مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۵۴۹ – ۵۶۶
DOI: 10.29252/jss.15.2.549
مقاله پژوهشی

معرفی یک میدان تصادفی مانای چوله گاوسی

امید کریمی، فاطمه حسینی

گروه آمار دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۰۴   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۷/۰۴

چکیده: میدان تصادفی گاوسی معمولا برای تحلیل داده‌های فضایی به‌کار گرفته می‌شود. از ویژگی‌های مهم این میدان تصادفی دارا بودن خواص مهم خانواده توزیع‌های نرمال از جمله بسته بودن تحت تبدیلات خطی، حاشیه‌سازی و شرطی‌کردن است که باعث خاصیت سازگاری حاشیه‌ای می‌شود. به‌طور مشابه برای مدل‌بندی داده‌های فضایی چوله از میدان تصادفی چوله گاوسی استفاده می‌شود. هرچند توزیع چوله نرمال خیلی از خواص توزیع نرمال را داراست اما در بعضی تعریف‌های میدان تصادفی چوله گاوسی، خاصیت سازگاری حاشیه‌ای برقرار نیست. در این مقاله یک میدان تصادفی چوله گاوسی مانا معرفی و خاصیت سازگاری حاشیه‌ای آن بررسی می‌شود. سپس تشخیص مدل همبستگی فضایی این میدان تصادفی چوله با استفاده از تغییرنگار تجربی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. همچنین تحلیل درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی معرفی شده با یک مطالعه شبیه‌سازی بیان و در انتها بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.
واژه‌های کلیدی: میدان تصادفی گاوسی، میدان تصادفی چوله گاوسی، داده‌های فضایی، مانایی.

۱ مقدمه

داده‌های فضایی، داده‌هایی هستند که دارای همبستگی مکانی و یا مکانی-زمانی هستند و کاربردهای فراوانی در علوم محیطی، هواشناسی، اپیدمیولوژی و غیره دارند. برای مدل‌بندی داده‌های فضایی از میدان

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: امید کریمی، omid.karimi@semnan.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60G60 62M30 60G15 .

تصادفی استفاده می‌شود. یک تعریف اولیه از میدان تصادفی توسط آدلر (۱۹۸۱) ارائه شده است. معمولا میدان تصادفی برای داده‌های فضایی را میدان تصادفی فضایی[1] (SRF) می‌نامند. یک تعریف کامل‌تر از SRF اخیرا توسط هریستوپولوس (۲۰۲۰) بیان شده است.

یک میدان تصادفی را گاوسی گوییم هرگاه هر تحقق متناهی بُعد از این میدان تصادفی دارای توزیع نرمال چندمتغیره باشد. برای تحلیل برخی از مدل‌های فضایی از فرض میدان تصادفی گاوسی استفاده می‌شود. هرچند این فرض سادگی‌های زیادی را به همراه دارد اما در عمل گاهی اوقات با داده‌های نامتقارن و چوله مواجه می‌شویم که در آن صورت نیاز است یک میدان تصادفی ناگاوسی تعریف شود. کیم و مالیک (۲۰۰۴) میدان تصادفی چوله گاوسی براساس توزیع چوله نرمال چند متغیره (آزالینی و دالاواله، ۱۹۹۶) برای تحلیل داده‌های فضایی نامتقارن ارائه کردند. آلارد و ناویو (۲۰۰۷) و کریمی و محمدزاده (۲۰۱۱) نیز میدان‌های تصادفی چوله گاوسی براساس توزیع چوله نرمال بسته[2] (CSN) (گنزالس فاریس و همکاران، ۲۰۰۴) معرفی نمودند. همچنین کارهای فراوانی روی این میدان‌های تصادفی انجام شده که از جمله آن‌ها می‌توان به حسینی و کریمی (۲۰۲۰)، کریمی و همکاران (۲۰۱۱) و کریمی و محمدزاده (۲۰۱۲) اشاره کرد. همه این میدان‌های تصادفی چوله بیان شده دارای محدودیت‌ها و مشکلات مانایی هستند که در ادامه به آن اشاره می‌شود. ریمستاد و امره (۲۰۱۴) یک میدان تصادفی چوله گاوسی تقریبا مانا پیشنهاد کردند که تعمیمی از میدان تصادفی معرفی شده توسط آلارد و ناویو (۲۰۰۷) است. محمودیان (۲۰۱۸) ادعا نمود که اکثر این میدان‌های تصادفی چوله براساس نظریه وجود کلموگروف خوش تعریف نیستند و در واقع شرط سازگاری حاشیه‌ای را ندارند. حسینی و کریمی (۲۰۲۱) یک تحلیل درست‌نمایی مرکب برای داده‌های فضایی چوله بیان کردند که از میدان تصادفی چوله گاوسی تقریبا مانای ریمستاد و امره (۲۰۱۴) استفاده کرده‌اند. آن‌ها به خاصیت سازگاری حاشیه‌ای برای این میدان تصادفی اشاره نمودند.

در این مقاله یک میدان تصادفی چوله گاوسی[3] (SGRF) مانا که تعمیمی از میدان تصادفی تقریبا مانا (ریمستاد و امره ، ۲۰۱۴؛ حسینی و کریمی، ۲۰۲۱) است، معرفی می‌شود. در بخش ۲ ابتدا تعریف‌هایی از میدان تصادفی و میدان تصادفی فضایی برای داده‌های چوله ارائه می‌شود. سپس ساختار SGRF تقریبا مانا بیان می‌گردد. در بخش ۳ SGRF مانا معرفی و ویژگی‌های آن‌ها به‌ویژه خاصیت سازگاری حاشیه‌ای مورد تحلیل قرار می‌گیرد. نحوه شبیه‌سازی از SGRF مانا همراه با تحلیل تغییرنگار تجربی داده‌های شبیه‌سازی شده در بخش ۴ ارائه می‌شود. در بخش ۵ تحلیل درست‌نمایی این میدان تصادفی به‌وسیله یک

---
[1] Spatial Random Field
[2] Closed Skew Normal
[3] Skew Gaussian Random Field

مطالعه شبیه‌سازی بررسی می‌گردد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۶ ارائه می‌شود.

۲ میدان تصادفی چوله گاوسی

در این بخش SGRF تقریبا مانای ریمستاد و امره (۲۰۱۴) بیان و ویژگی‌های آن بررسی و سپس SGRF مانا معرفی می‌شود. ابتدا لازم است تعریف‌های اولیه میدان تصادفی و تصادفی فضایی بیان شوند و بعد به ساختار این میدان‌های تصادفی چوله پرداخته می‌شود.

تعریف ۱. (آدلر، ۱۹۸۱) تحت فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ میدان تصادفی $T(x)$ در R^n تابعی است که به ازای هر x ثابت به‌طوری‌که $x \in R^n$، $T(x)$ یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ باشد، که در آن Ω مجموعه مرجع و $\mathfrak{F}$ سیگما میدان روی Ω و P اندازه احتمال روی $(\Omega, \mathfrak{F})$ است.

تعریف ۲. (هریستوپولوس ، ۲۰۲۰) یک میدان تصادفی فضایی یا تابع تصادفی فضایی [1] به‌صورت $\{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s};\omega) \in A_X \subseteq R; \boldsymbol{s} \in D \subseteq R^d; \omega \in \Omega\}$ تعریف می‌شود و به‌صورت نگاشتی از فضای احتمال $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ به فضای اعداد حقیقی بیان می‌شود، که در آن $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s};\omega)$ به ازای هر مقدار ثابت $\boldsymbol{s}$ یک تابع اندازه‌پذیر از ω است. مجموعه D محدوده ناحیه فضایی که SRF روی آن تعریف شده است. A_X یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی به‌طوری‌که مقادیر $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{s};\omega)$ درون آن قرار دارد. اگر مجموعه A_X شمارا باشد، SRF گسسته گویند اگر مجموعه A_X متناهی و به‌صورت طبقه‌بندی باشد (همانند متغیرهای کیفی دارای مقیاس‌های اسمی یا ترتیبی باشد)، SRF طبقه‌بندی گویند و اگر مجموعه A_X پیوسته (بازه‌ای از اعداد حقیقی) باشد، SRF پیوسته گویند.

۲.۱ توزیع چوله نرمال بسته

توزیع چوله نرمال بسته (CSN) اولین بار توسط گنزالس فاریس و همکاران (۲۰۰۴) تعریف شده است که ساختار آن در ادامه بیان می‌شود. فرض کنید بردار $\boldsymbol{U} \in R^{p+q}$ دارای توزیع نرمال چند متغیره به‌صورت

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 \\ \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix} \sim N_{p+q}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right) \qquad (1)$$

[1] Spatial Random Function

باشد، که در آن $\boldsymbol{U}_1$ یک بردار تصادفی دارای توزیع نرمال p متغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu}_1$ و ماتریس کوواریانس Σ_{11} و $\boldsymbol{U}_2$ یک بردار تصادفی دارای توزیع نرمال q متغیره با میانگین $\boldsymbol{\mu}_2$ و ماتریس کوواریانس Σ_{22} است. همچنین $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2) = \Sigma_{12}$ و $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ است. آن‌گاه $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{U}_1 | \boldsymbol{U}_2 \leq \mathbf{0}]$ دارای توزیع CSN با تابع چگالی

$$f_X(x) = k\phi_p(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})\Phi_q\big(\mathbf{0}; \boldsymbol{\mu}_2 + \Sigma_{21}{\Sigma_{11}}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1), \Sigma_{22} - \Sigma_{21}{\Sigma_{11}}^{-1}\Sigma_{12}\big),$$

است، که در آن $k^{-1} = \Phi_q(\mathbf{0}; \boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22})$، ϕ و Φ به‌ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال با پارامترهای مورد نظر است و به شکل

$$CSN_{p,q}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11}, \Sigma_{21}{\Sigma_{11}}^{-1}, \boldsymbol{\nu}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}{\Sigma_{11}}^{-1}\Sigma_{12})$$

نمایش می‌دهند. کلاس توزیع‌های CSN اکثر خواص توزیع نرمال مانند بسته بودن تحت تبدیلات خطی، حاشیه‌سازی و شرطی کردن را دارند.

تعریف ۳. (آلارد و ناویو، ۲۰۰۷) فرض کنید $(\boldsymbol{s}'_1, \cdots, \boldsymbol{s}'_q)$ برای هر q ثابت و متناهی، موقعیت‌های مشخصی از دامنه فضایی $D \subseteq R^d$ و $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s}) = \big\{(U_1(\boldsymbol{s}), U_2(\boldsymbol{s}))^\top, \boldsymbol{s} \in D\big\}$ یک میدان تصادفی گاوسی دو متغیره با ساختار (۱) باشد، آن‌گاه میدان تصادفی $\big\{X(\boldsymbol{s}) = [U_1(\boldsymbol{s}) | \boldsymbol{U}_2 \leq \mathbf{0}]; \boldsymbol{s} \in D\big\}$, یک SGRF است، اگر برای هر موقعیت $(\boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_p)$، چگالی توام $\big(X(\boldsymbol{s}_1), \cdots, X(\boldsymbol{s}_n)\big)^\top$ دارای توزیع CSN باشد، که در آن $\boldsymbol{U}_2 = \big[U_2(s'_1), \cdots, U_2(s'_q)\big]^\top$ یک تحقق q-بعدی از میدان تصادفی $U_2(\boldsymbol{s})$ است.

لازم به ذکر است که حتی اگر میدان تصادفی گاوسی دومتغیره $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$ در تعریف ۳ مانا باشد، SGRF تعریف شده مانا نیست. عدم مانایی به‌خاطر موقعیت‌های $(\boldsymbol{s}'_1, \cdots, \boldsymbol{s}'_q)$ است. به‌عنوان مثال وقتی $\boldsymbol{s}$ از $(\boldsymbol{s}'_1, \cdots, \boldsymbol{s}'_q)$ فاصله داشته باشد، طبق خاصیت داده‌های فضایی $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$ و $\boldsymbol{U}_2$ دارای همبستگی ضعیفی هستند پس توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{s})$ تقریبا گاوسی خواهد بود. هرچند میدان تصادفی معرفی شده دارای بعضی خواص مانایی است. به‌عنوان مثال برای $(\boldsymbol{s}'_1, \cdots, \boldsymbol{s}'_q)$ که یک شبکه منظم روی D است، میدان تصادفی $X(\boldsymbol{s})$ تقریبا ماناست اگر موقعیت‌های $(\boldsymbol{s}'_1, \cdots, \boldsymbol{s}'_q)$ به اندازه کافی از مرزهای دامنه فضایی دور باشند در واقع SGRF تقریبا ماناست. میدان تصادفی معرفی شده توسط کیم و مالیک (۲۰۰۴) حالت خاص از این SGRF است وقتی $q = 1$ باشد.

۲.۲ SGRF تقریبا مانا

برای شناسایی‌پذیر بودن پارامترهای SGRF تعریف ۳، ریمستاد و امره (۲۰۱۴) یک SGRF تقریبا مانا ارائه نمودند که در مسائل واقعی کاربرد مناسبی دارد. براساس یک تحقق از میدان تصادفی تعریف ۳، $p=q$، $(\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_p)=(\boldsymbol{s}'_1,\cdots,\boldsymbol{s}'_q)$، $\boldsymbol{\mu}_1=\mu\mathbf{1}_p$ و $\boldsymbol{\mu}_2=\nu\mathbf{1}_p$ قرار دهید، که در آن $\mathbf{1}_p$ یک بردار p بعدی با مقادیر یک است. ساختار کوواریانس رابطه (۱) نیز به‌صورت

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma^2C & -\gamma\sigma C\\ -\gamma\sigma C & (1-\gamma^2)\mathbf{I}_p+\gamma^2C\end{pmatrix},$$

در نظر بگیرید که در آن $\sigma^2>0$، $|\gamma|<1$ پارامتر چولگی و $\mathbf{I_p}$ ماتریس همانی p بعدی است. C یک ماتریس همبستگی همسانگرد با تابع همبستگی $\rho(\cdot;\varphi)$ است که در آن φ پارامتر دامنه فضایی است. در آن صورت یک تحقق p تایی از SGRF تعریف ۳ دارای توزیع CSN با تابع چگالی به‌صورت

$$f_X(\boldsymbol{x})=\phi_p(\boldsymbol{x};\mu\mathbf{1}_p,\sigma^2C)\frac{\prod_{i=1}^{p}\Phi_1\big(\frac{\gamma}{\sigma}(x_i-\mu);\nu,1-\gamma^2\big)}{\Phi_p\big(\mathbf{0};\nu\mathbf{1}_p,(1-\gamma^2)\mathbf{I}_p+\gamma^2C\big)},\tag{۲}$$

خواهد شد و به شکل

$$CSN_{p,p}\big(\mu\mathbf{1}_p,\sigma^2C,\frac{\gamma}{\sigma}\mathbf{I}_p,\nu\mathbf{1}_p,(1-\gamma^2)\mathbf{I}_p\big),\tag{۳}$$

نمایش داده می‌شود. پارامترهای این SGRF تقریبا مانا به‌صورت μ، ν، σ^2، γ، و φ هستند که در آن $\sigma^2>0$، $\varphi>0$ و $|\gamma|<1$ در نظر گرفته می‌شوند، که ماتریس Σ معین مثبت باشد. در این‌جا μ و ν پارامترهای مکان، σ^2 پارامتر مقیاس، ϕ پارامتر همبستگی فضایی و γ پارامتر چولگی است. این میدان تصادفی برخلاف میدان تصادفی گاوسی دارای خاصیت حاشیه‌ای نیست. چون توزیع‌های حاشیه‌ای آن برای هر تحقق p تایی رابطه (۲) به کل ناحیه فضایی وابسته است. به‌عنوان مثال

$$\begin{aligned}f_{X_j}(x_j)=&\phi_1(\boldsymbol{x}_j;\mu,\sigma^2)\Phi_1\big(\frac{\gamma}{\sigma}(x_j-\mu);\nu,1-\gamma^2\big)\\&\times\frac{\int\phi_{p-1}(\boldsymbol{x}_{-j}|x_j;\mu\mathbf{1}_p,\sigma^2C)\prod_{i=1}^{p}\Phi_1\big(\frac{\gamma}{\sigma}(x_i-\mu);\nu,1-\gamma^2\big)d_{\boldsymbol{x}_{-j}}}{\Phi_p\big(\mathbf{0};\nu\mathbf{1}_p,(1-\gamma^2)\mathbf{I}_p+\gamma^2C\big)},\end{aligned}\tag{۴}$$

که در آن $\boldsymbol{x}_{-j} = (x_۱, \cdots, x_{j-۱}, x_{j+۱}, \cdots, x_p)^\top$ است. ملاحظه می‌شود که چگالی حاشیه‌ای X_j به ماتریس همبستگی C که مربوط به کل شبکه فضایی $(\boldsymbol{s}_۱, \cdots, \boldsymbol{s}_p)$ است وابسته است، اما ساختار این چگالی یک توزیع چوله نرمال بسته است. از این رو ریمستاد و امره (۲۰۱۴) آن را یک میدان تصادفی تقریبا مانا نامیدند. آن‌ها در یک مطالعه شبیه‌سازی نشان دادند که با افزایش همبستگی فضایی بین شبکه‌های فضایی ماکسیمم چولگی توزیع‌های حاشیه‌ای کاسته می‌شود و بالعکس. در حالت استقلال موقعیت‌های ناحیه‌های فضایی $(\boldsymbol{s}_۱, \cdots, \boldsymbol{s}_p)$ ماکسیمم چولگی در توزیع حاشیه‌ای مشاهده می‌شود.

۳ SGRF مانا

در این بخش عدم برقراری شرط سازگاری حاشیه‌ای SGRF تقریبا مانا معرفی شده در بخش ۲.۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد و یک SGRF مانا معرفی می‌شود. محمودیان (۲۰۱۸) شرایط یک میدان تصادفی براساس نظریه وجود کلوگروف را به این‌صورت بیان کرد که یک میدان تصادفی وجود دارد هرگاه در دو شرط متقارن تحت جایگشت و سازگاری حاشیه‌ای صدق کند. برای خانواده توزیع‌های چوله شرط اول برقرار است اما شرط دوم مسئله اصلی است. سازگاری حاشیه‌ای یعنی این‌که تحت حاشیه‌سازی بسته و توزیع حاشیه‌ای یک بعد دلخواه متناهی فقط وابسته به پارامترها و بعد متناظر باشد. بنابراین SGRF تقریبا مانای ریمستاد و امره (۲۰۱۴) بخش قبل در شرط سازگاری حاشیه‌ای صدق نمی‌کند. چون برای یک حالت خاص توزیع حاشیه‌ای X_j رابطه (۴) فقط به پارامترهای متناظر وابسته نبود بلکه به ماتریس C که برای کل ناحیه فضایی است وابسته است. برای بررسی حالت کلی از ویژگی تابع مولد گشتاور توزیع CSN برای نشان دادن عدم سازگاری حاشیه‌ای این میدان تصادفی استفاده می‌شود، (حسینی و کریمی، ۲۰۲۱).
یک تحقق pتایی از SGRF تقریبا مانا به‌صورت $\boldsymbol{X} = (X(\boldsymbol{s}_۱), \ldots, X(\boldsymbol{s}_p))'$ مطابق رابطه (۳) با تفکیک‌هایی به صورت

$$\boldsymbol{X}_{p\times ۱} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_۱ \\ \boldsymbol{X}_۲ \end{pmatrix}, C_{p\times p} = \begin{pmatrix} C_{۱۱} & C_{۱۲} \\ C_{۲۱} & C_{۲۲} \end{pmatrix},$$

در نظر بگیرید، که در آن $\boldsymbol{X}_۱ \in R^{p_۱}$، $\boldsymbol{X}_۲ \in R^{p_۲}$ و $p_۱ + p_۲ = p$ است و ماتریس همبستگی فضایی C تفکیک‌های متناظر با بردارهای $\boldsymbol{X}_۱$ و $\boldsymbol{X}_۲$ از ماتریس $\boldsymbol{X}$ هستند. تابع مولد گشتاور بردار تصادفی

$\boldsymbol{X}$ با تابع چگالی رابطه (۲) به‌صورت (گنزالس فاریس و همکاران، ۲۰۰۴)

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \exp\{\mu \boldsymbol{t}'\mathbf{1}_p + \frac{\boldsymbol{\sigma}^۲}{۲}\boldsymbol{t}'C\boldsymbol{t}\} \times \frac{\Phi_p\big(\gamma\sigma C\boldsymbol{t}; \nu\mathbf{1}_p, (۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p + \gamma^۲ C\big)}{\Phi_p\big(\mathbf{0}; \nu\mathbf{1}_p, (۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p + \gamma^۲ C\big)},\ \boldsymbol{t} \in R^p. \tag{۵}$$

حاصل می‌شود. بنابراین با توجه به $M_{\boldsymbol{X}_۱}(\boldsymbol{t}_۱) = M_{\boldsymbol{X}_۱,\boldsymbol{X}_۲}(\boldsymbol{t}_۱, \mathbf{0}) = M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}^*)$ داریم

$$M_{\boldsymbol{X}_۱}(\boldsymbol{t}_۱) = \exp\{\mu \boldsymbol{t}'_۱\mathbf{1}_p + \frac{\boldsymbol{\sigma}^۲}{۲}\boldsymbol{t}'_۱ C_{۱۱}\boldsymbol{t}'_۱\} \times \frac{\Phi_p\big(\gamma\sigma C\boldsymbol{t}^*; \nu\mathbf{1}_p, (۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p + \gamma^۲ C\big)}{\Phi_p\big(\mathbf{0}; \nu\mathbf{1}_p, (۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p + \gamma^۲ C\big)},\ \boldsymbol{t}_۱ \in R^{p_۱}.$$

که در آن $\boldsymbol{t}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_۱ \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. بنابراین $M_{\boldsymbol{X}_۱}(\boldsymbol{t}_۱)$ به ماتریس همبستگی C برای کل ناحیه فضایی وابسته است پس شرط سازگاری حاشیه‌ای برقرار نیست. برای این‌که شرط سازگاری حاشیه‌ای برقرار شود لازم است پارامترهای یک تحقق از SGRF تقریبا مانا به‌صورت

$$\boldsymbol{X} \sim CSN_{p,p}\big(\mu\mathbf{1}_p, \sigma^۲ C, \frac{\gamma}{\sigma}C^{-\frac{۱}{۲}}, \nu\mathbf{1}_p, (۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p\big), \tag{۶}$$

اصلاح شود که در آن $C^{-\frac{۱}{۲}}$ عکس ریشه دوم ماتریس C است. تابع مولد گشتاور توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{X}_۱$ از SGRF رابطه (۶) مطابق (۵) به‌صورت

$$M_{\boldsymbol{X}_۱}(\boldsymbol{t}_۱) = \exp\{\mu \boldsymbol{t}'_۱\mathbf{1}_p + \frac{\boldsymbol{\sigma}^۲}{۲}\boldsymbol{t}'_۱ C_{۱۱}\boldsymbol{t}'_۱\}\frac{\Phi_p(\gamma\sigma \boldsymbol{C}^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{t}^*; \nu\mathbf{1}_p, \mathbf{I}_p)}{\Phi_p(\mathbf{0}; \nu\mathbf{1}_p, \mathbf{I}_p)},\ \boldsymbol{t}_۱ \in R^{p_۱}.$$

به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که واریانس توزیع Φ_p ماتریس همانی است و $\boldsymbol{t}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_۱ \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$، داریم

$$M_{\boldsymbol{X}_۱}(\boldsymbol{t}_۱) = \exp\{\mu \boldsymbol{t}'_۱\mathbf{1_p} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^۲}{۲}\boldsymbol{t}'_۱ C_{۱۱}\boldsymbol{t}'_۱\}\frac{\Phi_{p_۱}(\gamma\sigma A_{۱۱}^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{t}_۱; \nu\mathbf{1}_{p_۱}, \mathbf{I}_{p_۱})}{\Phi_{p_۱}(\mathbf{0}; \nu\mathbf{1}_{p_۱}, \mathbf{I}_{p_۱})},$$

که در آن $A_{۱۱}^{\frac{۱}{۲}}$ تفکیک متناظر $p_۱ \times p_۱$ از ماتریس $C^{\frac{۱}{۲}}$ است. بنابراین توزیع حاشیه‌ای $\boldsymbol{X}_۱$ برای SGRF تعریف شده در رابطه (۶) دارای بعد $p_۱$ مشابه بردار $\boldsymbol{X}_۱$ و از خانواده توزیع‌های CSN است، پس دارای شرط سازگاری حاشیه‌ای و یک میدان تصادفی خوش تعریف است. لذا میدان تصادفی معرفی شده در (۶) یک SGRF مانا است. از این میدان تصادفی می‌توان برای مدل‌بندی داده‌های فضایی چوله استفاده کرد و دیگر مشکل مانایی تقریبی که ریمستاد و امره (۲۰۱۴) بیان کردند را ندارد.

۴ شبیه‌سازی SGRF مانا

برای شبیه‌سازی از SGRF مانا مطابق روش ریمستاد و امره (۲۰۱۴) و حسینی و کریمی (۲۰۲۱) از شکل تصادفی و روش‌های مونت‌کارلویی استفاده می‌شود و حالتی را انتخاب می‌کنیم که با اصلاح پارامتری شکل توزیع CSN سریع‌تر و دقیق‌تر باشد، سپس با مثال‌های شبیه‌سازی در بعدهای مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به ساختار توزیع CSN (گنزالس فاریس و همکاران، ۲۰۰۴)، بردار تصادفی $\boldsymbol{X}_{p\times ۱}$ که دارای توزیع CSN رابطه (۳) به‌صورت

$$\boldsymbol{X}_{p\times ۱} \overset{d}{=} \mu \mathbf{1}_p + \sigma\sqrt{۱-\gamma^۲}C^{\frac{۱}{۲}}\boldsymbol{Z}_۱ + \sigma\gamma C^{\frac{۱}{۲}}|\boldsymbol{Z}_۲|, \qquad (۷)$$

که در آن $\boldsymbol{Z}_۱$ و $\boldsymbol{Z}_۲$ بردارهای تصادفی p- بعدی از توزیع نرمال به‌صورت $N_p(۰, \mathbf{I}_p)$ و مستقل از هم هستند. طبق رابطه (۷) امیدریاضی و واریانس بردار تصادفی $\boldsymbol{X}_{p\times ۱}$ به‌صورت

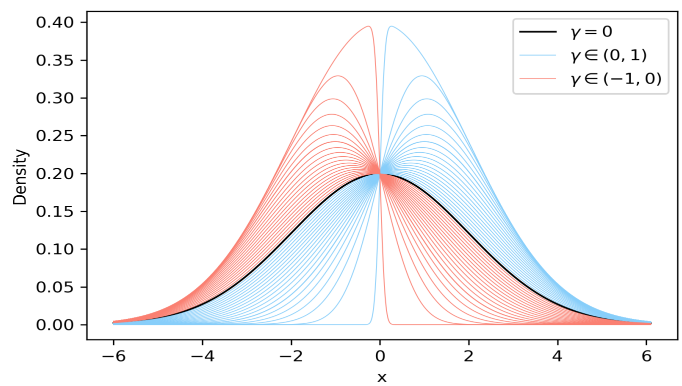
$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}) = \mu\mathbf{1}_p + \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\sigma\gamma C^{\frac{۱}{۲}}\mathbf{1}_p, \quad \mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = \sigma^۲(۱ - \frac{۲}{\pi}\gamma^۲)C,$$

به‌دست می‌آیند، که با به‌کارگیری رابطه $\mathrm{E}|\boldsymbol{Z}_۲| = \sqrt{\frac{۲}{\pi}}\mathbf{1}_p$ حاصل شده‌اند. همچنین می‌توان از الگوریتم‌های ارائه شده توسط بخشی و کریمی (۲۰۱۶) برای شبیه‌سازی در ابعاد بالا استفاده کرد. در ادامه دو مثال شبیه‌سازی با بعدهای مختلف و پارامترهای متفاوت این میدان تصادفی ارائه می‌شود. برای انجام مثال‌ها و مطالعه شبیه‌سازی بخش ۵ از نرم‌افزار Python 3.6 استفاده شده است.

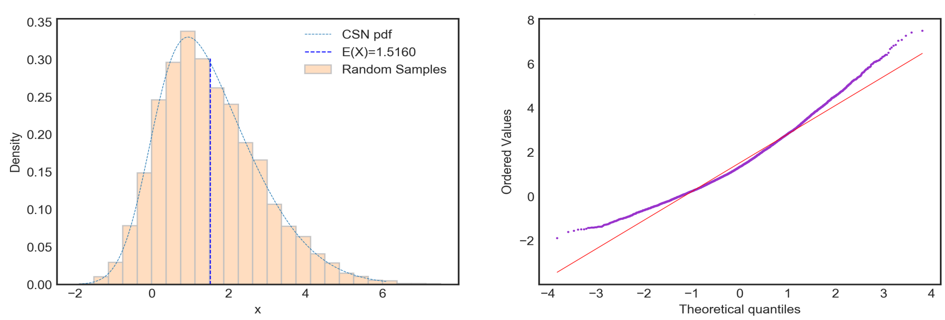
مثال ۱. در این مثال تولید نمونه براساس شکل هم‌توزیعی معرفی شده در رابطه (۷) برای دوحالت یک متغیره ($p = ۱$) و دو متغیره ($p = ۲$) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

حالت اول: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $CSN_{۱,۱}(۰, ۴, \frac{\gamma}{۲}, ۰, ۱-\gamma^۲)$ باشد، که در آن

$\gamma \in (-۱, ۱)$ پارامتر چولگی متفاوت در نظر گرفته شده است. در شکل ۱ چگالی این توزیع برای مقادیر مختلف پارامتر چولگی رسم شده که به‌وضوح نشان می‌دهد پارامتر γ شدت چولگی‌ها و جهت آن‌ها را مشخص می‌کند. هرقدر مقدار پارامتر γ به ۱ و ۱− نزدیک‌تر باشد شدت چولگی بیش‌تر می‌شود. شکل ۲ (چپ) چگالی توزیع X برای $\gamma = ۰/۹۵$ و هیستوگرام نمونه‌های تولید شده به اندازه ۵۰۰۰ از رابطه (۷) به همراه میانگین X را نشان می‌دهد. در این شکل می‌توان دید که نمونه‌های تولید شده به خوبی چگالی



شکل ۱. چگالی توزیع CSN یک متغیره برای مقادیر مختلف γ



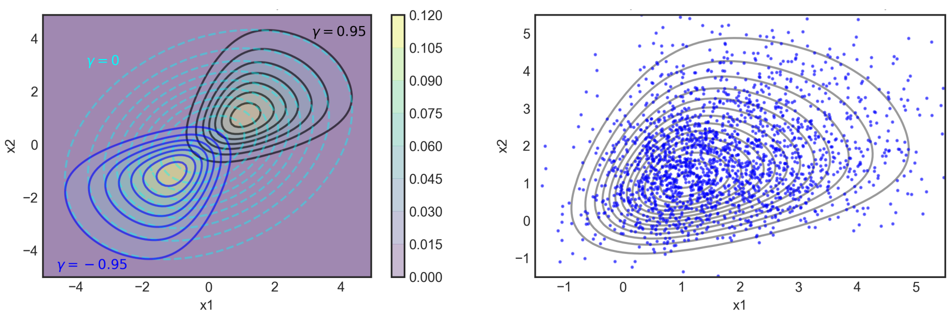
شکل ۲. چپ) چگالی توزیع CSN به همراه هیستوگرام نمونه‌های تولید شده برای $\gamma = ۰/۹۵$ راست) نمودار احتمال نرمال نمونه‌های تولید شده.

توزیع CSN را بیان می‌کنند. در شکل ۲ (راست) نمودار احتمال نرمال نمونه‌های تولید شده رسم شده است که چولگی توزیع CSN را نسبت به توزیع نرمال به‌وضوح نشان می‌دهد.

حالت دوم: فرض کنید بردار تصادفی $\boldsymbol{X}$ دارای توزیع CSN دو متغیره به‌صورت زیر باشد:

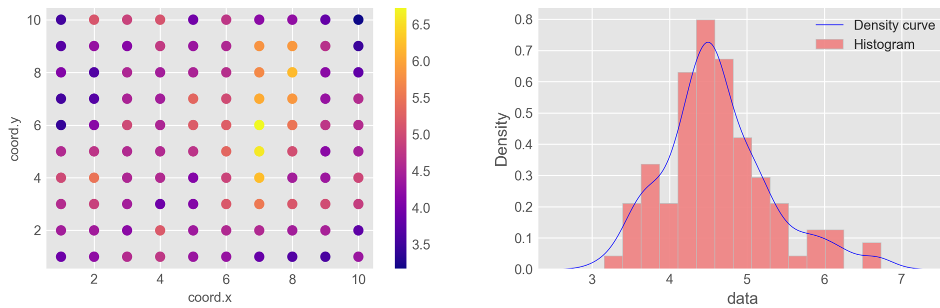
$$CSN_{۲,۲}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, ۴\begin{pmatrix}۱ & ۰/۳\\ ۰/۳ & ۱\end{pmatrix}, \frac{\gamma}{۲}\begin{pmatrix}۱ & ۰/۳\\ ۰/۳ & ۱\end{pmatrix}^{-\frac{۱}{۲}}, \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}, (۱-\gamma^{۲})\mathbf{I}_{۲}\right)$$

شکل ۳ (چپ) نمودار تراز چگالی توزیع $\boldsymbol{X}$ برای سه مقدار متفاوت $\gamma = -۰/۹۵, ۰, ۰/۹۵$ را نشان می‌دهد. در واقع $\gamma = ۰$ همان توزیع نرمال دو متغیره با ضریب همبستگی $\rho = ۰/۳$ را بیان می‌کند که برای مقایسه با چولگی‌های مثبت $(\gamma = ۰/۹۵)$ و منفی $(\gamma = -۰/۹۵)$ در نظر گرفته شده است. شکل ۳ (چپ) تفاوت‌های نمودار تراز را به‌وضوح نشان می‌دهد. نمونه‌های تولید شده از توزیع $\boldsymbol{X}$ برای $\gamma = ۰/۹۵$ به‌صورت نقاط به همراه نمودار تراز در شکل ۳ (راست) رسم شده‌اند، که نشان می‌دهد نمونه‌های تولید شده توسط رابطه (۷) به‌خوبی توزیع $\boldsymbol{X}$ را بیان می‌کنند.

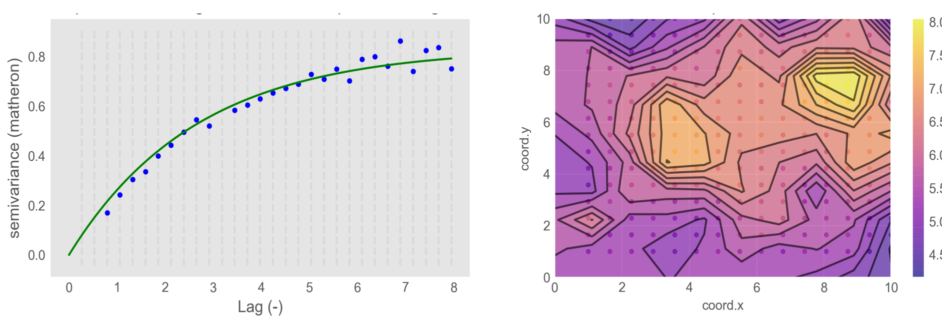


شکل ۳. چپ) کانتورهای توزیع CSN دومتغیره برای γهای مختلف، راست) کانتور CSN دومتغیره برای $\gamma = ۰/۹۵$ به همراه نمونه‌های تولید شده.

مثال ۲. در این مثال، شبیه‌سازی از SGRF مانا در یک مشبکه منظم ۱۰×۱۰ با تابع همبستگی فضایی نمایی بررسی می‌شود. فرض کنید بردار $\boldsymbol{X}$ یک تحقق به حجم $n = ۱۰۰$ از این شبکه منظم با پارامترهای معلوم $\mu = ۲, \sigma^{۲} = ۱, \varphi = ۵, \ \gamma = ۰/۹۵$ باشد، که در آن φ پارامتر همبستگی فضایی است. در این‌جا تابع همبستگی نمایی همسانگرد به‌صورت $\rho(h) = e^{-\frac{h}{\varphi}}$ در نظر گرفته شده است. این تابع برای ساخت ماتریس $\boldsymbol{C}$ استفاده می‌شود که در آن h فاصله اقلیدسی بین دو موقعیت در شبکه ۱۰×۱۰ است. شکل ۴ تحقق $\boldsymbol{X}$ از SGRF مانا را نمایش می‌دهد. در شکل ۴ (چپ) موقعیت داده‌های تولید شده با تفکیک رنگ برای مقدار داده‌ها رسم شده است و هیستوگرام داده‌ها در شکل ۴ (راست) ارائه شده است. یک راه تشخیص مدل تغییرنگار داده‌های فضایی استفاده از تغییرنگار تجربی و رسم آن است که براساس

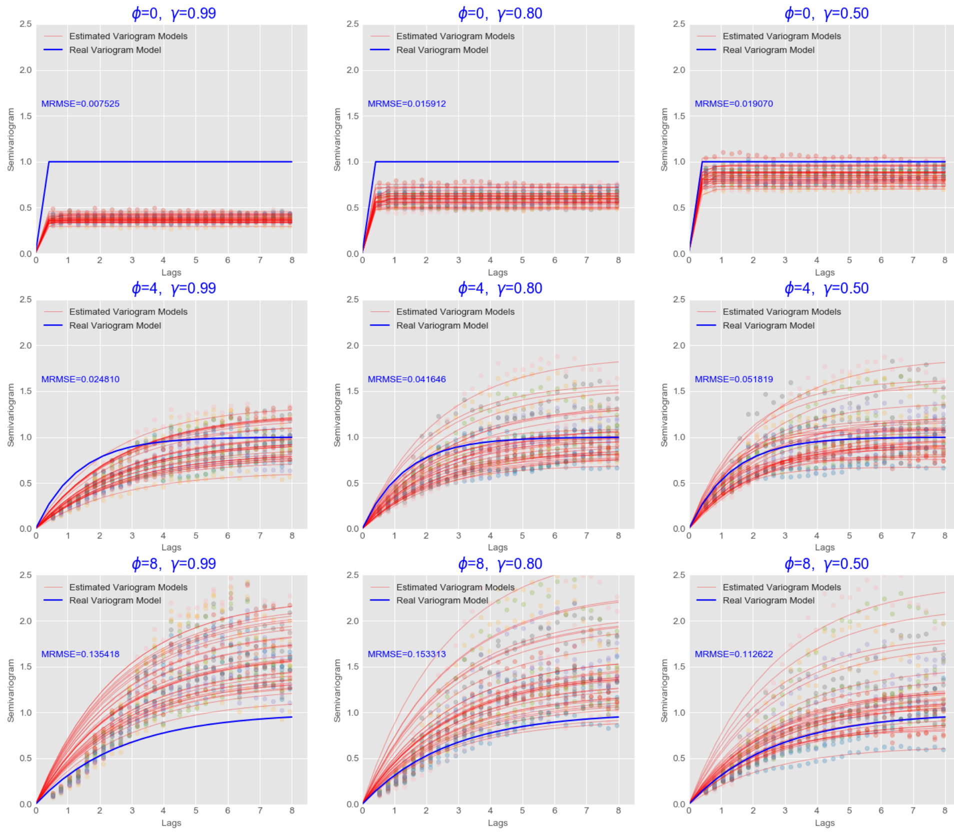


شکل ۴. چپ) موقعیت داده‌های فضایی تولید شده در شبکه ۱۰×۱۰، راست) هیستوگرام داده‌های فضایی تولید شده.



شکل ۵. چپ) نقاط تغییرنگار تجربی و مدل نمایی برازش شده، راست) نمودار تراز و تصویر داده‌های فضایی به روش درون‌یابی.

آن مدل مناسب برازش شود. تغییرنگار تجربی داده‌های فضایی تولید شده با توجه به برآورد ارائه شده توسط کرسی (۱۹۹۳) محاسبه و در شکل ۵ (چپ) رسم شده است. به روش کمترین توان‌های دوم یک مدل نمایی برازش شد که به‌صورت یک خط ممتد در شکل ۵ (چپ) یک برازش مناسب به تغییرنگار تجربی داده است. پارامترهای مدل تغییرنگار نمایی برازش شده به‌صورت $\hat{\sigma}^۲ = ۰٫۸۰۳۱$ و $\hat{\varphi} = ۷٫۹۵۱۷$ به‌دست آمده‌اند. سپس با قاعده درون‌یابی کریگیدن با بهره‌گیری از این مدل تغییرنگار برازش شده نمودار تصویر و تراز داده‌های فضایی شبیه‌سازی شده روی شبکه منظم ۱۰×۱۰ در شکل ۵ (راست) رسم شده‌اند. توجه کنید که برای محاسبه تغییرنگار تجربی و برازش مدل تغییرنگار از شکل توزیعی داده‌ها استفاده نمی‌شود و در واقع روش‌ها ناپارامتری هستند. مسئله اصلی این است که آیا تغییرنگار تجربی کرسی (۱۹۹۳) برای SGRF مانا معرفی شده هم قابل استفاده است؟ آیا پارامتر چولگی γ و پارامتر میزان همبستگی فضایی φ تاثیری روی تغییرنگار تجربی و تشخیص مدل مناسب تغییرنگار دارند؟ برای بررسی این مورد تغییرنگار



شکل ۶. نمودارهای تغییرنگار تجربی و برازش آن‌ها برای ۹ حالت مختلف γ و φ در یک ماتریس ۳×۳

تجربی و برازش مناسب مقادیر مختلف پارامترهای $\gamma = ۰/۵, ۰/۸, ۰/۹۹$ و $\varphi = ۰, ۴, ۸$ در همین شبکه فضایی منظم با همبستگی فضایی نمایی در نظر گرفته شده است. برای هر حالت ۵۰ مجموعه داده فضایی از این میدان تصادفی شبیه‌سازی شد. شکل ۶ مدل‌های تغییرنگار برازش شده براساس تغییرنگار تجربی به همراه مدل اصلی تغییرنگار برای حالت‌های مختلف پارامترهای γ و φ را نمایش می‌دهد. به‌طور کلی می‌توان گفت که این دو پارامتر روی هم تاثیرگذارند و این به‌وضوح در شکل نمایان است، هرچه میزان چولگی بیش‌تر باشد تغییرنگار تجربی به درستی عمل نمی‌کند. اگر میزان چولگی کم باشد تغییرنگار تجربی به‌خوبی عمل می‌کند ، این به‌وضوح در ستون سوم شکل ۶ که مقدار $\gamma = ۰/۵$ است مشاهده می‌شود. اگر میزان همبستگی فضایی نه خیلی کم و نه خیلی زیاد باشد. در واقع شکل‌های سطر دوم شکل ۶، تغییرنگار تجربی برای چولگی‌های بالا هم عملکرد بدی ندارد. اما در کل تغییرنگار تجربی در تشخیص نوع مدل

تغییرنگار مناسب است که در همه موارد مدل نمایی نمایان است. پس می‌توان نتیجه گرفت برای داده‌های واقعی از تغییرنگار تجربی برای تشخیص نوع مدل تغییرنگار می‌توان استفاده کرد و برآورد پارامترها را به یکی از روش‌های درست‌نمایی یا بیزی به‌دست آورد.

۵ تحلیل درست‌نمایی SGRF مانا

برای یک تحقق nتایی از SGRF مانا، تابع درست‌نمایی به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{x}) = \phi_p(\boldsymbol{x};\mu\mathbf{1}_p,\sigma^۲ C_\varphi)\frac{\Phi_p(\frac{\gamma}{\sigma}C_\varphi{}^{-\frac{۱}{۲}}(\boldsymbol{x}-\mu\mathbf{1}_p),\nu\mathbf{1}_p,(۱-\gamma^۲)\mathbf{I}_p}{\Phi_p(\mathbf{0};\nu\mathbf{1}_p,\mathbf{I}_p)},$$

است، که در آن $\boldsymbol{\eta} = (\mu,\sigma^۲,\varphi,\gamma)$ بردار پارامترها است. به ازای $\nu = ۰$ تابع درست‌نمایی به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{x}) \propto \phi_p(\boldsymbol{x};\mu\mathbf{1}_p,\sigma^۲ C_\varphi)\prod_{i=۱}^{p}\Phi_۱(\frac{\gamma}{\sigma\sqrt{۱-\gamma^۲}}z_i)$$

ساده می‌شود، که در آن z_iها مؤلفه‌های بردار $\boldsymbol{z} = C_\varphi{}^{-\frac{۱}{۲}}(\boldsymbol{x}-\mu\mathbf{1}_p)$ است. بنابراین لگاریتم تابع درست‌نمایی را می‌توان به‌صورت

$$\ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{x}) \propto \log\left\{\phi_p(\boldsymbol{x};\mu\mathbf{1}_p,\sigma^۲ C_\varphi)\right\} + \sum_{i=۱}^{p}\log\left\{\Phi_۱(\frac{\gamma}{\sigma\sqrt{۱-\gamma^۲}}z_i)\right\}$$

خلاصه کرد. با توجه به پیچیدگی لگاریتم تابع درستنمایی برای ماکسیمم کردن آن از یکی از روش‌های عددی همانند نیوتن- رافسون می‌توان استفاده کرد. در ادامه با یک مثال شبیه‌سازی برآورد درست‌نمایی پارامترهای SGRF مانا مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۵.۱ مطالعه شبیه‌سازی

در این مطالعه شبیه‌سازی نُه حالت با پارامترهای متفاوت برای SGRF مانا در دو شبکه ۱۰×۱۰ و ۲۰×۲۰ برآورد درست‌نمایی آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. نُه حالت، برحسب چولگی‌های کم و زیاد و همبستگی‌های فضایی کم و زیاد به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

حالت اول، دوم و سوم $\gamma = ۰$ و φ به ترتیب ۲، ۸ و ۱۰، در حالت چهارم، پنجم و ششم $\gamma = ۰٫۸$ و φ به ترتیب ۲، ۸ و ۱۰ و در حالت هفتم، هشتم و نهم $\gamma = ۰٫۹۹$ و φ به ترتیب ۲، ۸ و ۱۰ در نظر گرفته شد. برای همه نُه حالت پارامتر $\mu = ۲$ و $\sigma^۲ = ۱$ هستند و شبیه‌سازی در شبکه ۱۰ × ۱۰ به حجم ۱۰۰ و شبکه ۲۰ × ۲۰ به حجم ۴۰۰ صورت گرفت. همچنین برای ارزیابی برآورد پارامترها از معیار مجذور میانگین توان دوم خطاها به‌صورت $RMSE(\hat{\eta}) = \sqrt{\frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m}(\hat{\eta}_i - \eta_i)^۲}$ با $m = ۱۰۰$ مجموعه داده شبیه‌سازی استفاده شده است، که در آن $\hat{\eta}_i$ برآورد درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی برای مجموعه داده iام است. نتایج همه حالت‌ها برای شبکه ۱۰ × ۱۰ در جدول ۱ خلاصه شده است. با توجه به RMSEهای جدول ۱ در سه حالت اول که چولگی صفر است برآورد درست‌نمایی پارامترهای

جدول ۱. میانگین برآورد درست‌نمایی، انحراف معیار (sd) و RMSE پارامترهای SGRF مانا برای ۱۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده در حالت‌های مختلف شبکه ۱۰ × ۱۰.

	حالت اول				حالت دوم				حالت سوم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۱٫۷۲	۱٫۱۵۶	۱٫۳۲	۸	۴٫۷۹	۲٫۱۲۴	۳٫۷۸۹	۱۰	۵٫۵۹	۱٫۹۹۸	۴٫۷۹۶
γ	۰	۰٫۰۲	۰٫۳۱۹	۰٫۳۰۳	۰	۰٫۰۱	۰٫۳۱۰	۰٫۲۹۴	۰	۰٫۰۱	۰٫۳۱۱	۰٫۲۹۵
σ	۱	۰٫۹۳	۰٫۲۷۸	۰٫۲۷۴	۱	۰٫۷۹	۰٫۱۶۰	۰٫۲۶۲	۱	۰٫۷۶	۰٫۱۲۵	۰٫۲۶۴
μ	۲	۲٫۰۱	۱٫۰۴۴	۰٫۹۹۱	۲	۱٫۸۷	۱٫۲۷۵	۱٫۲۱۶	۲	۱٫۸۷	۱٫۳۵۷	۱٫۲۹۳
	حالت چهارم				حالت پنجم				حالت ششم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۱٫۹۶	۱٫۳۱۴	۱٫۲۴۸	۸	۷٫۴۴	۱٫۵۷۹	۱٫۵۹۹	۱۰	۹٫۱۰	۳٫۴۵۲	۳٫۳۹۶
γ	۰٫۸۵	۰٫۹۶	۰٫۰۴۹	۰٫۱۴۴	۰٫۸۵	۰٫۹۸	۰٫۰۰۱	۱٫۱۴۹	۰٫۸۵	۰٫۹۹	۰٫۰۰۱	۰٫۱۴۱
σ	۱	۰٫۹۵	۰٫۱۱۳	۰٫۱۱۵	۱	۰٫۹۴	۰٫۱۳۹	۰٫۱۴۴	۱	۰٫۹۱۰	۰٫۱۷۶	۰٫۱۸۹
μ	۲	۲٫۰۰	۱٫۰۰۲	۰٫۹۵۰	۲	۲٫۲۴	۰٫۷۳۰	۰٫۷۳۳	۲	۲٫۲۳	۱٫۲۷۴	۱٫۲۳۰
	حالت هفتم				حالت هشتم				حالت نهم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۲٫۲۶	۱٫۰۲۷	۱٫۰۰۷	۸	۶٫۳۶	۲٫۳۳۵	۲٫۷۴۱	۱۰	۷٫۰۰	۲٫۵۰۰	۳٫۸۲۶
γ	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۰۰۱	۰٫۰۰۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹	۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۱
σ	۱	۱٫۰۲	۰٫۱۹۵	۰٫۱۸۶	۱	۰٫۸۶	۰٫۱۵۷	۰٫۲۰۶	۱	۰٫۷۷	۰٫۱۲۳	۰٫۲۵۳
μ	۲	۱٫۷۵	۱٫۷۱۱	۱٫۶۴۲	۲	۳٫۲۹	۱٫۵۱۲	۱٫۹۲۸۱	۲	۳٫۹۴	۱٫۲۲۱	۲٫۲۶۰

φ و μ با افزایش همبستگی فضایی بدتر شده‌اند یعنی مقدار RMSE آن‌ها افزایش یافته است اما برای دو پارامتر دیگر γ و σ تفاوت چندانی مشاهده نمی‌شود. در سه حالت دوم که چولگی نسبتا زیاد است با افزایش همبستگی فضایی همانند سه حالت اول برآوردهای φ و μ بدتر شده‌اند و پارامترهای γ و σ تفاوت چندانی ندارند. همین نتیجه برای سه حالت آخر نیز مشاهده می‌شود. وقتی پارامتر چولگی γ نزدیک به یک است برآورد پارامتر μ مناسب نیست. به‌طور کلی می‌توان گفت که پارامترهای چولگی و همبستگی فضایی

تاثیر زیادی روی برآورد درست‌نمایی پارامترهای SGRF مانا می‌گذارد و بیشترین تغییرات در پارامتر φ مشاهده می‌شود. در برآورد درست‌نمایی پارامترهای میدان تصادفی چوله، هنگام مواجهه با داده‌هایی که همبستگی فضایی زیاد و چولگی بالایی دارند، لازم است بررسی بیشتری صورت گیرد. ممکن است در این حالت استفاده از روش‌های برآورد جایگزین همانند روش بیزی مناسب‌تر باشد.

برای بررسی بیش‌تر، تحلیل درست‌نمایی برای یک شبکه بزرگ‌تر به اندازه ۲۰ × ۲۰ انجام شده است و نتایج در جدول ۲ خلاصه شده‌اند. با توجه به نتایج جدول ۲، با افزایش پارامتر همبستگی فضایی φ در

جدول ۲. میانگین برآورد درست‌نمایی، انحراف معیار (sd) و RMSE پارامترهای SGRF مانا برای ۱۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده در حالت‌های مختلف شبکه ۲۰ × ۲۰.

	حالت اول				حالت دوم				حالت سوم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۱/۲۸	۰/۵۱۵	۰/۸۷۳	۸	۴/۰۷	۰/۸۶۹	۴/۰۱۹	۱۰	۴/۹۶	۰/۷۵۱	۵/۰۸۵
γ	۰	۰/۰۴	۰/۱۸۸	۰/۱۸۴	۰	۰/۰۸	۰/۱۷۲	۰/۱۸۱	۰	۰/۰۸	۰/۱۸۱	۰/۱۹۰
σ	۱	۰/۸۱	۰/۱۵۴	۰/۲۴۱	۱	۰/۷۲	۰/۰۷۲	۰/۲۸۵	۱	۰/۷۲	۰/۰۵۲	۰/۲۸۸
μ	۲	۱/۷۰	۱/۶۱۲	۱/۵۵۹	۲	۱/۴۷	۱/۷۹۳	۱/۷۸۲	۲	۱/۴۲	۱/۹۵۵	۱/۹۴۴
	حالت چهارم				حالت پنجم				حالت ششم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۱/۸۰	۰/۰۹۷	۰/۲۱۸	۸	۸/۲۷	۰/۵۶۰	۰/۵۹۵	۱۰	۱۰/۳۱۲	۰/۶۹۴	۰/۷۲۸۰
γ	۰/۸۵	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۱۴۹	۰/۸۵	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۱۴۹	۰/۸۵	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۱۴۹
σ	۱	۰/۹۵	۰/۰۴۲	۰/۶۲۰	۱	۱/۰۲	۰/۰۲۹	۰/۰۳۳	۱	۱/۰۲	۰/۰۲۹۱	۰/۰۳۲
μ	۲	۲/۶۶	۰/۳۷۴	۰/۷۴۹۰	۲	۱/۵۸	۰/۵۳۳	۰/۶۵۷۰	۲	۱/۶۰	۰/۵۲۰	۰/۶۳۷
	حالت هفتم				حالت هشتم				حالت نهم			
پارامتر	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE	واقعی	برآورد	sd	RMSE
φ	۲	۲/۱۱	۰/۳۲۰	۰/۳۲۲	۸	۷/۳۸	۰/۷۸۸	۰/۹۷۱	۱۰	۸/۳۲	۲/۱۸۸	۲/۶۶۷
γ	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۹	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۹	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۰۰۰	۰/۰۰۱
σ	۱	۱/۰۱	۰/۰۶۹	۰/۰۶۷	۱	۰/۹۴	۰/۰۵۲	۰/۰۷۴	۱	۰/۸۶	۰/۱۰۴	۰/۱۷۵
μ	۲	۱/۸۰	۱/۲۹۶	۱/۲۴۵	۲	۳/۰۶	۰/۸۹۸	۱/۳۵۹	۲	۴/۵۱	۱/۹۵۱	۳/۱۲۰

اکثر حالت‌ها، RMSE پارامترهای φ و μ افزایش می‌یابد و همچنین با افزایش پارامتر چولگی γ، به‌طور متوسط RMSE پارامترهای φ و μ افزایش یافته است. یعنی به‌طور کلی پارامتر چولگی و همبستگی فضایی φ تاثیر قابل توجهی در برآورد درست‌نمایی پارامترها دارند. برای بررسی تاثیر دامنه فضایی در تحلیل درست‌نمایی یک تحلیل حساسیت روی چهار شبکه منظم به‌صورت ۵ × ۵، ۱۰ × ۱۰، ۲۰ × ۲۰، ۳۰ × ۳۰ و ۴۰ × ۴۰ در نظر گرفته شد و نتایج میانگین RMSE برآورد پارامترها برای ۲۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده با دو حالت پارامتری در جدول ۳ ارائه شده است. نتایج جدول نشان می‌دهد که در هر دو حالت با افزایش دامنه فضایی به‌طور متوسط میانگین RMSE ها کاهش می‌یابد، به‌ویژه برآورد

جدول ۳. نتایج میانگین RMSE برآورد درست‌نمایی پارامترهای SGRF مانا برای ۲۰۰ مجموعه داده شبیه‌سازی شده در دو حالت پارامتری با دامنه‌های مختلف فضایی

	حالت اول					حالت دوم				
پارامتر	۵ × ۵	۱۰ × ۱۰	۲۰ × ۲۰	۳۰ × ۳۰	۴۰ × ۴۰	۵ × ۵	۱۰ × ۱۰	۲۰ × ۲۰	۳۰ × ۳۰	۴۰ × ۴۰
φ	۱٫۳۷۶۵	۱٫۱۳۷۵	۰٫۷۵۹۱	۰٫۱۰۳۸	۰٫۰۸۹۷	۳٫۷۳۳۴	۲٫۷۷۳۷	۰٫۹۳۲۶	۰٫۲۹۲۱	۰٫۱۹۷۲
γ	۰٫۶۵۱۹	۰٫۳۵۰۸	۰٫۳۸۲۸	۰٫۳۷۷۴	۰٫۳۹۰۷	۰٫۰۰۸	۰٫۰۰۸۹	۰٫۰۰۹۲	۰٫۰۰۹۲	۰٫۰۰۹۱
σ	۰٫۲۷۴۳	۰٫۲۴۹۷	۰٫۱۸۹۳	۰٫۰۸۸۷	۰٫۰۵۹۰	۰٫۱۹۷۳	۰٫۱۷۲۹	۰٫۱۲۳۳	۰٫۰۲۶۴	۰٫۰۲۰۷
μ	۱٫۶۴۹۲	۱٫۰۲۳۸	۰٫۹۷۷۶	۰٫۵۶۷۵	۰٫۵۷۹۷	۲٫۷۳۳۰	۲٫۲۵۵۲	۲٫۹۸۰۱	۰٫۹۴۵۹	۰٫۶۷۲۷

درست‌نمایی پارامترهای ϕ و μ کاهش قابل توجهی داشته‌اند. اما با مقایسه حالت اول (عدم چولگی و همبستگی فضایی کم) با حالت دوم (چولگی زیاد و همبستگی فضایی بالا) می‌توان گفت که برآورد پارامترها تحت تاثیر چولگی زیاد و همبستگی بالا از دقت کمتری برخوردار هستند. لازم به ذکر است که برای ابعاد بالا شبکه فضایی، تحلیل درست‌نمایی زمان بر خواهد بود و می‌توان از الگوریتم‌های به کار رفته در مقالات محمدزاده و حسینی (۲۰۱۱) و حسینی (۲۰۱۶) استفاده کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله یک میدان تصادفی چوله گاوسی مانا براساس ساختار توزیع CSN معرفی شد که دارای شرط سازگاری حاشیه‌ای بود و SGRF مانا یک میدان تصادفی دقیق در مقابل SGRF تقریبا مانا است که شرط سازگاری حاشیه‌ای را ندارد. برای این میدان تصادفی پیشنهادی نحوه شبیه‌سازی بیان و در حالت‌های مختلف تعیین مدل تغییرنگار براساس واریوگرام تجربی ارائه شد. تغییرنگار داده‌های شبیه‌سازی شده تحت تاثیر پارامترهای چولگی بود. همچنین در این مقاله، تحلیل درست‌نمایی SGRF مانا انجام شد که نتایج مطالعه شبیه‌سازی حاکی از آن بود که برآورد درست‌نمایی پارامترهای این میدان تحت تاثیر پارامترهای چولگی و همبستگی فضایی هستند. به‌عنوان پیشنهاد می‌توان از روش‌های جایگزین برای برازش SGRF مانا همانند روش‌های بیز و بیز تقریبی برای ارتقای دقت برآورد پارامترها استفاده کرد.

مراجع

Adler, R.J. (1981), *The Geometry of Random Fields*, Wiley, Chichester.

Allard, D. and Naveau, P. (2007), A New Spatial Skew-Normal Random

Field Model, *Communications in Statistics— Theory and Methods*, **36**, 1821-1834.

Azzalini, A. and Dalla-Valle, A. (1996), The Multivariate Skew-Normal Distribution, *Biometrika*, **83**, 715–726.

Bakhshi Shojaei, M. and Karimi, O. (2016), Simulation of Closed Skew Normal and Closed Skew-T Distributions for Bayesian Seismic Inversion Model, *Journal of Statistical Sciences*, **10**, 45-65.

Cressie, N. (1993), *Statistics for spatial data*, Wiley, New York.

Gonzalez-Farias, G., Dominguez-Molina, A. and Gupta, A. K. (2004), The Closed Skew Normal Distribution. In: *Genton M. G., ed. Skew-elliptical distributions and their applications: A journey beyond normality*. Boca Raton, FL: Chapman and Hall CRC, 25-42.

Hosseini, F. (2016), A New Algorithm for Estimating the Parameters of the Spatial Generalized Linear Mixed Models, *Environmental and Ecological Statistics*, **23**, 205-217.

Hosseini, F. and Karimi, O. (2020), Approximate Likelihood Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models with Closed Skew Normal Latent Variables, *Communication in Statistics- Simulation and Computation*, **49**, 121-134.

Hosseini, F. and Karimi, O. (2021), Approximate Pairwise Likelihood Inference in SGLM Models with Skew Normal Latent Variables, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **398**, 113692.

Hristopulos, D. T. (2020), *Random Fields for Spatial Data Modeling:*

A Primer for Scientists and Engineers, Springer Nature B.V., Springer Netherlands, Germany.

Karimi, O. and Mohammadzadeh, M. (2011), Bayesian Spatial Prediction for Discrete Closed Skew Gaussian Random Field, *Mathematical Geosciences* **43**, 565–582

Karimi, O. and Mohammadzadeh, M. (2012), Bayesian Spatial Regression Models with Closed Skew Normal Correlated Errors and Missing, *Statistical Papers* **53(1)**, 205-218.

Karimi, O., Omre, H. and Mohammadzadeh, M. (2010), Bayesian Closed-skew Gaussian Inversion of Seismic AVO Data for Elastic Material Properties, *Geophysics,* **75**, R1-R11.

Karimi, O., Hosseini, F. and Mohammadzadeh, M. (2011), Pairwise Likelihood in Spatial GLMM with Skew Normal Latent Variables, *Proceedings of 15th Conference of the International Association for Mathematical Geology,* Salzburg, Australia.

Kim, H.M. and Mallick, B.K. (2004), A Bayesian Prediction using the Skew Gaussian Distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **120**, 85–101.

Mohammadzadeh, M. and Hosseini, F. (2011), Maximum Likelihood Estimation for Spatial GLM Models, *Procedia Environmental Sciences*, **3**, 63-68.

Mahmoudian, B. (2018), On the Existence of Some Skew-Gaussian Random Field Models, *Statistics & Probability Letters*, **137**, 331-335.

Rimstad, K. and Omre, H. (2014), Skew-Gaussian Random Fields, *Spatial Statistics* **10**, 43-62.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 549-566
DOI: 10.29252/jss.15.2.549

Introducing a Stationary Skew–Gaussian Random Field

Omid Karimi، Fatemeh Hosseini
Department of Statistics, Semnan University, Semnan , Iran.

Abstract: The Gaussian random field is commonly used to analyze spatial data. One of the important features of this random field is having essential properties of the normal distribution family, such as closure under linear transformations, marginalization and conditioning, which makes the marginal consistency condition of the Kolmogorov extension theorem. Similarly, the skew-Gaussian random field is used to model skewed spatial data. Although the skew-normal distribution has many of the properties of the normal distribution, in some definitions of the skew-Gaussian random field, the marginal consistency property is not satisfied. This paper introduces a stationery skew-Gaussian random field, and its marginal consistency property is investigated. Then, the spatial correlation model of this skew random field is analyzed using an empirical variogram. Also, the likelihood analysis of the introduced random field parameters is expressed with a simulation study, and at the end, a discussion and conclusion are presented.

Keywords: Gaussian random field, skew-Gaussian random field, spatial data, Stationarity.

Mathematics Subject Classification (2010): 60G15, 62M30, 60G60.