مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۳۴۱ – ۳۶۲
DOI: 10.29252/jss.15.2.341
مقاله پژوهشی

مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده

ابراهیم امینی‌سرشت[1] و قباد برمال‌زن[2]

[1] گروه آمار، دانشگاه بوعلی سینا همدان

[2] گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۷/۱۴ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۱/۰۶

چکیده: در این مقاله، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود. تحت شرایط مشخصی روی توابع نرخ خطر پایه، نرخ خطر وارون پایه و پارامترهای مقیاس، ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب پراکندگی و ترتیب میانگین باقیمانده عمر، میان سیستم‌های موازی و سری اثبات شده است. همچنین نشان داده شده است که نتایج برای دو خانواده از توزیع‌های گاما و پاراتو با چندین دورافتاده نیز برقرار است.
واژه‌های کلیدی: ترتیب پراکندگی، ترتیب نسبت درستنمایی، سیستم سری، سیستم موازی، مدل مقیاس با چندین دورافتاده.

۱ مقدمه

یک خانواده کلی از توزیع‌ها که شامل توزیع‌های معروفی مانند نمایی، رایلی، وایبل، گاما، پاراتو و غیره می‌شود خانواده توزیع‌های مقیاس است. فرض کنید $F(\cdot)$ یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(\cdot)$ باشد. آنگاه متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$ متعلق به خانواده توزیع‌های مقیاس

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم امینی‌سرشت، e.amini64@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05, 60E15 .

هستند هرگاه $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$ باشند، که در آن $\lambda_i > 0$. به عبارت دیگر $X_1, \ldots, X_n$ متعلق به خانواده توزیع‌های مقیاس هستند هرگاه به ازای $i = 1, \ldots, n$ ،$X_i \sim F(\lambda_i x)$ برقرار باشد. در این حالت، $F(\cdot)$ تابع توزیع پایه و λ_i ها پارامترهای مقیاس نامیده می‌شوند. مقایسه‌های تصادفی آماره‌های مرتب متشکل از این خانواده از توزیع‌ها ابتدا توسط پلدگر وپروشان (۱۹۷۱) و از آن زمان به بعد، توسط نویسندگان دیگری از جمله هو (۱۹۹۵)، بن و پالتانه (۲۰۰۶)، خالدی و همکاران (۲۰۱۱)، و بالاکریشنان و ژائو (۲۰۱۳) مورد بررسی قرار گرفت. آماره‌های مرتب $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده[1]، نظریه صف، بیم‌سنجی، مدیریت ریسک و غیره دارد. به عنوان مثال، در کاربردهای قابلیتی، $X_{n-k+1:n}$ متناظر با طول عمر یک سیستم k از n است. این سیستم تا زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه از سیستم سالم باشد و کار کند. به ویژه، $k = n$ و $k = 1$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی است که متناظر با کوچکترین و بزرگترین آماره های مرتب هستند. مطالعات زیادی در رابطه با مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های مستقل ناهمگن از توزیع‌های مختلف انجام شده است. برخی از مطالعات اخیر عبارتند از خالدی و همکاران (۲۰۱۱)، برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۷)، برمال‌زن و همکاران (۲۰۱۹)، برمال‌زن و شهرکی ده‌سوخته (۲۰۲۰)، برمال‌زن و همکاران (۲۰۲۰b)، برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴)، برمال‌زن و حیدری (۱۳۹۸) و امینی سرشت و همکاران (۲۰۱۶). نکته‌ای که باید مطرح شود این است که در هر کدام از مقالات مذکور، ترتیب نسبت درستنمایی و ترتیب پراکندگی در مدل‌های کاملاً ناهمگن، بررسی نشده است. به همین دلیل، در این مقاله به بررسی این دو نوع ترتیب تصادفی پرداخته شده است.

اخیراً برخی از نویسندگان به بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی متشکل از مولفه‌های وابسته پرداخته‌اند (ژانگ و همکاران ، ۲۰۱۹؛ برمال‌زن و همکاران ، ۲۰۲۰a). در این مقالات به دلیل پیچیدگی محاسبات، ترتیب نسبت درستنمایی و ترتیب پراکندگی میان سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های وابسته انجام نشده است. در بسیاری از مواقع، بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های k از n با مولفه‌های مستقل و ناهمگن، کار مشکلی است. بنابراین برای کاهش ناهمگنی، پارامترها را به دو دسته تقسیم می‌کنند و به همین دلیل، مدل‌های با چندین دورافتاده[2] تعریف شده است. در این مقاله، به بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی و سری، در مدل‌های مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود.

تعریف ۱. متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$ از مدل مقیاس با چندین دورافتاده تبعیت می‌کنند

[1] Auction theory
[2] Multiple-outlier models

هرگاه $X_1, \ldots, X_p$ دارای تابع توزیع $F(\lambda x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda f(\lambda x)$ و $X_{p+1}, \ldots, X_n$ دارای تابع توزیع متفاوت دیگری مانند $F(\lambda^* x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda^* f(\lambda^* x)$ باشند.

در رابطه با مقایسه تصادفی سیستم‌های متشکل از مولفه‌های با چندین دورافتاده، می‌توان به ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۲، ۲۰۱۵) مراجعه نمود. در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی و نماد $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای هم علامت بودن a و b است.

تعریف ۲. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع $F_X(x) = P(X \leq x)$ و $F_Y(x) = P(Y \leq x)$، توابع بقای $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(x)$، توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(x)$، توابع نرخ خطر $r_X(x) = f_X(x)/\bar{F}_X(x)$ و $r_Y(x) = f_Y(x)/\bar{F}_Y(x)$، معکوس‌های از راست پیوسته F_X^{-1} و F_Y^{-1} باشند.

الف- X در ترتیب نرخ خطر، بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه نسبت $\bar{F}_X(x)/\bar{F}_Y(x)$، تابعی صعودی از $x \geq 0$ باشد.

ب- X در ترتیب نسبت درستنمایی، بزرگتر از Y است $(X \geq_{lr} Y)$ هرگاه نسبت $f_X(x)/f_Y(x)$، تابعی صعودی از $x \geq 0$ باشد.

ج- X در ترتیب پراکندگی بزرگتر از Y است $(X \geq_{disp} Y)$ هرگاه $F_X^{-1}(v) - F_Y^{-1}(v)$، تابعی صعودی از $v \geq 0$ باشد.

د- X در میانگین باقیمانده عمر بزرگتر از Y است $(X \geq_{mrl} Y)$ هرگاه به ازای $x \geq 0$ نابرابری $m_X(x) \geq m_Y(x)$ باشد که در آن $m_X(x) = E(X - x | X \geq x)$ و $m_Y(x) = E(Y - x | Y \geq x)$ است.

میان ترتیب‌های تصادفی مطرح شده، روابط

$$X \geq_{lr} Y \Longrightarrow X \geq_{hr} Y \Longrightarrow E(X) \geq E(Y),$$
$$X \geq_{disp} Y \Longrightarrow Var(X) \geq Var(Y).$$

برقرار هستند. مولر و استویان (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) منابع مناسبی برای بررسی و شناخت ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها هستند.

تعریف ۳. فرض کنید $a_{(n)} \leq \ldots \leq a_{(1)}$ و $b_{(n)} \leq \ldots \leq b_{(1)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ باشند.

الف- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = ۱, \dots, n-۱$، $\sum_{j=۱}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=۱}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=۱}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=۱}^{n} b_{(j)}$.

ب- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از بالا، بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \overset{w}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = ۱, \dots, n$، $\sum_{j=۱}^{i} a_{(j)} \leq \sum_{j=۱}^{i} b_{(j)}$.

ج- بردار $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن ضعیف از پایین، بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ است ($\mathbf{a} \succeq_w \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = ۱, \dots, n$، $\sum_{j=i}^{n} a_{(j)} \geq \sum_{j=i}^{n} b_{(j)}$.

د- بردار $\mathbf{a}$ در $\mathbb{R}^+$، p-بزرگتر از بردار $\mathbf{b}$ در $\mathbb{R}^+$ است ($\mathbf{a} \overset{p}{\succeq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = ۱, \dots, n$، $\prod_{j=۱}^{i} a_{(j)} \leq \prod_{j=۱}^{i} b_{(j)}$.

تعریف ۴. X در ترتیب صعودی محدب بزرگتر از Y است ($X \geq_{icx} Y$) هرگاه برای توابع صعودی محدب $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ داشته باشیم $E[\phi(X)] \geq E[\phi(Y)]$.

مفهوم بیشاندن ارتباط نزدیکی با پراکندگی دارد. زیرا اگر $\mathbf{a}$ به معنای بیشاندن بزرگتر از $\mathbf{b}$ باشد ($\mathbf{a} \overset{m}{\succeq} \mathbf{b}$) آنگاه دامنه بردار $\mathbf{a}$ یعنی $a_{(n)} - a_{(۱)}$ بزرگتر از دامنه بردار $\mathbf{b}$ یعنی $b_{(n)} - b_{(۱)}$ است و در نتیجه بردار $\mathbf{a}$ پراکنده‌تر از بردار $\mathbf{b}$ است. باید توجه داشت که ترتیب بیشاندن، ترتیب‌های بیشاندن ضعیف از بالا و پایین را نتیجه می‌دهد و همچنین برای بردارهای مثبت، ترتیب بیشاندن ضعیف از بالا، ترتیب p-بزرگتر را نتیجه می‌دهد (خالدی و کوچار، ۲۰۰۲؛ مارشال و همکاران، ۲۰۱۱).

فرض کنید $X_۱, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل مقیاس با پارامترهای مقیاس $\lambda_۱, \dots, \lambda_n$ و تابع نرخ خطر پایه $r(\cdot)$ باشند. همچنین فرض کنید $X_۱^*, \dots, X_n^*$ مجموعه‌ای دیگر از متغیرهای مستقل مقیاس با پارامترهای مقیاس $\lambda_۱^*, \dots, \lambda_n^*$ و تابع نرخ خطر پایه $r(\cdot)$ باشند. خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند اگر $x^۲ r'(x)$ تابعی نزولی باشد در این صورت

$$(\lambda_۱, \dots, \lambda_n) \succeq^m (\lambda_۱^*, \dots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{۱:n} \geq_{hr} X_{۱:n}^*. \qquad (۱)$$

تحت برقراری رابطه (۱) و اینکه $r(\cdot)$ تابعی نزولی باشد، در این صورت

$$(\lambda_۱, \dots, \lambda_n) \succeq^m (\lambda_۱^*, \dots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{۱:n} \geq_{disp} X_{۱:n}^*. \qquad (۲)$$

بعلاوه اگر $xr(x)$ تابعی نزولی باشد، در این صورت

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \succeq^p (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{st} X_{n:n}^*,$$

و اگر $x^2 r'(x)$ تابعی نزولی باشد در این صورت

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \succeq^m (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{rh} X_{n:n}^*.$$

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{p}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{q}) = (\lambda_1 \mathbf{1}_p, \lambda_2 \mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq 2$ و همه درایه‌های بردارهای $\mathbf{1}_p$ و $\mathbf{1}_q$ برابر عدد ۱ هستند. فرض کنید $X_{n:n}(p, q)$ و $X_{1:n}(p, q)$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های موازی و سری متشکل از این مولفه های مقیاس با چندین دورافتاده باشند. تحت فرض‌های فوق و چندین محدودیت روی توابع نرخ خطر وارون پایه و نرخ خطر پایه، در رابطه با سیستم‌های موازی، روابط

$$\begin{aligned}
&\lambda_2^* = \lambda_2 = \lambda \quad \text{و} \quad \lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1 \Longrightarrow X_{n:n}(p, q) \geq_{lr[disp]} X_{n:n}^*(p, q),\\
&(\lambda_1, \lambda_2) \succeq^p (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Longrightarrow X_{n:n} \geq_{disp} X_{n:n}^*,\\
&X_1 \geq_{mrl} X_1^* \quad \text{و} \quad \lambda \geq \max\{\lambda_1, \lambda_1^*\} \Longrightarrow X_{n:n}(p, q) \geq_{mrl} X_{n:n}^*(p, q).
\end{aligned}$$

اثبات شده است. در رابطه با سیستم‌های سری، تحت چندین محدودیت روی توابع نرخ خطر پایه، روابط

$$\begin{aligned}
&\lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1 \Longrightarrow X_{1:n}(p, q) \geq_{lr[disp]} X_{1:n}^*(p, q),\\
&(\lambda_1, \lambda_2) \succeq^p (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Longrightarrow X_{1:n} \geq_{disp} X_{1:n}^*.
\end{aligned}$$

نیز حاصل شده است. همچنین از توزیع گاما و پاراتو با چندین دور افتاده، به عنوان مصداق‌هایی از نتایج اثبات شده، استفاده شده است. مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از مولفه‌های مدل مقیاس با چندین دورافتاده، از لحاظ ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی، ترتیب پراکندگی و ترتیب میانگین باقیمانده عمر در بخش ۲ انجام شده است. در بخش ۳ به بررسی ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی و ترتیب

پراکندگی میان سیستم‌های سری متشکل از مولفه‌های مدل مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته شده است. مصداق‌های از نتایج اثبات شده برای توزیع گاما و پاراتو در بخش ۴ ارائه شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری در انتهای مقاله بیان شده است.

۲ نتایج مربوط به سیستم‌های موازی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، از لحاظ ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب پراکندگی وترتیب میانگین باقیمانده عمر پرداخته می‌شود.

لم ۱. (دینگ و لی ، ۲۰۱۲) فرض کنید g_1، g_2 و g توابع نامنفی و پیوسته‌ای باشند، به طوری که $\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ و $\frac{g(x)}{g_2(x)-g_1(x)}$ توابعی صعودی باشند و g_1 و g_2 یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نکنند. در این صورت تابع $\frac{g_1(x)+g(x)}{g_2(x)+g(x)}$ صعودی است.

قضیه ۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda_1\mathbf{1}_p, \lambda\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند که در آن $p+q=n \geq 2$ و $p \geq 1$ است. همچنین فرض کنید $X_1^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda_1^*\mathbf{1}_p, \lambda\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p+q=n \geq 2$ و $p \geq 1$ است. اگر توابع $x\tilde{r}(x)$ و $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ نزولی باشند، آنگاه

$$\lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1 \Longrightarrow X_{n:n}(p,q) \geq_{lr} X_{n:n}^*(p,q).$$

برهان: توابع چگالی احتمال $X_{n:n}(p,q)$ و $X_{n:n}^*(p,q)$ به ترتیب به صورت

$$f_{X_{n:n}(p,q)}(t) = [F(\lambda_1 t)]^p [F(\lambda t)]^q [p\lambda_1 r(\lambda_1 t) + q\lambda r(\lambda t)], \qquad t > 0,$$
$$f_{X^*_{n:n}(p,q)}(t) = [F(\lambda_1^* t)]^p [F(\lambda t)]^q [p\lambda_1^* r(\lambda_1^* t) + q\lambda r(\lambda t)], \qquad t > 0.$$

هستند. برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود به ازای $t > 0$،

$$\begin{aligned} \frac{f_{X_{n:n}(p,q)}(t)}{f_{X^*_{n:n}(p,q)}(t)} &= \frac{[F(\lambda_1 t)]^p}{[F(\lambda_1^* t)]^p}\ \frac{p\lambda_1 r(\lambda_1 t) + q\lambda r(\lambda t)}{p\lambda_1^* r(\lambda_1^* t) + q\lambda r(\lambda t)} \\ &= \Upsilon(t)\ \frac{p\lambda_1 r(\lambda_1 t) + q\lambda r(\lambda t)}{p\lambda_1^* r(\lambda_1^* t) + q\lambda r(\lambda t)}, \end{aligned} \tag{3}$$

تابعی صعودی از t است، که در آن $\Upsilon(t) = [F(\lambda_1 t)]^p/[F(\lambda_1^* t)]^p$ است. بدین منظور، با مشتق گرفتن از $\Upsilon(t)$ نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} \Upsilon'(t) &\overset{sgn}{=} p\lambda_1[F(\lambda_1 t)]^{p-1} f(\lambda_1 t)[F(\lambda_1^* t)]^p - p\lambda_1^*[F(\lambda_1^* t)]^{p-1} f(\lambda_1^* t)[F(\lambda_1 t)]^p \\ &\overset{sgn}{=} \lambda_1 \tilde{r}(\lambda_1 t) - \lambda_1^* \tilde{r}(\lambda_1^* t). \end{aligned}$$

که در آن $\tilde{r} = \frac{f}{F}$ تابع نرخ خطر معکوس است. اکنون فرض کنید $x_1 = \lambda_1 t$ و $x_2 = \lambda_1^* t$. چون $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^*$ بنابراین $0 \leq x_1 \leq x_2$ و در نتیجه

$$\Upsilon'(t) \overset{sgn}{=} \frac{1}{t}\ [x_1 \tilde{r}(x_1) - x_2 \tilde{r}(x_2)] \geq 0,$$

که نامنفی بودن آن از نزولی بودن $x\tilde{r}(x)$ نتیجه می‌شود. برای صعودی بودن جمله دوم (۳) نسبت به t، براساس لم ۱، کافی است نشان داده شود $\Psi_1(t) = \frac{\lambda_1 \tilde{r}(\lambda_1 t)}{\lambda_1^* \tilde{r}(\lambda_1^* t)}$ و $\Psi_2(t) = \frac{\lambda \tilde{r}(\lambda t)}{\lambda_1^* \tilde{r}(\lambda_1^* t) - \lambda_1 \tilde{r}(\lambda_1 t)}$ توابعی صعودی از t هستند. با مشتق گرفتن از $\Psi_1(t)$ نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} \Psi_1'(t) &\overset{sgn}{=} \lambda_1 \tilde{r}'(\lambda_1 t)\tilde{r}(\lambda_1^* t) - \lambda_1^* \tilde{r}'(\lambda_1^* t)\tilde{r}(\lambda_1 t) \\ &\overset{sgn}{=} \lambda_1 \frac{\tilde{r}'(\lambda_1 t)}{\tilde{r}(\lambda_1 t)} - \lambda_1^* \frac{\tilde{r}'(\lambda_1^* t)}{\tilde{r}(\lambda_1^* t)} \\ &\overset{sgn}{=} \frac{x_1 \tilde{r}'(x_1)}{\tilde{r}(x_1)} - \frac{x_1^* \tilde{r}'(x_1^*)}{\tilde{r}(x_1^*)} \geq 0, \end{aligned}$$

نامنفی بودن عبارت آخر، با قرار دادن $x_1 = \lambda_1 t$ و $x_1^* = \lambda_1^* t$ و اینکه $x_1^* \geq x_1$ و سپس نزولی بودن

$\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ حاصل شده است. اکنون با مشتق گرفتن از $\Psi_2(t)$ نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned}
\Psi_2'(t) &\overset{sgn}{=} \lambda_1^*\lambda[\lambda\tilde{r}'(\lambda t)\tilde{r}(\lambda_1^* t) - \lambda_1^*\tilde{r}'(\lambda_1^* t)\tilde{r}(\lambda t)] \\
&+ \lambda_1\lambda[\lambda_1\tilde{r}'(\lambda_1 t)\tilde{r}(\lambda t) - \lambda\tilde{r}'(\lambda t)\tilde{r}(\lambda_1 t)] \\
&\overset{sgn}{=} \lambda_1^*\lambda[\lambda\frac{\tilde{r}'(\lambda t)}{\tilde{r}(\lambda t)} - \lambda_1^*\frac{\tilde{r}'(\lambda_1^* t)}{\tilde{r}(\lambda_1^* t)}] + \lambda_1\lambda[\lambda_1\frac{\tilde{r}'(\lambda_1 t)}{\tilde{r}(\lambda_1 t)} - \lambda\frac{\tilde{r}'(\lambda t)}{\tilde{r}(\lambda t)}] \\
&\overset{sgn}{=} x_1 x[x\frac{\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)} - x_1^*\frac{\tilde{r}'(x_1^*)}{\tilde{r}(x_1^*)}] + x_1 x[x_1\frac{\tilde{r}'(x_1)}{\tilde{r}(x_1)} - x\frac{\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}] \\
&\geq x_1^* x_1[x\frac{\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)} - x_1^*\frac{\tilde{r}'(x_1^*)}{\tilde{r}(x_1^*)} + x_1\frac{\tilde{r}'(x_1)}{\tilde{r}(x_1)} - x\frac{\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}] \\
&= x_1^* x_1[\frac{x_1\tilde{r}'(x_1)}{\tilde{r}(x_1)} - \frac{x_1^*\tilde{r}'(x_1^*)}{\tilde{r}(x_1^*)}] \geq 0,
\end{aligned}$$

با قرار دادن $\lambda t = x$، $\lambda_1 t = x_1$ و $\lambda_1^* t = x_1^*$ بسادگی نتیجه می‌شود $x \geq x_1^* \geq x_1$ است و لذا نابرابری (۴) برقرار می شود. در ادامه نامنفی بودن عبارت آخر، با توجه به شرط قضیه که $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ تابعی نزولی نسبت به x است، حاصل شده است و با توجه به این واقعیت که $x_1^* \geq x_1$ نتیجه می دهد $\frac{x_1\tilde{r}'(x_1)}{\tilde{r}(x_1)} \geq \frac{x_1^*\tilde{r}'(x_1^*)}{\tilde{r}(x_1^*)}$.

تذکر ۱. در قضیه ۱، اگر شرط $\lambda_1^* \geq \lambda \geq \lambda_1$ با شرط $\lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1$ عوض شود و سایر شرایط قضیه تغییر نکند، آنگاه جهت ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی، برعکس می‌شود.

لم ۲. (ساندرز و موران ، ۱۹۷۸) فرض کنید $\{F_a|\ a \in \mathbb{R}\}$ کلاسی از توزیع‌ها باشد که روی بازه $(t_0, t_1) \subseteq (0, \infty)$ متمرکز شده‌اند. در این صورت

$$F_a \leq_{disp} F_{a^*}, \qquad a, a^* \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq a^*,$$

اگر و فقط اگر $\frac{F_a'(x)}{f_a(x)}$ تابعی نزولی از x باشد که در آن F_a' بیانگر مشتق F_a نسبت به a است.

قضیه ۲. تحت فرضیات قضیه ۱، اگر توابع $x\tilde{r}(x)$ و $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ نزولی باشند، آنگاه

$$\lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1 \Longrightarrow X_{n:n}(p, q) \geq_{disp} X_{n:n}^*(p, q).$$

برهان: بدون از دست رفتن کلیت مساله، فرض کنید $a = \lambda - \lambda_1$ و $a^* = \lambda - \lambda_1^*$. واضح است که

$a \geq a^*$. توابع توزیع و چگالی $X_{n:n}(p,q)$ به ترتیب به صورت

$$F_{n:n,a}(t) = [F((\lambda-a)t)]^p [F(\lambda t)]^q, \quad t > \circ,$$
$$f_{n:n,a}(t) = [F((\lambda-a)t)]^p [F(\lambda t)]^q [(\lambda-a)pr((\lambda-a)t) + \lambda q r(\lambda t)], \quad t > \circ,$$

هستند. با مشتق گرفتن از $F_{n:n,a}$ نسبت به a داریم

$$F'_{n:n,a} = -t \cdot \tilde{r}((\lambda-a)t)[F((\lambda-a)t)]^p [F(\lambda t)]^q.$$

که در آن $\tilde{r}((\lambda-a)t) = \frac{f((\lambda-a)t)}{F((\lambda-a)t)}$. طبق لم ۲ کافی است نشان داده شود

$$-\frac{F'_{n:n,a}(t)}{f_{n:n,a}(t)} = \frac{t}{(\lambda-a)p + \lambda q \nu(t)}$$

تابعی صعودی از t است، که در آن $\nu(t) = \frac{\tilde{r}(\lambda t)}{\tilde{r}((\lambda-a)t)}$. بنابراین باید اثبات کرد که $\nu(t)$ تابعی نزولی از t است. با مشتق گرفتن از $\nu(t)$ نسبت به t داریم

$$\begin{aligned} \nu'(t) &\overset{sgn}{=} \lambda \tilde{r}'(\lambda t)\tilde{r}((\lambda-a)t) - (\lambda-a)\tilde{r}'((\lambda-a)t)\tilde{r}(\lambda t) \\ &\overset{sgn}{=} \lambda \frac{\tilde{r}'(\lambda t)}{\tilde{r}(\lambda t)} - (\lambda-a)\frac{\tilde{r}'((\lambda-a)t)}{\tilde{r}((\lambda-a)t)} \end{aligned}$$

فرض کنید $\lambda t = x_۲$ و $(\lambda-a)t = x_۱$ باشد. بنابراین $\lambda - a \leq \lambda$ و $x_۱ \leq x_۲$ است. در نتیجه

$$\nu'(t) \overset{sgn}{=} \frac{x_۲ \tilde{r}'(x_۲)}{\tilde{r}(x_۲)} - \frac{x_۱ \tilde{r}'(x_۱)}{\tilde{r}(x_۱)} \leq \circ,$$

که نامثبت بودن آن براساس شرط نزولی بودن $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ است.

قضیه ۳. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda_۱ \mathbf{1}_p, \lambda_۲ \mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$ است. همچنین فرض کنید $X_۱^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda_۱^* \mathbf{1}_p, \lambda_۲^* \mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$ است. اگر $p \geq q$ و

توابع $x\tilde{r}(x)$ و $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ توابعی نزولی باشند، آنگاه

$$\lambda_۱ \leq \lambda_۱^* \leq \lambda_۲^* \leq \lambda_۲ \Longrightarrow X_{n:n}(p,q) \geq_{disp} X_{n:n}^*(p,q).$$

برهان: حالت اول: فرض کنید $\lambda_۱\lambda_۲ = \lambda_۱^*\lambda_۲^* = a \geq ۰$ باشد. بدون از دست رفتن کلیت مساله، فرض کنید $\lambda_۲ = \lambda$ و $\lambda_۲^* = \lambda^*$ باشد. بنابراین $\lambda_۱ = \frac{a}{\lambda}$، $\lambda_۱^* = \frac{a}{\lambda^*}$ و با استفاده از این شرط که $\lambda_۱ \leq \lambda_۱^*$ است واضح است که $\lambda \leq \lambda^* \leq \sqrt{a} < ۰$ است. اگر مشتق تابع توزیع $X_{n:n}(p,q)$ با $F'_{\lambda,n:n}(t)$ نشان داده شود و $f_{\lambda,n:n}(t)$ تابع چگالی احتمال $X_{n:n}(p,q)$ باشد، آنگاه براساس لم ۲ کافی است نشان داده شود $\frac{F'_{\lambda,n:n}(t)}{f_{\lambda,n:n}(t)}$ به ازای $\lambda \geq \sqrt{a}$ تابعی نزولی از t است. تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $X_{n:n}(p,q)$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} F_{\lambda,n:n}(t) &= [F(\frac{a}{\lambda}t)]^p[F(\lambda t)]^q, \quad t > ۰. \\ f_{\lambda,n:n}(t) &= [F(\frac{a}{\lambda}t)]^p[F(\lambda t)]^q\left[p\frac{a}{\lambda}\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) + q\lambda\tilde{r}(\lambda t)\right], \quad t > ۰. \end{aligned}$$

با مشتق گرفتن از $F_{\lambda,n:n}(x)$ نسبت به λ داریم:

$$F'_{\lambda,n:n}(x) = [F(\frac{a}{\lambda}t)]^p[F(\lambda t)]^q\left[-p\frac{a}{\lambda^۲}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) + tq\tilde{r}(\lambda t)\right]$$

بنابراین کافی است نشان داده شود

$$-\frac{F'_{\lambda,n:n}(t)}{f_{\lambda,n:n}(t)} = \frac{p\frac{a}{\lambda^۲}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) - tq\tilde{r}(\lambda t)}{p\frac{a}{\lambda}\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) + q\lambda\tilde{r}(\lambda t)} \overset{sgn}{=} t\ \frac{p\frac{a}{\lambda}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) - q\lambda t\tilde{r}(\lambda t)}{p\frac{a}{\lambda}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) + q\lambda t\tilde{r}(\lambda t)} \qquad (۴)$$

تابعی صعودی از t است. با توجه به نزولی بودن $x\tilde{r}(x)$، $p \geq q$ و $\lambda \geq \frac{a}{\lambda}$ می‌توان نتیجه گرفت (۴) تابعی نامنفی است. بنابراین باید نشان داده شود تابع نامنفی

$$\psi(t) = \frac{p\frac{a}{\lambda}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) - q\lambda t\tilde{r}(\lambda t)}{p\frac{a}{\lambda}t\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t) + q\lambda t\tilde{r}(\lambda t)} = \frac{p\frac{a}{\lambda} - q\lambda\upsilon(t)}{p\frac{a}{\lambda} + q\lambda\upsilon(t)} \qquad (۵)$$

تابعی صعودی از t است، که در آن $\upsilon(t) = \frac{\tilde{r}(\lambda t)}{\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t)}$. لازم است توجه شود که (۵) تابعی صعودی از t

است، اگر و فقط اگر $\upsilon(t)$ تابعی نزولی از t باشد. با مشتق گرفتن از $\upsilon(t)$ نسبت به t داریم:

$$\upsilon'(t) \overset{sgn}{=} \frac{\lambda\tilde{r}'(\lambda t)}{\tilde{r}(\lambda t)} - \frac{\frac{a}{\lambda}\tilde{r}'(\frac{a}{\lambda}t)}{\tilde{r}(\frac{a}{\lambda}t)}. \quad (۶)$$

با قرار دادن $\frac{a}{\lambda}t = x_۱$ و $\lambda t = x_۲$، چون $\lambda \leq \frac{a}{\lambda} \leq ۰$، مشاهده می‌شود $x_۲ \leq x_۱ \leq ۰$، در نتیجه

$$\upsilon'(t) \overset{sgn}{=} \frac{x_۲\tilde{r}'(x_۲)}{\tilde{r}(x_۲)} - \frac{x_۱\tilde{r}'(x_۱)}{\tilde{r}(x_۱)} \leq ۰,$$

که نامثبت بودن عبارت آخر، از شرط نزولی بودن $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ حاصل می‌شود.

حالت دوم: فرض کنید $\lambda_۱^*\lambda_۲^* < \lambda_۱\lambda_۲$ باشد. بنابراین حداقل یک θ وجود دارد که روابط $\lambda_۱ \leq \theta$ و $\theta\lambda_۲ = \lambda_۱^*\lambda_۲^*$ برقرار باشند. بدون از دست رفتن کلیت مساله، فرض کنید $\theta = \frac{\lambda_۱^*\lambda_۲^*}{\lambda_۲}$. بنابراین $\lambda_۲ \leq \theta$ و $\theta\lambda_۲ = \lambda_۱^*\lambda_۲^*$. اکنون فرض کنید $Z_۱, \ldots, Z_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\theta\mathbf{1}_p, \lambda_۲\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$ است. با استفاده از حالت اول، می‌توان نتیجه گرفت:

$$Z_{n:n}(p,q) \geq_{disp} X^*_{n:n}(p,q). \quad (۷)$$

چون $\lambda_۱ \geq \theta \geq \lambda_۲$، بنابر قضیه ۲ داریم:

$$X_{n:n}(p,q) \geq_{disp} Z_{n:n}(p,q). \quad (۸)$$

با استفاده از نابرابری‌های (۷) و (۸) نتیجه لازم حاصل می‌شود.

فرع ۱. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda_۱\mathbf{1}_p, \lambda_۲\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$. همچنین فرض کنید $X_۱^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند، که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با پارامترهای $(\lambda\mathbf{1}_p, \lambda\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$ است. اگر $p \geq q$ و توابع $x\tilde{r}(x)$ و $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ نزولی باشند، آنگاه بنابر قضیه ۳، $X_{n:n}(p,q) \geq_{disp} X^*_{n:n}(p,q) \Longrightarrow \lambda \geq (\lambda_۱\lambda_۲)^{\frac{1}{n}}$.

لم ۳. (بارلو و پروشان ، ۱۹۹۶) فرض کنید $W(x)$ یک اندازه لبگ-اشتلیس، نه لزوماً مثبت، باشد به

طوری که به ازای $t > ۰$ نابرابری $\int_t^\infty dW(x) \geq ۰$ برقرار باشد و $h(x) \geq ۰$ تابعی صعودی باشد. در این صورت $\int_t^\infty h(x)dW(x) \geq ۰$.

لم ۴. (هو و همکاران، ۲۰۰۱) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع به ترتیب F و G باشند به طوری که $X \leq_{mrl} Y$ باشد. اگر $h(x)$ تابعی نامنفی و کراندار و صعودی باشد، آنگاه به ازای $t \geq ۰$ داریم $\frac{\int_t^\infty h(x)\overline{F}(x)dx}{\overline{F}(t)} \leq \frac{\int_t^\infty h(x)\overline{G}(x)dx}{\overline{G}(t)}$.

قضیه ۴. تحت فرضیات قضیه ۱، اگر $p \geq q$ و تابع $xr(x)$ صعودی و $X_۱ \geq_{mrl} X_۱^*$ باشد، آنگاه

$$\lambda \geq \max\{\lambda_۱, \lambda_۱^*\} \Longrightarrow X_{n:n}(p,q) \geq_{mrl} X^*_{n:n}(p,q).$$

برهان: **حالت اول:** فرض کنید $\overline{F}_{X_{p:p}}(t) \geq \overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)$. توابع میانگین باقیمانده عمر $X_{n:n}(p,q)$ و $X^*_{n:n}(p,q)$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} m_{X_{n:n}(p,q)}(t) &= \frac{\int_t^\infty (۱ - [F(\lambda_۱ x)]^p [F(\lambda x)]^q)dx}{۱ - [F(\lambda_۱ t)]^p [F(\lambda t)]^q} \\ &= \frac{\int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx}{\overline{F}_{X_{q:q}}(t) + \overline{F}_{X_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t)}, \\ m_{X^*_{n:n}(p,q)}(t) &= \frac{\int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx}{\overline{F}_{X_{q:q}}(t) + \overline{F}_{X^*_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t)}. \end{aligned}$$

کافی است نشان داده شود $\Psi(t) = m_{X_{n:n}(p,q)}(t) - m_{X^*_{n:n}(p,q)}(t) \geq ۰$. باید توجه داشت

$$\begin{aligned} \Psi(t) &\overset{sgn}{=} [\overline{F}_{X_{q:q}}(t) + \overline{F}_{X^*_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t)][\int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx] \\ &- [\overline{F}_{X_{q:q}}(t) + \overline{F}_{X_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t)][\int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx] \\ &= \overline{F}_{X_{q:q}}(t) \int_۰^\infty [\overline{F}_{X_{p:p}}(x) - \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x)] F_{X_{q:q}}(x)dx \\ &+ \overline{F}_{X^*_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t) \int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx \\ &- \overline{F}_{X_{p:p}}(t) F_{X_{q:q}}(t) \int_t^\infty (\overline{F}_{X_{q:q}}(x) + \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x) F_{X_{q:q}}(x))dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \overline{F}_{X_{q:q}}(t)\int_{\circ}^{\infty}[\overline{F}_{X_{p:p}}(x)-\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(x)]F_{X_{q:q}}(x)dx && (۹)\\
&+ \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F_{X_{q:q}}(t)\int_{t}^{\infty}(\overline{F}_{X_{q:q}}(x)+\overline{F}_{X_{p:p}}(x)F_{X_{q:q}}(x))dx\\
&- \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F_{X_{q:q}}(t)\int_{t}^{\infty}(\overline{F}_{X_{q:q}}(x)+\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(x)F_{X_{q:q}}(x))dx\\
&= \overline{F}_{X_{q:q}}(t)\int_{t}^{\infty}[\overline{F}_{X_{p:p}}(x)-\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(x)]F_{X_{q:q}}(x)dx\\
&+ \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F_{X_{q:q}}(t)\int_{t}^{\infty}[\overline{F}_{X_{p:p}}(x)-\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(x)]F_{X_{q:q}}(x)dx\\
&\geq \circ, && (۱۰)
\end{aligned}
$$

که در آن نابرابری (۹) با استفاده از $\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(t)\geq\overline{F}_{X_{p:p}}(t)$ و اینکه $X_{۱}\geq_{mrl}X^{*}_{۱}$ نتیجه می‌دهد $X_{۱}\geq_{icx}X^{*}_{۱}$ حاصل می‌شود. زیرا با استفاده از نتیجه ۴.A.۱۶ از شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) نابرابری تصادفی $X_{p:p}\geq_{icx}X^{*}_{p:p}$ نتیجه می‌شود و می‌توان استدلال کرد به ازای $t\in\mathbb{R}^{+}$، نابرابری

$$\int_{t}^{\infty}[\overline{F}_{X_{p:p}}(x)-\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(x)]dx\geq\circ.$$

همواره برقرار است. نابرابری (۱۰) نیز با استفاده از لم ۳ حاصل می‌شود.

حالت دوم: فرض کنید $\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(t)\leq\overline{F}_{X_{p:p}}(t)$ باشد. رابطه (۹) را می‌توان به صورت

$$m_{X_{n:n}(p,q)}(t)=\frac{\int_{t}^{\infty}[\overline{F}(\lambda x)\sum_{j=\circ}^{q-۱}F^{j}(\lambda x)+(۱-F^{p}(\lambda_{۱}x))F^{q}(\lambda x)]dx}{\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=\circ}^{q-۱}F^{j}(\lambda t)+(۱-F^{p}(\lambda_{۱}t))F^{q}(\lambda t)}.$$

نوشت. بنابراین

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{X_{p:p}}(t)\Psi(t)&\overset{sgn}{=}\overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^{q}(\lambda t)[\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(t)-\overline{F}_{X_{p:p}}(t)]\int_{t}^{\infty}\overline{F}(\lambda x)\sum_{j=\circ}^{q-۱}F^{j}(\lambda x)dx\\
&+\overline{F}_{X_{p:p}}(t)[\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=\circ}^{q-۱}F^{j}(\lambda t)+\overline{F}_{X^{*}_{p:p}}(t)F^{q}(\lambda t)]\int_{t}^{\infty}\overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^{q}(\lambda x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)[\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda t)+\overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^q(\lambda t)]\int_t^\infty \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& \geq \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^q(\lambda t)[\overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)-\overline{F}_{X_{p:p}}(t)]\int_t^\infty \overline{F}(\lambda x)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda x)dx \\
& + \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& - \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X^*_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& \geq \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^q(\lambda t)[\overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)-\overline{F}_{X_{p:p}}(t)]\int_t^\infty \overline{F}(\lambda x)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda x)dx \\
& + \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& - \quad \overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)\overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& = \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^q(\lambda t)[\overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)-\overline{F}_{X_{p:p}}(t)]\int_t^\infty \overline{F}(\lambda x)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda x)dx \\
& + \quad \overline{F}(\lambda t)\sum_{j=0}^{q-1}F^j(\lambda t)[\overline{F}_{X_{p:p}}(t)-\overline{F}_{X^*_{p:p}}(t)]\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& \stackrel{sgn}{=} \quad \overline{F}_{X_{q:q}}(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)F^q(\lambda x)dx \\
& - \quad \overline{F}_{X_{p:p}}(t)F^q(\lambda t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{q:q}}(x)dx \\
& \geq \quad F^q(\lambda t)[\overline{F}_{X_{q:q}}(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{p:p}}(x)dx-\overline{F}_{X_{p:p}}(t)\int_t^\infty \overline{F}_{X_{q:q}}(x)dx] \\
& \geq \quad 0,
\end{aligned}
$$

که در آن اولین و دومین نابرابری با استفاده از لم ۴ حاصل می‌شوند. باید توجه داشت که با استفاده از شرط صعودی بودن $xr(x)$ می‌توان نتیجه گرفت $X_1 \geq_{hr} X^*_1$. با استفاده از قضایای ۱.B.۳۶ و ۲.A.۱ از

شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) به ترتیب نابرابری‌های $X_{p:p} \geq_{hr} X^*_{p:p}$ و $X_{p:p} \geq_{mrl} X^*_{p:p}$ نیز نتیجه می‌شود. با کنار هم قرار دادن این مشاهدات، نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.

۳ نتایج مربوط به سیستم‌های سری

قضیه ۵. تحت فرضیات قضیه ۱، اگر توابع $xr(x)$ و $\frac{xr'(x)}{r(x)}$ نزولی باشند، آنگاه

$$\lambda \geq \lambda_1^* \geq \lambda_1 \Longrightarrow X_{1:n}(p,q) \geq_{lr} X^*_{1:n}(p,q).$$

برهان: توابع چگالی احتمال $X_{1:n}(p,q)$ و $X^*_{1:n}(p,q)$ به ازای $t > 0$، به ترتیب عبارتند از:

$$f_{X_{1:n}}(p,q)(t) = p\lambda_1 f(\lambda_1 t)[\overline{F}(\lambda_1 t)]^{p-1}[\overline{F}(\lambda t)]^q + q\lambda f(\lambda t)[\overline{F}(\lambda_1 t)]^p[\overline{F}(\lambda t)]^{q-1},$$
$$f_{X^*_{1:n}(p,q)}(t) = p\lambda_1^* f(\lambda_1^* t)[\overline{F}(\lambda_1^* t)]^{p-1}[\overline{F}(\lambda t)]^q + q\lambda f(\lambda t)[\overline{F}(\lambda_1^* t)]^p[\overline{F}(\lambda t)]^{q-1}.$$

بنابراین به ازای $t > 0$ کافی است نشان داده شود

$$\frac{f_{X_{1:n}(p,q)}(t)}{f_{X^*_{1:n}(p,q)}(t)} = \frac{[\overline{F}(\lambda_1 t)]^p}{[\overline{F}(\lambda_1^* t)]^p}\ \frac{p\lambda_1 r(\lambda_1 t) + q\lambda r(\lambda t)}{p\lambda_1^* r(\lambda_1^* t) + q\lambda r(\lambda t)}, \tag{۱۱}$$

تابعی صعودی از t است، که در آن $r(\cdot)$ تابع نرخ خطر است. با استفاده از شرط $\lambda_1^* \geq \lambda_1$ و نزولی بودن $xr(x)$ و بحثی مشابه قضیه ۱، بسادگی می‌توان نشان داد که عبارت اول رابطه (۱۱) نسبت به t صعودی است. همچنین با استفاده از شرط $\lambda_1^* \geq \lambda_1$ و نزولی بودن $\frac{xr'(x)}{r(x)}$ و بحثی مشابه قضیه ۱ نتیجه می‌شود عبارت دوم رابطه (۱۱) نسبت به t صعودی است. بنابراین نتیجه لازم، حاصل می‌شود.

۴ چند مصداق برای نتایج اثبات شده

نکته‌ای که لازم است بیان شود این است که شرایط بیان شده در قضایای بخش ۲ و ۳ کاملاً کلی هستند و برای برخی از خانواده‌های متعلق به مدل مقیاس، برقرار است. در این بخش، به چندین مصداق در این زمینه پرداخته می‌شود.

لم ۵. (میسرا و وان در میلون ، ۲۰۰۳) فرض کنید Θ یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی و U یک متغیر تصادفی نامنفی متعلق به خانواده $P = \{H(\cdot|\theta), \theta \in \Theta\}$ باشد به طوری که

$$\theta_1 \leq \theta_2 \Longrightarrow H(\cdot|\theta_1) \leq_{st} (\geq_{st}) H(\cdot|\theta_2).$$

همچنین فرض کنید $\psi(u,\theta)$ روی $\mathbb{R} \times \Theta$ تابعی اندازه‌پذیر از u باشد به طوری که به ازای هر θ مقدار $E_\theta[\psi(U,\theta)]$ موجود باشد. در این صورت

الف– $E_\theta[\psi(U,\theta)]$ تابعی صعودی از θ است هرگاه $\psi(u,\theta)$ تابعی صعودی از θ و تابعی صعودی (نزولی) از u باشد.

ب– $E_\theta[\psi(U,\theta)]$ تابعی نزولی از θ است هرگاه $\psi(u,\theta)$ تابعی نزولی از θ و نزولی (صعودی) از u باشد.

فرع ۲. فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند، که از توزیع گاما با چندین دورافتاده با پارامترهای مقیاس $(\lambda_1 \mathbf{1}_p, \lambda_2 \mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند که در آن $p+q = n \geq 2$ و $p \geq 1$ است. فرض کنید $X_1^*, \dots, X_n^*$ نیز متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از توزیع گاما با چندین دورافتاده با پارامترهای مقیاس $(\lambda_1^* \mathbf{1}_p, \lambda_2^* \mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq 2$ و $p \geq 1$ است. در این صورت

الف– اگر $\lambda_2 = \lambda_2^* = \lambda$ و $\min\{\lambda, \lambda_1^*\} \geq \lambda_1$ باشد، آنگاه $X_{n:n}(p,q) \geq_{lr} X_{n:n}^*(p,q)$.

ب– اگر $\lambda_1 \leq \lambda_1^* \leq \lambda_2^* \leq \lambda_2$ و $p \geq q$ باشد، آنگاه

$$(\lambda_1, \lambda_2) \succeq^p (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \Longrightarrow X_{n:n}(p,q) \geq_{disp} X_{n:n}^*(p,q).$$

برهان: برای اثبات کافی است نشان داده شود توابع $x\tilde{r}(x)$، $\tilde{r}(x)$ و $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$ نزولی هستند.
اثبات نزولی بودن $x\tilde{r}(x)$: تابع نرخ خطر وارون توزیع گاما به صورت

$$\tilde{r}(x) = \frac{1}{x\int_0^1 u^{r-1} e^{(1-u)x} du},$$

و مشتق تابع $x\tilde{r}(x)$ به صورت

$$(x\tilde{r}(x))' = \frac{-\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}(\text{۱}-u)e^{(\text{۱}-u)x}du}{\left(\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du\right)^{\text{۲}}},$$

است. با توجه به اینکه به ازای $\circ < u < \text{۱}$، همواره نابرابری $\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}(\text{۱}-u)e^{(\text{۱}-u)x}du \geq \circ$ برقرار است، لذا نزولی بودن تابع $x\tilde{r}(x)$ بدیهی است.

اثبات نزولی بودن $\tilde{r}(x)$: چون توابع $x\tilde{r}(x)$ و $\frac{\text{۱}}{x}$ نزولی و نامنفی هستند، بنابراین $\tilde{r}(x) = x\tilde{r}(x) \times \frac{\text{۱}}{x}$ همواره تابعی نزولی است.

اثبات نزولی بودن $\frac{x\tilde{r}'(x)}{\tilde{r}(x)}$: مشتق تابع $\tilde{r}(x)$ به صورت

$$\tilde{r}'(x) = -\frac{\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du + x\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}(\text{۱}-u)e^{(\text{۱}-u)x}du}{[x\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du]^{\text{۲}}}.$$

است. در نتیجه

$$\eta(x) = \frac{xr'(x)}{r(x)} = -\text{۱} - x\frac{\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}(\text{۱}-u)e^{(\text{۱}-u)x}du}{\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du}.$$

چون $\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}(\text{۱}-u)e^{(\text{۱}-u)x}du$ به ازای $x \geq \circ$ همواره نامنفی است بنابراین کافی است نشان داده شود $\eta(x)$ تابعی نزولی از $x \geq \circ$ است. $\eta(x)$ را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= -x\int_{\circ}^{\text{۱}} (\text{۱}-u)\frac{u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du}{\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du} - \text{۱} \\
&= -x\int_{\circ}^{\text{۱}} \psi(u,x)h(u|x)du - \text{۱} \\
&= -xE[\psi(U,x)] - \text{۱},
\end{aligned}$$

بازنویسی کرد، که در آن $\psi(u,x) = \text{۱} - u$ و $h(u|x) = \frac{u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}}{\int_{\circ}^{\text{۱}} u^{r-\text{۱}}e^{(\text{۱}-u)x}du}$. بنابراین کافی است نشان داده شود $E[\psi(U,x)]$ تابعی صعودی از x است. لازم است توجه شود که تابع توزیع متغیر تصادفی

U متعلق به خانواده $P = \{H(\cdot|x), x \in \mathbb{R}^+\}$ با تابع چگالی احتمال

$$h(u|x) = c(x)u^{r-۱}e^{(۱-u)x} \qquad\qquad ۰ < u < ۱,$$

است، که در آن $c(x)$ ثابت نرمال‌ساز است. واضح است که $\psi(u,x)$ تابعی نزولی نسبت به u و یک مقدار ثابت نسبت به x است. چون به ازای $x_۱ \leq x_۲$ نسبت

$$\frac{h(u|x_۲)}{h(u|x_۱)} = \frac{e^{(۱-u)x_۲}}{e^{(۱-u)x_۱}} = e^{(۱-u)(x_۲-x_۱)}$$

تابعی نزولی نسبت به u است در نتیجه $H(\cdot|x_۱) \geq_{lr} H(\cdot|x_۲)$. بنابراین $H(\cdot|x_۱) \geq_{st} H(\cdot|x_۲)$. بنابر لم ۵، $E[\psi(U,x)]$ تابعی صعودی از x است و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

در فرع ۳ فرض می‌شود پارامترهای مقیاس دو توزیع پاراتو به صورت $\theta_۱ = \frac{۱}{\lambda_۱}$، $\theta_۲ = \frac{۱}{\lambda_۲}$، $\theta_۱^* = \frac{۱}{\lambda_۱^*}$ و $\theta_۲^* = \frac{۱}{\lambda_۲^*}$ باشد.

فرع ۳. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از توزیع پاراتو با چندین دورافتاده با پارامترهای مقیاس $(\theta_۱\mathbf{1}_p, \theta_۲\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$ است. همچنین فرض کنید $X_۱^*, \ldots, X_n^*$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از توزیع پاراتو با چندین دورافتاده با پارامترهای مقیاس $(\theta_۱^*\mathbf{1}_p, \theta_۲^*\mathbf{1}_q)$ تبعیت کنند، که در آن $p + q = n \geq ۲$ و $p \geq ۱$. در این‌صورت

الف– اگر $\theta_۲ = \theta_۲^* = \theta$ و $\min\{\theta, \theta_۱^*\} \geq \lambda_۱$، آنگاه $X_{۱:n}(p,q) \geq_{lr} X_{۱:n}^*(p,q)$.

ب– اگر $\theta_۲ = \theta_۲^* = \theta$، $\theta \geq \max\{\theta_۱, \theta_۱^*\}$ و $\theta_۱^* \geq \theta_۱$، آنگاه $X_{۱:n}(p,q) \geq_{disp} X_{۱:n}^*(p,q)$.

برهان: تابع بقای توزیع پاراتو عبه صورت

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{\lambda}{x}\right)^a, \qquad x \geq \lambda \geq ۰\ , a \geq ۰.$$

است. در این خانواده از توزیع‌ها $۱/\lambda$ پارامتر مقیاس و a پارامتر شکل است. با قرار دادن $\lambda = ۱$ تابع بقا پایه حاصل می‌شود. بنابراین تابع چگالی و تابع نرخ خطر پایه به ترتیب $f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+۱}}$ و $r(x) = \frac{\alpha}{x}$ هستند. بسادگی می‌توان نشان داد $xr(x) = \alpha$ و $\frac{xr'(x)}{r(x)} = -۱$ که توابعی نزولی از x هستند و درنتیجه در شرایط قضیه ۵ صدق می‌کنند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مقایسه تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته شده است. تحت شرایط مشخصی روی توابع نرخ خطر پایه، نرخ خطر وارون پایه و پارامترهای مقیاس، ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب پراکندگی و ترتیب میانگین باقیمانده عمر، میان سیستم‌های موازی و سری اثبات شده است. همچنین نشان داده شده است که همه نتایج، برای مقایسه این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های گاما و پاراتو با چندین دور افتاده برقرار است. بررسی ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی و ترتیب پراکندگی برای سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های وابسته، می‌تواند موضوع مطالعات آتی قرار گیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران محترم و ویراستار مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند. نویسنده دوم بابت حمایت مالی دانشگاه زابل از این مقاله، تشکر و قدردانی می‌نماید. شماره گرنت $UOZ - GR -$ ۳۳۸۹.

مراجع

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶-۱۸۹.

برمال‌زن، ق. حیدری. (۱۳۹۸)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی با مولفه‌های مستقل و ناهمگن تحت نرخ شکست خطی تعمیم‌یافته، مجله علوم آماری، ۱۳، ۳۱۹-۳۳۸.

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، ۱۴، ۳۳۵-۳۵۰.

Balakrishnan, N. and Zhao, P. (2013), Ordering Properties of Order Statistics from Heterogeneous Populations: A Review with an Emphasis on Some Recent Developments, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **27**, 403-443.

Barmalzan, G., Ayat, S. M. and Balakrishnan, N. (2020a), Stochastic Comparisons of Series and Parallel Systems with Dependent Burr Type XII Components, *Communications in Statistics-Theory and Method*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1772307.

Barmalzan, G., Kosari, S. and Balakrishnan, N. (2020b), Usual Stochastic and Reversed Hazard Orders of Parallel Systems with Independent Heterogeneous Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1823415.

Barmalzan, G. and Dehsukhteh, S. S. (2020), Comparisons of Series and Parallel Systems with Heterogeneous Exponentiated Geometric Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, DOI: 10.1080/03610926.2020.1716251.

Barmalzan, G., Najafabadi, A. T. P. and Balakrishnan, N. (2017), Orderings for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull-Geometric Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 9869-9880.

Barmalzan, G., Najafabadi, A. T. P. and Balakrishnan, N. (2019), Ordering Results for Series and Parallel Systems Comprising Heterogeneous Exponentiated Weibull Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **48**, 660-675.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Silver Spring, Maryland.

Boland, P. J., El-Neweihi, E. and Proschan, F. (1994), Schur properties of convolutions of exponential and geometric random variables. *Journal of Multivariate Analysis,*, **48**, 157-167.

Bon, J. L. and Paltanea, E. (2006), Comparisons of Order Statistics in a Random Sequence to the Same Statistics with i.i.d. Variables, *ESAIM: Probability and Statistics,* **10**, 1-10.

Ding, W. and Li, X. (2012), The Optimal Allocation of Active Redundancies to k-out-of-n Systems with respect to Hazard Rate Ordering, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **142**, 1878-1887.

Hu, T. (1995), Monotone Coupling and Stochastic Ordering of Order Statistics, *System Science and Mathematical Sciences,* **8**, 209-214.

Hu, T., Zhu, Z. and Wei, Y. (2001), Likelihood Ratio and Mean Residual Life Order of Order Statistics with Heterogeneous Random Variables, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **15**, 259-272.

Khaledi, B., Farsinezhad, S. and Kochar, S. C. (2011), Stochastic Comparisons of Order Statistics in the Scale Model, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **141**, 276-286.

Khaledi, B. and Kochar, S. C. (2002), Dispersive Ordering among Linear Combinations of Uniform Random Variables, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **100**, 13-21.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications,* Springer, New York.

Misra, N. and van der Meulen, E. C. (2003), On Stochastic Properties of M-spacings. *Journal of Statistical Planning and Inferences.* **115**, 683-697.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley & Sons, New York.

Pledger, P. and Proschan, F. (1971), Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, In: *Optimizing Methods in Statistics* (Ed., J.S. Rustagi), pp. 89-113, Academic Press, New York.

Saunders, I.W. and Moran, P.A. (1978), On the Quantiles of the Gamma and F Distributions, *Journal of Applied Probability*, **15**, 426-432.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders,* Springer, New York.

Zhang, Y., Cai, X., Zhao, P. and Wang, H. (2019), Stochastic Comparisons of Parallel and Series Systems with Heterogeneous Resilience-Scaled Components, *Statistics*, **53**, 126-147.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2012), Stochastic Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Exponential Models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 159-182.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2015), Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Gamma Models, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **17**, 617-645.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 341-362
DOI: 10.29252/jss.15.2.341

Stochastic Comparisons of Parallel and Series Systems Comprising Multiple-Outlier Scale Components

Amini-Seresht, E.[1] and Barmalzan, G.[2]
[1]Department of Statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
[2]Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Abstract: This paper discusses stochastic comparisons of the parallel and series systems comprising multiple-outlier scale components. Under uncertain conditions on the baseline reversed hazard rate, hazard rate functions and scale parameters, the likelihood ratio, dispersive and mean residual life orders between parallel and series systems are established. We then apply the results for two exceptional cases of the multiple-outlier scale model: gamma and Pareto multiple-outlier components to illustrate the found results.

Keywords: Dispersive Order; Likelihood Ratio Order; Series System; Parallel System; Multiple-Outlier Scale Model.
Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.