpha,\beta,\theta,\gamma,\eta,\varepsilon}(a,b,\lambda) \propto a^{\alpha-۱}b^{\theta-۱}\lambda^{\eta-۱}e^{-a\beta-b\gamma-\lambda\varepsilon}, \quad \alpha,\beta,\theta,\gamma,\eta,\varepsilon,a,b,\lambda \geq ۰$$

است. بنابراین تابع چگالی پسین a، b و λ به صورت

$$\begin{aligned} f(a,b,\lambda|x) = ka^{\alpha-۱}b^{\theta-۱}\lambda^{\eta-۱}e^{-a\beta-b\gamma-\lambda\varepsilon}\frac{a^{nb}b^n\bar{a}^n\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=۱}^n x_i}}{(۱-a^b)^n} \\ \times\prod_{i=۱}^n[۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a}]^{-(b+۱)} \end{aligned}$$

است، که در آن

$$\begin{aligned} k^{-۱} = \int_a\int_b\int_\lambda a^{\alpha-۱}b^{\theta-۱}\lambda^{\eta-۱}e^{-a\beta-b\gamma-\lambda\varepsilon}\frac{a^{nb}b^n\bar{a}^n\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=۱}^n x_i}}{(۱-a^b)^n} \\ \times\prod_{i=۱}^n[۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a}]^{-(b+۱)}d\lambda db da. \end{aligned}$$

تابع چگالی پسین دارای یک انتگرال در مخرج کسر است که به راحتی قابل حل نیست. بنابراین پارامترهای آماره‌های بیز دارای فرم صریح نیستند. در اینجا از روش لیندلی برای تقریب این انتگرال

استفاده می‌شود. لیندلی (۱۹۸۰) نشان داد نسبت دو انتگرال $\frac{\int w(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}{\int \nu(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}$ را می‌توان طوری تقریب زد که قسمت حذف شده از مرتبه $o(n^{-۲})$ و قسمت اصلی که برای تقریب استفاده می‌شود، $o(n^{-۱})$ باشد. در این نسبت انتگرالی $\boldsymbol{\theta} = (\theta_۱, \dots, \theta_m)$ پارامتر و $L(\boldsymbol{\theta})$ لگاریتم تابع درستنمایی به صورت $L(\boldsymbol{\theta}) = \sum \log p(x_i|\boldsymbol{\theta})$ است و $x_۱, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی از چگالی $p(\cdot|\boldsymbol{\theta})$ است. در کاربرد باید $\nu(\boldsymbol{\theta}) = \pi(\boldsymbol{\theta})$ قرار داده شود که $\pi(\boldsymbol{\theta})$ تابع چگالی پیشین $\boldsymbol{\theta}$ است. بنابراین مخرج نسبت انتگرالی، ثابت نرمال کننده در نظریه بیز است و $w(\boldsymbol{\theta}) = u(\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})$ است بطوریکه نسبت انتگرالی برابر $E(u(\boldsymbol{\theta})|x_۱, \dots, x_n)$ می‌شود. با قرار دادن $\rho(\boldsymbol{\theta}) = \log \pi(\boldsymbol{\theta})$ نسبت انتگرالی بصورت $\frac{\int u(\boldsymbol{\theta})e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}{\int e^{L(\boldsymbol{\theta})+\rho(\boldsymbol{\theta})}d\boldsymbol{\theta}}$ تبدیل می‌شود. نسبت انتگرالی جدید توسط لیندلی بصورت $\hat{u} + \frac{۱}{۲}\sum(\hat{u}_{ij} + ۲\hat{u}_i\hat{\rho}_i)\hat{\sigma}_{ij} + \frac{۱}{۲}\sum \hat{L}_{ijk}\hat{u}_l\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl}$ تقریب زده شد، که در آن جمله اول $o(۱)$، بقیه جملات $o(n^{-۱})$ هستند و

$$\hat{u} = u(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \qquad \hat{g}_i = g_i(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial g}{\partial \theta_i}|_{\theta=\hat{\theta}},$$

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial^۲ g}{\partial \theta_i \partial \theta_j}|_{\theta=\hat{\theta}} \qquad \hat{g}_{ijk} = g_{ijk}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\partial^۳ g}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}|_{\theta=\hat{\theta}},$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\theta}_۱, \dots, \hat{\theta}_m\right)$ برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ و $\hat{\sigma}_{ij} = (-\hat{L}_{ij})^{-۱}$ است. در مساله ما $m = ۳$، $\theta_۱ = a$، $\theta_۲ = b$ و $\theta_۳ = \lambda$ است. بنابراین

$$I(x) = E(u(a,b,\lambda)|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = \frac{\int u(a,b,\lambda)e^{L(a,b,\lambda)+\rho(a,b,\lambda)}dadbd\lambda}{\int e^{L(a,b,\lambda)+\rho(a,b,\lambda)}dadbd\lambda}$$

از آنجا که در این مسئله a، b و λ مستقل‌اند، پس $\hat{\sigma}_{ab} = \hat{\sigma}_{a\lambda} = \hat{\sigma}_{b\lambda} = ۰$. این تقریب را می‌توان به صورت $\hat{u} + \frac{۱}{۲}\sum(\hat{u}_{ii} + ۲\hat{u}_i\hat{\rho}_i)\hat{\sigma}_{ii} + \frac{۱}{۲}\sum \hat{L}_{iik}\hat{u}_k\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{kk}$ تقلیل داد. حال بنابر تقریب لیندلی

داریم

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}) =& u\big(\hat{a},\hat{b},\hat{\lambda}\big)+\frac{۱}{۲}[(\hat{u}_{aa}+۲\hat{u}_a\hat{\rho}_a)\hat{\sigma}_{aa}+(\hat{u}_{bb}+۲\hat{u}_b\hat{\rho}_b)\hat{\sigma}_{bb}(\hat{u}_{\lambda\lambda}+۲\hat{u}_\lambda\hat{\rho}_\lambda)\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}] \\ &+\frac{۱}{۲}[\hat{u}_a(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{aa}). \\ &+\hat{u}_b(\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{bb}) \\ &+.\hat{u}_\lambda(\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})] \end{aligned}$$

برآورد بیزی θ تحت تابع زیان توان دوم خطا $L_s=k(\hat{\theta}-\theta)^۲$ برابر میانگین پسین $\hat{\theta}_s=E(\theta|\mathbf{x})$، تحت تابع زیان آنتروپی $L_E=\frac{\hat{\theta}}{\theta}-\ln\frac{\hat{\theta}}{\theta}-۱$ به صورت $\hat{\theta}_E=\frac{۱}{E(\frac{۱}{\theta}|x)}$، تحت تابع زیان توان دوم خطای لگاریتمی $L_{Sl}=(\ln\hat{\theta}-\ln\theta)^۲$ به صورت $\hat{\theta}_{Sl}=e^{E(\ln\theta|x)}$، و تحت تابع زیان لاینکس اصلاح شده $L_{mL}=e^{(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-۱)}-\big(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-۱\big)-۱$ به صورت $E(\frac{۱}{\theta}e^{\frac{\hat{\theta}_{mL}}{\theta}}\big|x)=\exp E(\frac{۱}{\theta}\big|x)$ بدست می آید. با توجه به اینکه تحت این زیان فرم صریحی قابل محاسبه نیست، برآورد بیزی از معادله اخیر به دست می آید (جدول ۱). بنابراین برآورد بیزی a، b و λ تحت توان دوم خطا به شرح زیرند.پپ برای $u(a,b,\lambda)=a$ داریم

$$\begin{aligned} E(a|x)&=\hat{a}+\hat{\rho}_a\hat{\sigma}_{aa}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{aa}(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})], \\ E(b|x)&=\hat{b}+\hat{\rho}_b\hat{\sigma}_{bb}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{bb}(\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})], \\ E(\lambda|x)&=\hat{\lambda}+\hat{\rho}_\lambda\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}(\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb})]. \end{aligned}$$

به همین ترتیب برآورد بیزی a، b و λ تحت تابع زیان‌های آنتروپی و توان دوم خطای لگاریتمی در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با توجه به $\rho(a,b,\lambda)=(\alpha-۱)\log a+(\theta-۱)\log b+(\eta-۱)\log\lambda-a\beta-b\gamma-\lambda\varepsilon$ داریم:

$$\rho_a=\frac{\partial\rho}{\partial a}=\frac{\alpha-۱}{a}-\beta,\quad \rho_b=\frac{\partial\rho}{\partial b}=\frac{\theta-۱}{b}-\gamma,\quad \rho_\lambda=\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}=\frac{\eta-۱}{\lambda}-\varepsilon.$$

جدول ۱. برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان‌های مختلف

تابع زیان	پارامتر	برآورد
توان دوم خطا	a	$\hat{a}+\hat{\rho}_a\hat{\sigma}_{aa}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{aa}(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]$
	b	$\hat{b}+\hat{\rho}_b\hat{\sigma}_{bb}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{bb}(\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]$
	λ	$\hat{\lambda}+\hat{\rho}_\lambda\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\frac{۱}{۲}[\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}(\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb})]$
آنتروپی	a	$\hat{a}[۱+(\frac{۱}{\hat{a}^۲}-\frac{۱}{\hat{a}}\hat{\rho}_a)\hat{\sigma}_{aa}-\frac{۱}{۲\hat{a}}\hat{\sigma}_{aa}(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]^{-۱}$
	b	$\hat{b}[۱+(\frac{۱}{\hat{b}^۲}-\frac{۱}{\hat{b}}\hat{\rho}_b)\hat{\sigma}_{bb}-\frac{۱}{۲\hat{b}}\hat{\sigma}_{bb}(\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]^{-۱}$
	λ	$\hat{\lambda}[[۱+(\frac{۱}{\hat{\lambda}^۲}-\frac{۱}{\hat{\lambda}}\hat{\rho}_\lambda)\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}-\frac{۱}{۲\hat{\lambda}}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}(\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb})]^{-۱}$
توان دوم خطای لگاریتمی	a	$\hat{a}e^{\frac{۱}{۲\hat{a}}[(-\frac{۱}{\hat{a}}+۲\hat{\rho}_a)\hat{\sigma}_{aa}+\hat{\sigma}_{aa}(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]}$
	b	$\hat{b}e^{\frac{۱}{۲\hat{b}}[(-\frac{۱}{\hat{b}}+۲\hat{\rho}_b)\hat{\sigma}_{bb}+\hat{\sigma}_{bb}(\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})]}$
	λ	$\hat{\lambda}e^{\frac{۱}{۲\hat{\lambda}}[(-\frac{۱}{\hat{\lambda}}+۲\hat{\rho}_\lambda)\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}(\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb})]}$
لاینکس اصلاح شده	a	$\exp(\frac{۱}{\hat{a}}[۱+\frac{۱}{\hat{a}}(\frac{۱}{\hat{a}}-\hat{\rho}_a)\hat{\sigma}_{aa}-\frac{۱}{۲\hat{a}}\hat{\sigma}_{aa}(\hat{L}_{aaa}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bba}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{\lambda\lambda a}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})])$
	b	$\exp(\frac{۱}{\hat{b}}[۱+\frac{۱}{\hat{b}}(\frac{۱}{\hat{b}}-\hat{\rho}_b)\hat{\sigma}_{bb}-\frac{۱}{۲\hat{b}}\hat{\sigma}_{bb}(\hat{L}_{bbb}\hat{\sigma}_{bb}+\hat{L}_{aab}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{\lambda\lambda b}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda})])$
	λ	$\exp(\frac{۱}{\hat{\lambda}}[۱+\frac{۱}{\hat{\lambda}}(\frac{۱}{\hat{\lambda}}-\hat{\rho}_\lambda)\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}-\frac{۱}{۲\hat{\lambda}}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}(\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda}\hat{\sigma}_{\lambda\lambda}+\hat{L}_{aa\lambda}\hat{\sigma}_{aa}+\hat{L}_{bb\lambda}\hat{\sigma}_{bb})])$

همچنین $\hat{\sigma}_{ii}=-\frac{۱}{L_{ii}},\quad i=a,b,\lambda$ هستند. از طرفی لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}L(\mathbf{x}|a,b,\lambda)=&nb\log a+n\log b+n\log\bar{a}+n\log\lambda-\lambda\sum_{i=۱}^{n}x_i\\&-n\log(۱-a^b)-(b+۱)\sum_{i=۱}^{n}\log[۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a}]\end{aligned}$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{aaa} =& \frac{(nb(b-۱)(b-۲)a^{b-۳} + nb(b-۱)(b+۴)a^{۲b-۳} + ۲nba^{۳b-۳})}{(۱-a^b)^۳} + \frac{۲nb}{a^۳} \\
&- \frac{۲n}{\bar{a}^۳} - (b+۱)\sum_{i=۱}^{n} \frac{۲e^{-۳\lambda x_i}}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۳}, \\
\hat{L}_{bbb} =& \frac{۲n}{b^۳} + \frac{na^b(\log a)^۳(۱+a^b)}{(۱-a^b)^۳}, \\
\hat{L}_{\lambda\lambda\lambda} =& \frac{۲n}{\lambda^۳} - (b+۱)\sum_{i=۱}^{n} \frac{\bar{a}x_i^۳ e^{-\lambda x_i}(۱+e^{-\lambda x_i}\bar{a})}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۳}, \\
\hat{L}_{bba} =& \frac{nba^{b-۱}(\log a)^۲(۱+a) + ۲na^{b-۱}(\log a)(۱-a)}{(۱-a^b)^۳}, \\
\hat{L}_{\lambda\lambda b} =& \sum_{i=۱}^{n} \frac{\bar{a}x_i^۲ e^{-\lambda x_i}}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۲}, \\
\hat{L}_{bb\lambda} =& ۰, \\
\hat{L}_{aa\lambda} =& -(b+۱)\sum_{i=۱}^{n} \frac{۲x_i e^{-۲\lambda x_i}}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۳},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{\lambda\lambda a} =& -(b+۱)\sum_{i=۱}^{n} \frac{x_i^۲ e^{-\lambda x_i}(۱+e^{-\lambda x_i}\bar{a})}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۳}, \\
\hat{L}_{aab} =& \frac{n(۲b-۱)a^{b-۲} + nb(b-۱)a^{b-۲}(\log a) - ۲n(b-۱)a^{۲b-۲}}{(۱-a^b)^۳} \\
&+ \frac{nb(b+۱)a^{۲b-۲}(\log a) + na^{۳b-۲}}{(۱-a^b)^۳} - \frac{n}{a^۲} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{e^{-۲\lambda x_i}}{(۱-e^{-\lambda x_i}\bar{a})^۲}.
\end{aligned}$$

برآورد بیزی پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی با استفاده از نرم افزار R محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده است. در اینجا $n = ۱۰۰۰$، $a = ۲$، $b = ۱$ و $\lambda = ۱$ در نظر گرفته شداند.

جدول ۲. پارامترها برای تشکیل بازه اطمینان بیزی

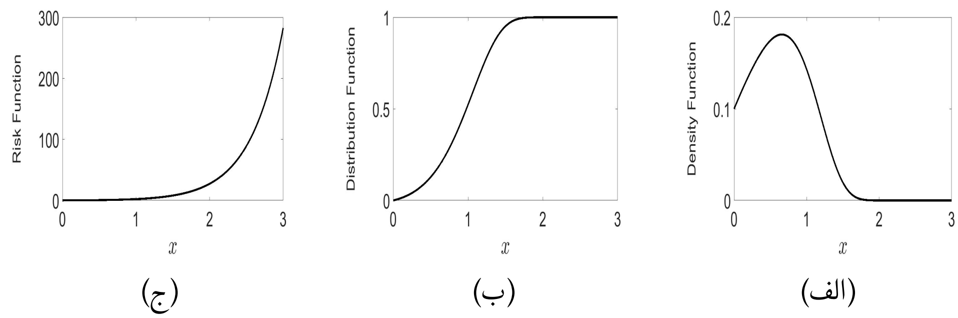
تابع زیان	پارامتر	برآورد	SSE
توان دوم خطا	a	۲/۴۸	۱/۶۳
	b	۲/۱۲	۴/۶۲
	λ	۱/۰۱	۰/۰۰۱
آنتروپی	a	۲/۴۰	۱/۴۴
	b	۱/۹۷	۴/۰۴
	λ	۱/۰۱	۰/۰۰۱
توان دوم خطای لگاریتمی	a	۲/۴۱	۱/۴۵
	b	۱/۹۸	۴/۰۵
	λ	۱/۰۱	۰/۰۰۱
لاینکس اصلاح شده	a	۱/۷۴	۰/۱۷
	b	۱/۰۰۲	۰/۰۰۱
	λ	۲/۷۰	۰/۰۳

۶ خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده

سه توزیع مهم از خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این خانواده از توزیع‌ها، $H(x;\lambda,\gamma)=x^{\gamma}\exp(\lambda x)$ و $h(x;\lambda,\gamma)=x^{\gamma-1}\exp(\lambda x)(\gamma+\lambda x)$ هستند.

الف- توزیع وایبل اصلاح شده گورویچ: تابع توزیع، تابع چگالی و تابع مخاطره به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}
G(x;\alpha,\lambda,\gamma) &= 1-\exp[-\alpha x^{\gamma}\exp(\lambda x)],\quad \alpha,\lambda,\gamma>0,\\
g(x;\alpha,\lambda,\gamma) &= \alpha x^{\gamma-1}(\gamma+\lambda x)\exp[\lambda x-\alpha x^{\gamma}\exp(\lambda x)],\\
r(x;\alpha,\lambda,\gamma) &= \frac{\alpha x^{\gamma-1}(\gamma+\lambda x)\exp[\lambda x-\alpha x^{\gamma}\exp(\lambda x)]}{\exp[-\alpha x^{\gamma}\exp(\lambda x)]}\\
&= \alpha x^{\gamma-1}(\gamma+\lambda x)\exp[\lambda x].
\end{aligned}$$

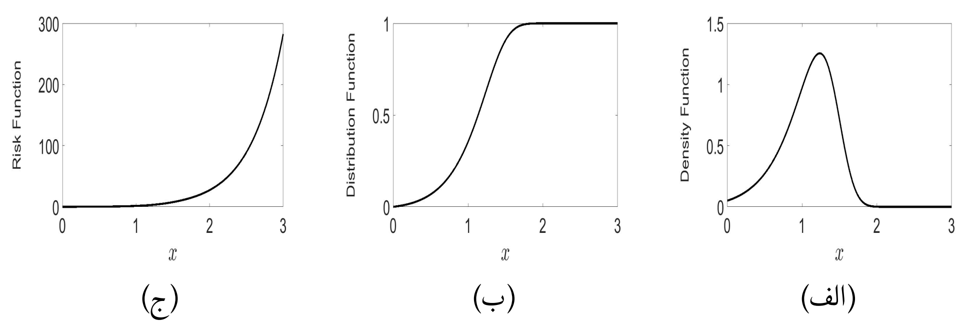


شکل ۳. الف- تابع چگالی ب- تابع توزیع و ج- تابع مخاطره خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده گورویچ به ازای $\alpha = ۰/۱,\ \lambda = ۲,\ \gamma = ۱$

ب- توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین: تابع توزیع، تابع چگالی و تابع مخاطره عبارتند از

$$
\begin{aligned}
G(x; a, \alpha, \lambda, \gamma) &= \frac{۱ - \exp[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)]}{۱ - \bar{a} \exp[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)]}, \quad a, \alpha, \lambda, \gamma > ۰, \\
g(x; a, \alpha, \lambda, \gamma) &= \frac{a \alpha x^{\gamma - ۱} (\gamma + \lambda x) \exp[\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)]}{(۱ - \bar{a} \exp[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)])^{۲}}, \\
r(x; a, \alpha, \lambda, \gamma) &= \frac{\alpha x^{\gamma - ۱} \exp(\lambda x)(\gamma + \lambda x)}{۱ - \bar{a} \exp[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)]}.
\end{aligned}
$$

ج- توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه: تابع چگالی، تابع توزیع و تابع نرخ مخاطره



شکل ۴. الف- تابع چگالی، ب- تابع توزیع و ج- تابع مخاطره توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین به ازای $a = ۲,\ \alpha = ۰/۱,\ \lambda = ۲,\ \gamma = ۱$.

این توزیع به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} g(x;a,b,\alpha,\lambda,\gamma) &= \frac{a^b b\bar{a}\alpha x^{\gamma-1}(\gamma+\lambda x)\exp[\lambda x-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]}{(1-a^b)[1-\bar{a}\exp[-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]]^{b+1}}, \quad \lambda,\gamma>0, \\ G(x;a,b,\alpha,\lambda,\gamma) &= \frac{1}{1-a^b}-\frac{a^b}{1-a^b}[1-\bar{a}\exp[-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]]^{-b}, \\ r(x;a,b,\alpha,\lambda,\gamma) &= \frac{b\bar{a}\alpha x^{\gamma-1}\exp(\lambda x)(\gamma+\lambda x)\exp[-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]}{[1-\bar{a}\exp[-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]]\{1-[1-\bar{a}\exp[-\alpha x^\gamma \exp(\lambda x)]]^b\}} \end{aligned}$$

این توزیع به نماد $\text{TPMOMW}(a,b,\alpha,\lambda,\gamma)$ نمایش داده می‌شود. r امین گشتاور این مدل به صورت $E(X^r)=\sum_{j=0}^{\infty} w_j \mu_r(j)$ است که در آن

$$w_j=\begin{cases}\eta_j, & 0<a<1\\ \nu_j, & a>1\end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu_r(j) &= \int_0^\infty x^r f(x;(j+1)\alpha,\lambda,\gamma)dx \\ &= \int_0^\infty x^r (j+1)\alpha x^{\gamma-1}\exp(\lambda x)(\gamma+\lambda x)\exp[-\alpha(j+1)x^\gamma \exp(\lambda x)]dx, \\ \eta_j &= \frac{(b+1)_j}{(j+1)!}a^b b\bar{a}^{j+1}, \qquad \nu_j=\frac{(-1)^j}{(j+1)!}\frac{b\bar{a}}{(1-a^b)^a}\sum_{k=j}^{\infty}\frac{(b+1)_k}{(k-j)!}\left(1-\frac{1}{a}\right)^k. \end{aligned}$$

کارراسکو و همکارانش (۲۰۰۸) یک نمایش از $\mu_r(j)$ را به صورت سری نامتناهی

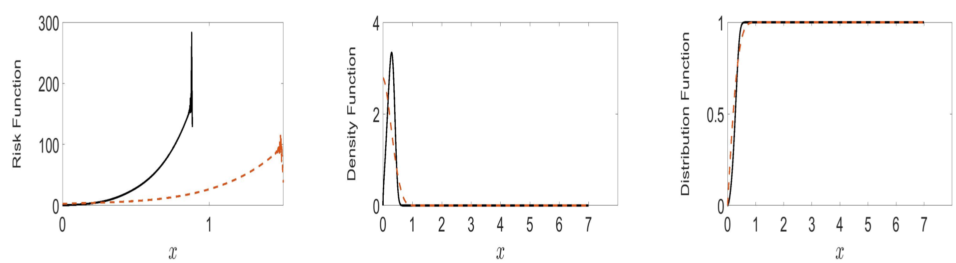
$$\mu_r(j)=\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{\infty}\frac{A_{i_1,\ldots,i_r}p(\frac{s_r}{\gamma}+1)}{[(j+1)\alpha]^{\frac{s_r}{\gamma}}}$$

ارائه دادند، که در آن $A_{i_1,\ldots,i_r}=a_{i_1}\cdots a_{i_r}$، $s_r=i_1,\ldots,i_r$ و $a_i=\frac{(-1)^{i+1}i^{i-2}}{(i-1)!}(\frac{\lambda}{\gamma})^{i-1}$ هستند. حال فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$، یک نمونه تصادفی از توزیع $\text{TPMOMW}(a,b,\alpha,\lambda,\gamma)$

باشند. لگاریتم تابع درستنمایی برای بردار پارامترهای $\theta = (a, b, \alpha, \lambda, \gamma)$ به صورت

$$\begin{aligned}\ell(\theta) =& nb\log a + n\log b + n\log\bar{a} + n\log\alpha - n\log(۱ - a^b)\\ &+ (\gamma - ۱)\sum_{i=۱}^{n}\log x_i + \lambda\sum_{i=۱}^{n} x_i + \sum_{i=۱}^{n}\log(\gamma + \lambda x_i)\\ &- \alpha\sum_{i=۱}^{n} x_i^{\gamma}\exp(\lambda x_i) - b\log[۱ - \bar{a}\exp[-\alpha x_i^{\gamma}\exp(\lambda x_i)]]\end{aligned}$$

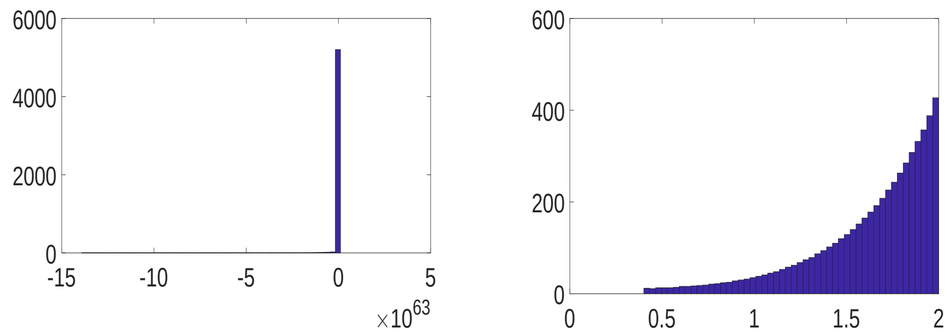
است. نمودارهای تابع چگالی و تابع مخاطره توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه به ازای دو حالت
$\mathrm{TPMOMW}(۲, ۰/۵, ۳, ۳, ۱/۵)$ و $\mathrm{TPMOMW}(۰/۵, ۱/۵, ۱/۲, ۲, ۱)$ در شکل ۵ نشان داده شده است. برای شبیه‌سازی داده‌های این توزیع از الگوریتم ۱ استفاده می‌شود. چون $H(x) = x^{\gamma}\exp(\lambda x)$



(ج) (ب) (الف)

شکل ۵. الف- تابع توزیع، ب- تابع چگالی و ج- تابع مخاطره خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه به ازای $a = ۲$، $b = ۰/۵$، $\alpha = ۳$، $\lambda = ۳$ و $\gamma = ۱/۵$ (نمودارهای سیاه) و $a = ۰/۵$، $b = ۱/۵$، $\alpha = ۱/۲$، $\lambda = ۲$ و $\gamma = ۱$ (نمودارهای خط چین)

و تابع وارون H بطور تحلیلی قابل محاسبه نیستند، برای یافتن $H^{-۱}$ می‌بایست از روش‌های عددی کمک گرفت. در شکل ۶ داده‌های شبیه‌سازی شده توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه برای $\mathrm{TPMOMW}(۲, ۰/۵, ۳, ۳, ۱/۵)$ و $\mathrm{TPMOMW}(۰/۵, ۱/۵, ۱/۲, ۲, ۱)$ نشان داده شده است.



(الف) (ب)

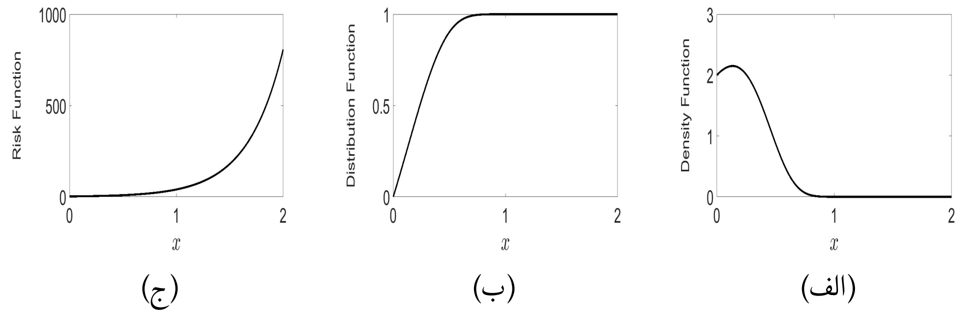
شکل ۶. شبیه‌سازی توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه برای الف- $\mathrm{TPMOMW}(۰/۵, ۱/۵, ۱/۲, ۲, ۱)$ و ب- $\mathrm{TPMOMW}(۲, ۰/۵, ۳, ۳, ۱/۵)$

۷ خانواده توزیع‌های گمپرتز

در این بخش نیز سه توزیع مهم خانواده توزیع‌های گمپرتز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در این خانواده $H(x;\beta) = \beta^{-۱}[\exp(\beta x) - ۱], \quad x \in \mathbb{R},\ \beta > ۰$ است. **الف- گمپرتز گورویچ:** تابع توزیع، تابع چگالی و تابع مخاطره این توزیع، بترتیب عبارتند از

$$
\begin{aligned}
G(x;\alpha,\beta) &= ۱ - \exp[-\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x) - ۱]],\\
g(x;\alpha,\beta) &= \alpha \exp(\beta x) \exp[-\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x) - ۱]],\\
r(x;\alpha,\beta) &= \alpha \exp(\beta x).
\end{aligned}
$$

نمودار تابع چگالی، تابع توزیع و مخاطره این توزیع به ازای $\alpha = ۲, \beta = ۳$ در شکل ۷ نشان داده شده.
ب- توزیع گمپرتز مارشال-اولکین: تابع توزیع، تابع چگالی و تابع مخاطره این توزیع، عبارتند از



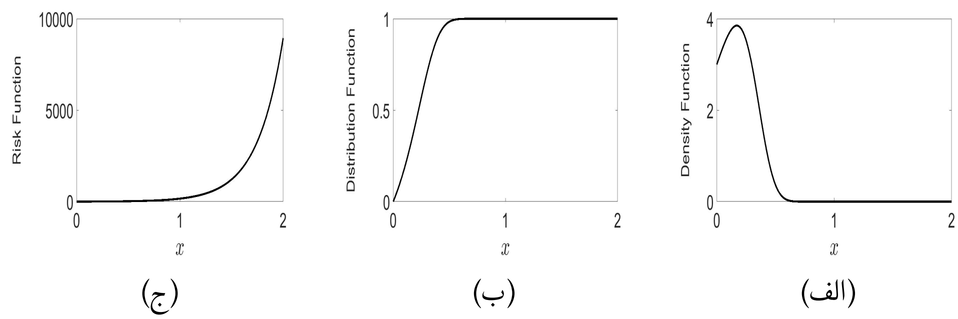
شکل ۷. الف-تابع چگالی، ب- تابع توزیع و ج- تابع مخاطره توزیع گمپرتز گورویچ به ازای $\alpha = ۲, \beta = ۳$.

$$G(x; a, \alpha, \beta) = \frac{۱ - \exp[-\frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta x) - ۱]]}{۱ - \bar{a}\exp[-\frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta x) - ۱]]},$$

$$g(x; a, \alpha, \beta) = \frac{a\alpha\exp[\beta x - \frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta x) - ۱]]}{۱ - \bar{a}\exp[-\frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta x) - ۱]]^{۲}},$$

$$r(x; a, \alpha, \beta) = \frac{\alpha\exp(\beta x)}{۱ - \bar{a}\exp[-\frac{\alpha}{\beta}[\exp(\beta x) - ۱]]}.$$

نمودار تابع چگالی، تابع توزیع و مخاطره این توزیع به ازای $a = ۲, \alpha = ۳, \beta = ۴$ در شکل ۸ نشان داده شده. **ج- توزیع گمپرتز مارشال-اولکین-ناداراجه:** تابع چگالی این توزیع به صورت



شکل ۸. الف- تابع چگالی، ب- تابع توزیع و ج- تابع مخاطره توزیع گمپرتز مارشال-اولکین به ازای $a = ۲$، $\alpha = ۳$ و $\beta = ۴$.

$$g(x;a,b,\alpha,\beta)=\frac{a^b b\bar{a}\alpha\exp(\beta x)\exp[-\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x)-۱]]}{(۱-a^b)[۱-\bar{a}\exp[\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x)-۱]]]^{b+۱}},\ \ \beta\in\mathbb{R}\setminus\{۰\},\ x\in\mathbb{R}^+,$$

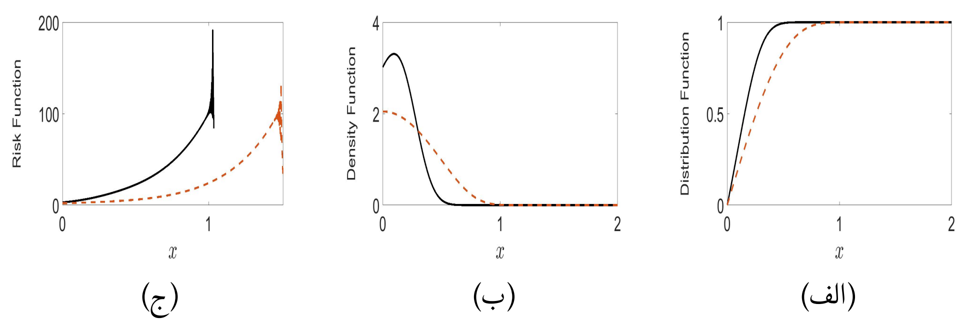
است. توزیع گمپرتز مارشال-اولکین-ناداراجه را با نماد TPMOGO نمایش داده می‌شود. تابع توزیع و تابع نرخ مخاطره این مدل به ترتیب عبارتند از

$$G(x;a,b,\alpha,\beta)=\frac{۱}{۱-a^b}-\frac{a^b}{۱-a^b}[۱-\bar{a}R]^{-b},$$
$$r(x;a,b,\alpha,\beta)=\frac{b\alpha\bar{a}\exp(\beta x)R}{(۱-\bar{a}R])(۱-[۱-\bar{a}R]^b)}$$

که در آنها $R=\exp[-\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x)-۱]]$. حال فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ یک نمونه تصادفی از این توزیع باشند. لگاریتم تابع درستنمایی $\theta=(a,b,\alpha,\beta)$ به صورت

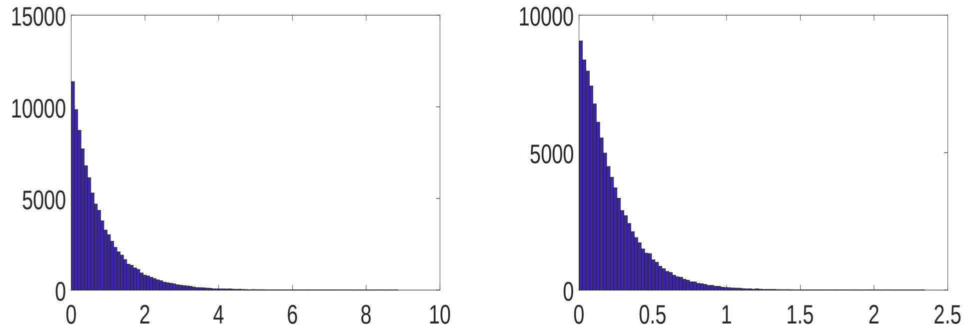
$$\ell(\theta)=nb\log a+\log b+\log\bar{a}+\log\alpha+\beta\sum_{i=۱}^{n}x_i-\alpha\beta^{-۱}\sum_{i=۱}^{n}\exp(\beta x_i)$$
$$+\alpha\beta^{-۱}n-\log(۱-a^b)-\sum_{i=۱}^{n}\log[۱-\bar{a}\exp[-\alpha\beta^{-۱}[\exp(\beta x_i)-۱]]].$$

است. نمودار تابع چگالی، تابع توزیع و مخاطره به ازای $a=۲,b=۰/۵,\alpha=۵,\beta=۳$ و همچنین به ازای مقادیر $a=۰/۵,b=۰/۵,\alpha=۱/۲,\beta=۳$ در شکل ۹ نشان داده شده است. نمودار مقادیر شبیه‌سازی شده از این توزیع با استفاده از الگوریتم ۱ و $H(x)=\beta^{-۱}[\exp(\beta x)-۱]$ و



شکل ۹. الف- تابع چگالی، ب- تابع توزیع و ج- تابع مخاطره توزیع گمپرتز مارشال-اولکین-ناداراجه برای دو حالت $a=۲$، $b=۰/۵$، $\alpha=۵$، $\beta=۳$ (نمودارهای سیاه) و $a=۰/۵$، $b=۰/۵$، $\alpha=۱/۲$، $\beta=۳$ (نمودارهای خط چین)

$H^{-1}(x) = \beta^{-1}\log(\beta x + 1)$ برای دو حالت مذکور در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



(ب) (الف)

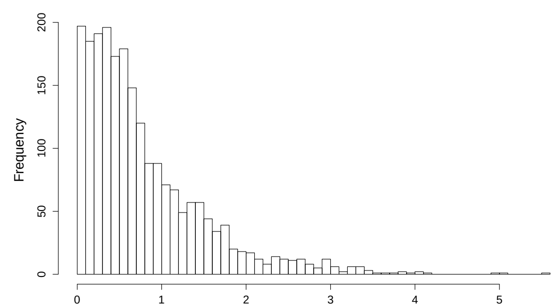
شکل ۱۰. شبیه‌سازی داده‌های توزیع گمپرتز مارشال–اولکین–ناداراجه به ازای الف– $a = 2$، $b = 0/5$، $\alpha = 5$، $\beta = 3$ و ب– $a = 0/5$، $b = 0/5$، $\alpha = 1/2$ و $\beta = 3$.

۸ تحلیل داده‌های بیمه آتش سوزی

در این بخش توزیع‌های معرفی شده به داده‌های بیمه آتش سوزی دانمارک برازش داده شده و پارامترهای آنها با روش‌های ماکسیمم سازی عددی و با استفاده از زبان برنامه‌نویسی R و تابع nlminb به‌دست آورده شده‌اند. مجموعه داده‌های بیمه دانمارکی شامل ۲۱۶۷ مورد اعاده بیمه آتش‌سوزی است که بین سال‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ رخداده است، این مجموعه داده‌ها چندین بار توسط امسی‌نیل (۱۹۹۷)، کورای و آناندا (۲۰۰۵)، برناردی و همکارانش (۲۰۱۲) و آهِن و همکارانش (۲۰۱۲) مورد استفاده قرار گرفته است. شاخص‌های آمار توصیفی برای لگاریتم این داده‌ها در جدول ۳ گزارش شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این داده‌ها دارای چولگی، کشیدگی و داده‌های پرت هستند که در نمودار بافت نگار شکل ۱۱ مشخص است. بر اساس نتایج برازش و برآورد پارامترهای خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده در جدول ۴ و مبتنی بر دو معیار نیکویی آکائیکه و لگاریتم تابع درستنمایی، توزیع وایبل اصلاح شده مارشال–اولکین–ناداراجه نسبت به دو توزیع دیگر مدل بهتری برای لگاریتم داده‌های بیمه آتش‌سوزی است. همچنین با توجه به شکل ۱۲ توزیع وایبل اصلاح شده مارشال–اولکین مدل مناسب‌تری نسبت به توزیع وایبل اصلاح شده گورویچ است. با دقت به این نمودارها مشخص می‌شود که توزیع وایبل اصلاح شده مارشال–اولکین–ناداراجه خیلی بهتر توانسته کشیدگی داده‌ها را پوشش دهد. همچنین منحنی چگالی این توزیع بعد از عدد یک تقریبا بر روی

جدول ۳. آمار توصیفی لگاریتم مجموعه داده‌های بیمه آتش‌سوزی دانمارک.

شاخص	مقدار
میانگین	۰/۷۹
انحرف استاندارد	۰/۷۲
چولگی	۱/۷۶
کشیدگی	۴/۱۸
مینیمم	۰/۰۰
چارک اول	۰/۲۸
میانه	۰/۵۶
چارک سوم	۱/۰۹
ماکسیمم	۵/۵۷



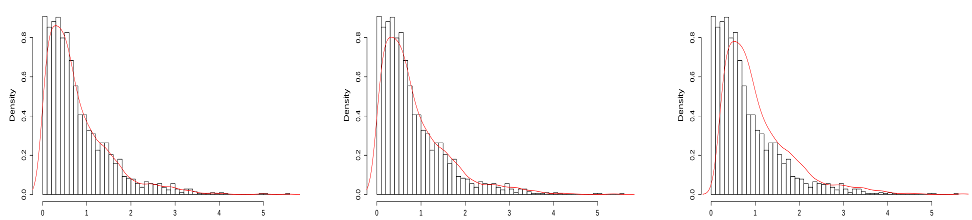
شکل ۱۱. بافت‌نگار لگاریتم داده‌های بیمه آتش‌سوزی دانمارک.

مستطیل‌ها نشسته است و این موضوع نشان می‌دهد که این توزیع مدل مناسبی برای این داده‌ها است. با توجه به موارد بیان شده توزیع وایبل اصلاح شده مارشال–اولکین نیز توانسته است که بهتر از وایبل اصلاح شده گورویچ عمل کند. نکته مهم این است که این خانواده از توزیع‌ها نسبت به داده‌های پرت حساس نبوده و توانسته آن‌ها را نیز پوشش دهند و نوعی استواری در برابر کشیدگی، چولگی و داده‌های پرت از خود نشان داده‌اند.

جدول ۵ نیز براورد پارامترهای خانواده توزیعهای گمپرتز را نشان می‌دهد. با توجه به این جدول و با استفاده از معیارهای نیکویی برازش مشخص می‌شود توزیع گمپرتزمارشال–اولکین–ناداراجه مدلی بهتر

جدول ۴. براورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده.

توزیع	α	λ	γ	a	b	$-$loglik	AIC
وایبل اصلاح شده گورویچ	۰٫۵۳۴۲	۰٫۹۳۵۱	۱٫۸۴۵۷	–	–	۲۱۷۷۷٫۸۳	۲۷۸۱۸٫۷۱
وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین	۰٫۹۵۳۴	۱٫۱۲۵۱	۰٫۹۴۵۹	۰٫۸۲۶۵	–	۱۳۷۱۶٫۸۲	۲۷۴۴۱٫۶۵
وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه	۰٫۹۷۶۵	۰٫۸۹۲۵	۱٫۲۷۸۴	۰٫۴۶۴۹	۵٫۳۴۲۳	۱۲٫۹۹۵۹	۲۴۲۰۹٫۱۸



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۲. برازش خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده به لگاریتم داده‌های بیمه آتش‌سوزی دانمارک. الف- وایبل اصلاح شده گورویچ، ب- وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین، ج- وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه.

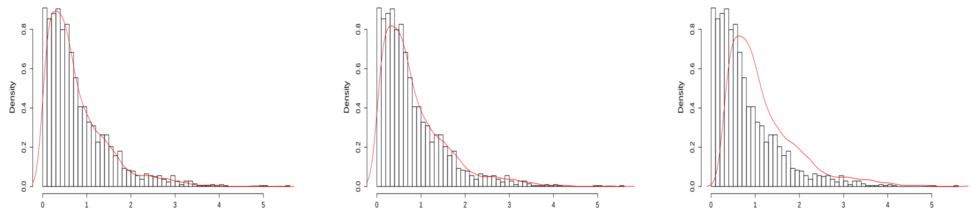
از دو توزیع دیگر این خانواده است و با توجه به نمودارهای شکل ۵ مشخص می‌شود همانند توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-ناداراجه بهتر می‌تواند این داده‌ها را پوشش دهد.

جدول ۵. براوردماکسیمم درستنمایی پارامترهای خانواده توزیعهای گمپرتز.

توزیع	α	β	a	b	$-$loglik	AIC
گمپرتزگورویچ	۱٫۹۶۷۱	۱٫۲۴۲۳	–	–	۱۲۷۶۵٫۷	۲۵۵۳۵٫۳۹
گمپرتزمارشال-اولکین	۰٫۹۰۷۰	۱٫۲۵۶۲	۰٫۵۳۵۴	–	۱۲۷۴۶٫۰۳	۲۵۴۹۸٫۰۶
گمپرتزمارشال-اولکین-ناداراجه	۰٫۸۵۳۶	۰٫۹۳۵۲	۰٫۳۶۷۴	۲٫۵۷۱۲	۱۲۳۶۵٫۱۷	۲۴۷۳۸٫۳۴

۹ بحث و نتیجه‌گیری

خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین تعمیم یافته وایبل (مانیتو) مورد مطالعه قرارگرفته و بسط تابع چگالی، تابع چندکی و مولد اعداد تصادفی برای آن محاسبه شد. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و شرایط لازم برای به دست آوردن ناحیه اطمینان پارامترهای توزیع مانیتو ارائه شد. برای خانواده توزیع‌های مارشال-



(ج) (ب) (الف)

شکل ۱۳. برازش خانواده توزیعهای گمپرتز به لگاریتم دادههای بیمه آتش‌سوزی دانمارک. الف- گمپرتز گورویچ، ب- گمپرتز مارشال-اولکین، ج-گمپرتز مارشال-اولکین-نادارا‌جه.

اولکین-نادارا‌جه نمایی (مانن) توابع بقاء، چگالی و مخاطره معرفی و نحوه شبیه‌سازی از این توزیع بیان شدند. آمار بیزی این خانواده ارائه شده و برای توابع زیان توان دوم خطا، آنتروپی،توان دوم خطای لگاریتمی و لاینکس اصلاح شده برآورد بیزی پارامترها با استفاده از نرم افزار R بدست آورده شد. در خانواده توزیع‌های وایبل اصلاح شده سه توزیع وایبل اصلاح شده گورویچ، توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین و توزیع وایبل اصلاح شده مارشال-اولکین-نادارجه مورد مطالعه قرار گرفت. برای هر یک توابع چگالی، بقاء و مخاطره ارائه و برای حالت سوم شبیه‌سازی صورت گرفته است. خانواده توزیع‌های گمپرتز نیز مورد بحث واقع شدند و برای توزیع‌های گمپرتز-گورویچ، گمپرتز-مارشال-اولکین و گمپرتز-مارشال-اولکین-نادارا‌جه ارائه، توابع چگالی، بقاء و مخاطره تعیین و برای حالت سوم شبیه‌سازی انجام شده است. داده‌های بیمه آتش سوزی دانمارک مورد مطالعه قرار گرفته و توزیع‌های مورد بحث به آن‌ها برازش داده شده‌اند.

تقدیر و تشکر

از هیئت تحریریه، داوران و ویراستار محترم مجله که با توصیه‌های ارزشمند خود سبب ارتقا و ارائه بهتر این مقاله شدند کمال تشکر را داریم.

مراجع

دوستمرادی، ع.، زادکرمی، م.، آخوند، م. و خنجری عیدنک، ع. (۱۳۹۳)، توزیع جدید وایبول انتظار معکوس، مجله علوم آماری، ۸ ، ۱۷۴-۱۵۹.

دوستمرادی، ع.، زادکرمی، م.، خنجری عیدنک، ع. و فریدونی، ز. (۱۳۹۵)، تعمیم جدید توزیع وایبول، مجله علوم آماری، ۱۰ ، ۹۴-۸۱.

Ahn, S., Kim, J. H.T., and Ramaswami, V. (2012), A New Class of Models for Heavy Tailed Distributions in Finance and Insurance Risk, *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 43-52.

Bernardi, M., Maruotti, A., and Petrella, L. (2012), Skew Mixture Models for Loss Distributions: A Bayesian Approach, *Insurance: Mathematics and Economics*, **51**, 617-623.

Carrasco, J. M. F., Orteya, E. M. M., and Cordeir, G. M. (2008), A Generalized Modified Weibull Distribution for Lifetime Modeling, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 450-462.

Cooray, K., and Ananda, M. M. A. (2005), Modeling Actuarial Data with a Composite Lognormal-Pareto Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **2005**, 321-334.

Cover, T. M., and Thomas, J. A. (1991), *Elements of Information Theory*, John Wiley and Sons, New York.

Cox, D. R., and Hinkley, D. V. (1974), *Theoretical Statistics*, Chapman and Hall, London.

Gurvich, M., DiBenedetto, A., and Ranade, S. (1997), A New Statistical Distribution for Characterizing the Random Strength of Brittle Materials, *Journal of Materials Science*, **32**, 2559-2564.

Jayakumar, K., and Thomas, M. (2008), On a Generalization to Marshal-Olkin Scheme and Its Application to Burr Type XII Distribution, *Statistical Papers*, **49**, 421-439.

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayes Method, *Trabajos de Estadistica*, **31**, 223-237.

Marshall, A. W., and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Family of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.

McNeil, A. J. (1997), Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory, *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, **27 (1)**, 117-137.

Nadarajah, S., Jayakumar, K., and Ristic, M. M. (2012), A New Family of Lifetime Models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 1389-1404.

Nascimento, A. D. C., Cintra, R. J., and Frery, A. C. (2010), Hypothesis Testing in Speckled Data with Stochastic Distances, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **48**, 373-385.

Santos-Neto, M., Bourguignon, M., Zea, L. M., and Nascimento, A. D. C. (2014), The Marshall-Olkin Extended Weibull Family of Distributions, *Joural of Statistical Distributions and Applications*, **1**, 1-24.

Singh, S. k., Singh, U., and Yadav, A. S. (2014), Bayesian Estimation of Marshall-Olkin Extended Exponential Paoameters Under Various Approximation Techniques, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **43**, 341-354.

Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2021
Vol. 15, No. 1, pp 165-191
DOI: 10.29252/jss.15.1.165

Distributions Family of Extended Weibull Combined with Negative Binomial Distribution Truncated at Zero

Tarami[1], B., Avaji[2], M., Sanjari Farsipour[3], N.
[1]Department of Statistics, Shiraz university, Shiraz, Iran.
[2]Department of Applied Mathematics, Tabriz University, Tabriz, Iran.
[3]Department of Statistics, Alzahra University, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, using extended Weibull Marshall-Olkin-Nadarajah family of distributions, the exponential, modified Weibull, and Gompertz distributions are obtained, and density, survival, and hazard functions are simulated. Next, an algorithm is presented for the simulation of these distributions. For exponential case, Bayesian statistics under squared error, entropy Linex, squared error loss functions and modified Linex are calculated. Finally, the presented distributions are fitted to a real data set.

Keywords: Marshal-Olkin distribution, Generalized Weibull distribution, Bayesian statistics, Survival function, Hazard function.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F15, 62C10, 60E05.