مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۴۰۰
جلد ۱۵، شماره ۲، ص ۴۲۷ – ۴۴۲
DOI: 10.29252/jss.15.2.427
مقاله پژوهشی

چندین ترتیب تصادفی میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس

قباد برمال‌زن[۱]، علی‌اکبر حسین‌زاده[۲] و ابراهیم امینی سرشت[۳]

[۱] گروه آمار، دانشگاه زابل

[۲] گروه ریاضی، دانشگاه زابل

[۳] گروه آمار، دانشگاه بوعلی سینا همدان

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۱   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۵/۱۷

چکیده: در این مقاله، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n مورد بحث قرارگرفته است. تحت شرایطی روی پارامترهای مقیاس و بیشاندن ضعیف از پایین میان بردار اندازه نمونه‌ها، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، اثبات شده است. همچنین تحت شرایطی مشخص روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی میان این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های وابسته مورد بحث قرارگرفته است.

واژه‌های کلیدی: ترتیب نرخ خطر، ترتیب تصادفی معمولی، مدل مقیاس با چندین دورافتاده، ترتیب بیشاندن از پایین، سیستم‌های $(n-۱)$ از n.

۱ مقدمه

در علوم آماری، مدل‌های کلی و متفاوتی معرفی شده‌اند که مدل مقیاس یکی از آن‌ها است. متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \cdots, X_n$ را به‌ترتیب با توابع توزیع $F_1, \cdots, F_n$ در نظر بگیرید. گفته می‌شود

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: قباد برمال‌زن، ghbarmalzan@uoz.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P05, 60E15 .

این متغیرها از مدل مقیاس پیروی می‌کنند هرگاه یک تابع توزیع مطلقاً پیوسته مانند F با تابع چگالی احتمال f و اعداد ثابت و مثبت $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$ موجود باشند به طوری که به ازای $i = ۱, \cdots, n$ برابری $F_i(x) = F(\lambda_i x)$ برقرار باشد. در این حالت، توزیع F را توزیع پایه و $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$ را پارامترهای مقیاس می‌نامند. اگر $f_۱, \cdots, f_n$ به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی توابع چگالی احتمال متغیرهای تصادفی $X_۱, \cdots, X_n$ باشند آنگاه به‌سادگی می‌توان نشان داد $f_i(x) = \lambda_i f(\lambda_i x)$ است. توزیع‌های شناخته شده‌ای مانند نمایی، نرمال، وایبول و گاما و گامای تعمیم‌یافته، حالت‌های خاصی از مدل مقیاس هستند. فصل‌های ۷ و ۱۶ از کتاب مارشال و الکین (۲۰۰۷) منبع مناسبی برای بیان خواص مدل مقیاس و کاربردهای آن است.

آماره‌های مرتب که به صورت $X_{۱:n}, \cdots, X_{n:n}$ نمایش داده می‌شوند با مرتب کردن متغیرهای تصادفی $X_۱, \cdots, X_n$ از کوچک به بزرگ حاصل می‌شود. این آماره‌ها کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده، نظریه صف، بیم‌سنجی، مدیریت ریسک و غیره دارد. به عنوان مثال، در کاربردهای قابلیتی، $X_{n-k+۱:n}$ متناظر با طول عمر یک سیستم k از n است. این سیستم تا زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه از سیستم سالم باشد و کار کند. به ویژه، $k = n$ و $k = ۱$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی است. یک حالت مهم دیگر، سیستم‌های $(n-۱)$ از n هستند که در آن‌ها خرابی یکی از مولفه‌ها تاثیری بر فعالیت سیستم نداشته $(Safe)$ اما با ازکار افتادن دومین مولفه، سیستم نیز از فعالیت باز می‌ماند $(Fail)$. بنابراین سیستم‌های $(n-۱)$ از n به سیستم‌های $Fail - Safe$ نیز در مباحث قابلیت اعتماد معروف هستند. (بارلو و پروشان ، ۱۹۹۶)

بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $Fail - Safe$ متشکل از مولفه‌های همگن نمایی از لحاظ ترتیب مانده عمر، ترتیب پراکندگی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی ارائه کردند. با استفاده از این نتایج، می‌توان یک سیستم $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های ناهمگن نمایی را با هر سیستم $(m-۱)$ از m متشکل از مولفه‌های همگن نمایی را مقایسه کرد. در همین راستا، ژانگ و همکاران (۲۰۱۹) شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $(n-۱)$ از n، تحت شوک‌های تصادفی، از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی بدست آوردند. امینی سرشت و همکاران (۲۰۱۶) ترتیب‌های استار، لورنتس، پراکندگی میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n (دومین آماره مرتب) متشکل از مولفه‌های مستقل نرخ خطر متناسب با چندین دورافتاده اثبات کردند. کای و همکاران (۲۰۱۷) ترتیب نرخ خطر را میان این‌گونه سیستم‌ها بررسی و اثبات کردند.

در بسیاری از مواقع، بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n با مولفه‌های مستقل و

ناهمگن، کار مشکلی است. بنابراین در این‌گونه موارد و برای کاهش ناهمگنی، پارامترها را به دو دسته تقسیم می‌کنند و به همین دلیل، مدل‌های با چندین دورافتاده[1] تعریف شده است. در این مقاله، به بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n در مدل‌های مقیاس با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود. مدل مقیاس با چندین دورافتاده به این صورت تعریف می‌شود که $X_۱,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که در آن $X_۱,\cdots,X_p$ دارای تابع توزیع $F(\lambda x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda f(\lambda x)$ و $X_{p+۱},\cdots,X_n$ دارای تابع توزیع متفاوت دیگری مانند $F(\lambda^* x)$ و تابع چگالی احتمال $\lambda^* f(\lambda^* x)$ هستند. در حقیقت در مدل‌های با چندین دورافتاده، همه متغیرها هم‌توزیع نیستند و به دو دسته از نظر هم‌توزیع بودن تقسیم می‌شوند. در رابطه با مقایسه تصادفی سیستم‌های متشکل از مولفه‌های با چندین دورافتاده، می‌توان به ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۲)، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۵)، امینی سرشت و برمال‌زن (۱۳۹۹) و امینی سرشت و برمال‌زن (۱۴۰۰) مراجعه نمود.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی متغیرهای تصادفی مستقل مقیاس با چندین دورافتاده است و ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n انجام شده است. به صورت دقیق‌تر، فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۱ x)\mathbf{1}_p,\bar{F}(\lambda x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند و $Y_۱,\cdots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۲ x)\mathbf{1}_p,\bar{F}(\lambda x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ و $p,q\geq ۱$ است. اگر $\lambda_۲\geq\lambda_۱$ و $tr(t)$ صعودی باشد آنگاه $X_{۲:n}\geq_{hr}Y_{۲:n}$. از طرف دیگر، فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۱ x)\mathbf{1}_p,\bar{F}(\lambda_۲ x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ است. همچنین فرض کنید $Y_۱,\cdots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۱ x)\mathbf{1}^*_p,\bar{F}(\lambda_۲ x)\mathbf{1}^*_q)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p^*+q^*=n$ و $p^*,q^*\geq ۱$ است. اگر $\lambda_۲\geq\lambda_۱$ و $tr(t)$ صعودی باشد آنگاه تحت $p^*\leq p\leq q\leq q^*$ داریم:

$$(p,q)\preceq_w(p^*,q^*)\Longrightarrow X_{۲:n}\geq_{hr}Y_{۲:n}.$$

همچنین از توزیع گامای تعمیم‌یافته که شامل توزیع‌های نمایی، وایبل و گاما است به عنوان مصداقی از نتایج اثبات شده، استفاده شده است. سرانجام، تحت شرایطی مشخص روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی میان این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های وابسته مورد بحث قرار گرفته است.

[1] Multiple-outlier models

در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است. نتایج اصلی شامل مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دور افتاده، از لحاظ ترتیب نرخ خطر در بخش ۳ انجام شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری در انتهای مقاله ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی، نظریه بیشاندن و تابع مفصل ارائه شده است که در بخش‌های بعدی مقاله، از آن‌ها استفاده می‌شود. در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی و نماد $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای هم علامت بودن a و b است.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع بقای $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(x)$، توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(x)$، توابع نرخ خطر $r_X(x) = f_X(x)/\bar{F}_X(x)$ و $r_Y(x) = f_Y(x)/\bar{F}_Y(x)$ باشند.

(الف) X در ترتیب تصادفی معمولی، بزرگتر از Y است $(X \geq_{st} Y)$ هرگاه $\bar{F}_X(x) \geq \bar{F}_Y(x)$، به ازای $x \geq 0$.

(ب) X در ترتیب نرخ خطر، بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه $r_Y(x) \geq r_X(x)$، به ازای $x \geq 0$.

تعریف ۲. (مارشال و همکاران ، ۲۰۱۱) فرض کنید $a_{(1)} \leq \cdots \leq a_{(n)}$ و $b_{(1)} \leq \cdots \leq b_{(n)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ باشند.

(الف) بردار $\mathbf{a}$ توسط بردار $\mathbf{b}$ بیشانده می‌شود $(\mathbf{a} \overset{m}{\preceq} \mathbf{b})$ هرگاه به ازای هر $i = 1, \cdots, n-1$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}$.

(ب) بردار $\mathbf{a}$ توسط بردار $\mathbf{b}$ از پایین بیشانده می‌شود $(\mathbf{a} \preceq_w \mathbf{b})$ هرگاه به ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $\sum_{j=i}^{n} a_{(j)} \leq \sum_{j=i}^{n} b_{(j)}$.

(ج) بردار $\mathbf{a}$ توسط بردار $\mathbf{b}$ از بالا بیشانده می‌شود ($\mathbf{a} \overset{w}{\preceq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $\sum_{j=۱}^{n} a_{i)} \geq \sum_{j=۱}^{i} b_{(i)}$.

برای جزئیات بیشتر در مورد بیشاندن برداری و کاربردهای آن‌ها، به مارشال و همکاران (۲۰۱۱) و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) مراجعه شود.

لم ۱. (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و پیوسته روی $\mathcal{D} = \{x : x_۱ \geq x_۲ \geq \cdots \geq x_n\}$ و دارای مشتق پیوسته روی نقاط درونی $\mathcal{D}$ باشد. تحت $\mathbf{x} \preceq_w (\overset{w}{\preceq})\mathbf{y}$ روی $\mathcal{D}$ نابرابری $\phi(x) \leq \phi(y)$ برقرار است اگر و فقط اگر به ازای z متعلق به نقاط درونی $\mathcal{D}$ نابرابری‌های $\phi_۱(z) \geq \cdots \geq \phi_n(z) \geq ۰$ و $(۰ \leq \phi_۱(z) \leq \cdots \leq \phi_n(z))$ برقرار باشد.

تعریف ۳. بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_۱, \cdots, X_n)$ را با تابع توزیع توام F، تابع بقای توام $\bar{F}$ و توابع توزیع حاشیه‌ای‌های تک متغیره $F_۱, \cdots, F_n$ در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $C : [۰, ۱]^n \to [۰, ۱]$ و $\hat{C} : [۰, ۱]^n \to [۰, ۱]$ چنان موجود باشند که

$$F(x_۱, \cdots, x_n) = C(F(x_۱), \cdots, F(x_n)),$$
$$\bar{F}(x_۱, \cdots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}(x_۱), \cdots, \bar{F}(x_n)),$$

آنگاه $C(u_۱, \cdots, u_n)$ و $\hat{C}(u_۱, \cdots, u_n)$ به ترتیب تابع مفصل و تابع بقای مفصل $\mathbf{X}$ نامیده می‌شوند.

به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان مفصل ارشمیدسی در زمینه‌های مختلف، بسیاری از خواص این نوع مفصل در متون و مقالات آماری مورد بررسی قرار گرفته است (نلسن، ۲۰۰۶). دو دلیل از مهمترین دلایل استفاده زیاد از این نوع تابع مفصل ۱) سادگی ساخت این کلاس و اعضای آن ۲) شامل شدن بسیاری از مفصل‌های معروف مانند کلایتون، علی-میکائیل-حق و غیره، است.

تعریف ۴. برای تابع نزولی پیوسته $\psi : [۰, \infty) \to [۰, ۱]$ با $\psi(۰) = ۱$، $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = ۰$، فرض کنید $\psi = \phi^{-۱}$ بیانگر معکوس از راست پیوسته باشد. تابع

$$C_\psi(u_۱, \cdots, u_n) = \psi(\phi(u_۱) + \cdots + \phi(u_n)), \qquad u_i \in [۰, ۱], \;\; i = ۱, \cdots, n,$$

را مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ψ نامند هرگاه اولاً

$$(-۱)^k \frac{d^k}{dx^k}\psi(x) > ۰, \qquad\qquad k = ۰, \cdots, n-۲,$$

و ثانیاً $(-۱)^{n-۲}\frac{d^{n-۲}}{dx^{n-۲}}\psi(x)$ تابعی نزولی و محدب باشد.

۳ نتایج اصلی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دور افتاده، از لحاظ ترتیب نرخ خطر انجام شده است. همچنین تحت شرایطی مشخص روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی میان این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های وابسته مورد بحث قرار گرفته است

قضیه ۱. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۱ x)\mathbf{1}_p, \bar{F}(\lambda x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند و $Y_۱, \cdots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_۲ x)\mathbf{1}_p, \bar{F}(\lambda x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ و $p, q \geq ۱$ است. اگر $\lambda_۲ \geq \lambda_۱$ و $tr(t)$ صعودی باشد آنگاه $X_{۲:n} \geq_{hr} Y_{۲:n}$.

برهان: تابع بقای سیستم‌های $(n-۱)$ از n به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{X_{۲:n}}(x) &= p\,\bar{F}^{p-۱}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^q(\lambda_۲ x) + q\,\bar{F}^p(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q-۱}(\lambda_۲ x) \\
&- (n-۱)\,\bar{F}^p(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^q(\lambda_۲ x), \qquad\qquad x > ۰, \\
\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) &= p\,\bar{F}^{p-۱}(\lambda_۲ x)\,\bar{F}^q(\lambda x) + q\,\bar{F}^p(\lambda_۲ x)\,\bar{F}^{q-۱}(\lambda x) \\
&- (n-۱)\,\bar{F}^p(\lambda_۲ x)\,\bar{F}^q(\lambda x) \qquad\qquad x > ۰.
\end{aligned}$$

توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$\begin{aligned} r_{X_{2:n}}(x) &= \frac{\partial\{-\ln(\bar{F}_{X_{2:n}}(x))\}}{\partial x} \\ &= \frac{\frac{pJ_1(x)}{\bar{F}(\lambda_1 x)}+\frac{qJ_2(x)}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)J(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_1 x)}+\frac{q}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)} \end{aligned}$$

که در آن $J_1(x)=(p-1)\lambda_1 r(\lambda_1 x)+q\lambda r(\lambda x)$، $J_2(x)=p\lambda_1 r(\lambda_1 x)+(q-1)\lambda r(\lambda x)$ و $J(x)=p\lambda_1 r(\lambda_1 x)+q\lambda r(\lambda x)$ و $r(x)=\frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ است. همچنین

$$\begin{aligned} r_{Y_{2:n}}(x) &= \frac{\partial\{-\ln(\bar{F}_{Y_{2:n}}(x))\}}{\partial x} \\ &= \frac{\frac{pL_1(x)}{\bar{F}(\lambda_2 x)}+\frac{qL_2(x)}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)L(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_2 x)}+\frac{q}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)} \end{aligned}$$

که در آن $L_1(x)=(p-1)\lambda_2 r(\lambda_2 x)+q\lambda r(\lambda x)$، $L_2(x)=p\lambda_2 r(\lambda_2 x)+(q-1)\lambda r(\lambda x)$ و $L(x)=p\lambda_2 r(\lambda_2 x)+q\lambda r(\lambda x)$ است. برای اثبات $X_{2:n}\geq_{hr} Y_{2:n}$ باید نشان داده شود $r_{X_{2:n}}(x)\leq r_{Y_{2:n}}(x)$ یا

$$A:=\frac{\frac{pJ_1(x)}{\bar{F}(\lambda_1 x)}+\frac{qJ_2(x)}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)J(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_1 x)}+\frac{q}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)} \quad\leq\quad \frac{\frac{pL_1(x)}{\bar{F}(\lambda_2 x)}+\frac{qL_2(x)}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)L(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_2 x)}+\frac{q}{\bar{F}(\lambda x)}-(n-1)}:=B$$

یا بطور معادل

$$\begin{aligned}
A &= \Big\{p\big[(p-۱)t_۱r(t_۱)+qtr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t_۱)}+q\big[pt_۱r(t_۱)+(q-۱)tr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t)}\\
&- (n-۱)\big[pt_۱r(t_۱)+qtr(t)\big]\Big\}\big(\frac{p}{\bar{F}(t_۱)}+\frac{q}{\bar{F}(t)}-(n-۱)\big)^{-۱}\\
&\leq \Big\{p\big[(p-۱)t_۲r(t_۲)+qtr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t_۲)}+q\big[pt_۲r(t_۲)+(q-۱)tr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t)}\\
&- (n-۱)\big[pt_۲r(t_۲)+qtr(t)\big]\Big\}\big(\frac{p}{\bar{F}(t_۲)}+\frac{q}{\bar{F}(t)}-(n-۱)\big)^{-۱}\\
&= B,
\end{aligned}$$

که در آن $t_۱=\lambda_۱x$، $t_۲=\lambda_۲x$ و $t=\lambda x$ است. قرار دهید

$$\begin{aligned}
N_۱ &= \Big\{p\big[(p-۱)t_۱r(t_۱)+qtr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t_۱)}+q\big[pt_۱r(t_۱)+(q-۱)tr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t)}\\
&- (n-۱)\big[pt_۱r(t_۱)+qtr(t)\big]\Big\}\big(\frac{p}{\bar{F}(t_۱)}+\frac{q}{\bar{F}(t)}-(n-۱)\big)^{-۱},\\
N_۲ &= \Big\{p\big[(p-۱)t_۱r(t_۱)+qtr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t_۲)}+q\big[pt_۱r(t_۱)+(q-۱)tr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t)}\\
&- (n-۱)\big[pt_۲r(t_۲)+qtr(t)\big]\Big\}\big(\frac{p}{\bar{F}(t_۲)}+\frac{q}{\bar{F}(t)}-(n-۱)\big)^{-۱},\\
N_۳ &= \Big\{p\big[(p-۱)t_۲r(t_۲)+qtr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t_۲)}+q\big[pt_۲r(t_۲)+(q-۱)tr(t)\big]\frac{۱}{\bar{F}(t)}\\
&- (n-۱)\big[pt_۲r(t_۲)+qtr(t)\big]\Big\}\big(\frac{p}{\bar{F}(t_۲)}+\frac{q}{\bar{F}(t)}-(n-۱)\big)^{-۱}.
\end{aligned}$$

بنابراین کافی است نشان داده شود $N_1 \leq N_3$. اگر $\lambda_1 \geq \lambda_2$ و $tr(t)$ صعودی باشد آنگاه

$$\begin{aligned} N_3 - N_2 &\overset{sgn}{=} p\Big(t_2 r(t_2) - t_1 r(t_1)\Big)\Big[(p-1)\frac{1}{1-F^{\lambda_2}(x)} + q\frac{1}{1-F^{\lambda}(x)} \\ &- (n-1)\Big] \\ &\geq p\big(t_2 r(t_2) - t_1 r(t_1)\big)\big[(p+q-1-(n-1)\big] \\ &= 0, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $N_2 \leq N_3$. فرض کنید

$$\begin{aligned} a &= q\big[pt_1 r(t_1) + (q-1)tr(t)\big]\frac{1}{\bar{F}(t)} - (n-1)\big[pt_2 r(t_2) + qtr(t)\big], \\ b &= p\big[(p-1)t_1 r(t_1) + qtr(t)\big], \\ c &= \frac{q}{\bar{F}(t)} - (n-1) \qquad \text{و} \qquad d = p. \end{aligned}$$

اگر $\lambda_1 \geq \lambda$ باشد آنگاه $bc - ad = pq\big[tr(t) - t_1 r(t_1)\big]\frac{1}{\bar{F}(t)} + p(n-1)t_1 r(t_1) \geq 0$. همچنین

$$N_2 - N_1 = \Big(\frac{b\frac{1}{\bar{F}(t_2)} + a}{d\frac{1}{\bar{F}(t_2)} + c}\Big) - \Big(\frac{b\frac{1}{\bar{F}(t_1)} + a}{d\frac{1}{\bar{F}(t_1)} + c}\Big) \overset{sgn}{=} (bc - ad)\Big(\frac{1}{\bar{F}(t_2)} - \frac{1}{\bar{F}(t_1)}\Big) \geq 0.$$

که نشان می‌دهد $N_1 \leq N_2$. بنابراین $N_1 \leq N_3$ و نتیجه لازم حاصل می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_1 x)\mathbf{1}_p, \bar{F}(\lambda_2 x)\mathbf{1}_q)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p + q = n$ است. همچنین فرض کنید $Y_1, \cdots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل مقیاس با چندین دورافتاده با توابع بقای $(\bar{F}(\lambda_1 x)\mathbf{1}_p^*, \bar{F}(\lambda_2 x)\mathbf{1}_q^*)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p^* + q^* = n$ و $p^*, q^* \geq 1$ است. اگر $\lambda_1 \geq \lambda_2$ و $tr(t)$ صعودی باشد آنگاه تحت $p^* \leq p \leq q \leq q^*$ داریم:

$$(p, q) \preceq_w (p^*, q^*) \Longrightarrow X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}.$$

برهان: تابع بقای سیستم‌های $(n-۱)$ از n به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{X_{۲:n}}(x) &= p\,\bar{F}^{p-۱}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q}(\lambda_۲ x) + q\,\bar{F}^{p}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q-۱}(\lambda_۲ x)\\
&- (n-۱)\,\bar{F}^{p}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q}(\lambda_۲ x),\\
\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) &= p^*\,\bar{F}^{p^*-۱}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q^*}(\lambda_۲ x) + q^*\,\bar{F}^{p^*}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q^*-۱}(\lambda_۲ x)\\
&- (n^*-۱)\,\bar{F}^{p^*}(\lambda_۱ x)\,\bar{F}^{q^*}(\lambda_۲ x),
\end{aligned}$$

که در آن $p+q=n$ و $p^*+q^*=n^*$ است. توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$\begin{aligned}
r_{X_{۲:n}}(x) &= \frac{\partial\{-\ln(\bar{F}_{X_{۲:n}}(x))\}}{\partial x}\\
&= \frac{\frac{pT_۱(x)}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{qT_۲(x)}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)T(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{q}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)}
\end{aligned}$$

که در آن $T_۱(x) = (p-۱)\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + q\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$، $T_۲(x) = p\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + (q-۱)\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$، $T(x) = p\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + q\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$ و $r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$ است. همچنین

$$\begin{aligned}
r_{Y_{۲:n}}(x) &= \frac{\partial\{-\ln(\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x))\}}{\partial x}\\
&= \frac{\frac{pT^*_۱(x)}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{qT^*_۲(x)}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)T^*(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{q}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)}
\end{aligned}$$

که $T^*_۱(x) = (p^*-۱)\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + q^*\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$، $T^*_۲(x) = p^*\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + (q^*-۱)\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$ و $T^*(x) = p^*\lambda_۱ r(\lambda_۱ x) + q^*\lambda_۲ r(\lambda_۲ x)$ است. برای اثبات $X_{۲:n} \geq_{hr} Y_{۲:n}$، باید نشان داده شود $r_{X_{۲:n}}(x) \leq r_{Y_{۲:n}}(x)$ یا

$$\frac{\frac{pT_۱(x)}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{qT_۲(x)}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)T(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{q}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)} \leq \frac{\frac{pT^*_۱(x)}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{qT^*_۲(x)}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)T^*(x)}{\frac{p}{\bar{F}(\lambda_۱ x)} + \frac{q}{\bar{F}(\lambda_۲ x)} - (n-۱)}$$

یا به طور معادل

$$\frac{\frac{pT_{1}(x)}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{qT_{2}(x)}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)T(x)}{\frac{p}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{q}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)} \leq \frac{\frac{pT^{*}_{1}}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{qT^{*}_{2}(x)}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)T^{*}(x)}{\frac{p}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{q}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)}.$$

قرار دهید $a_i = t_i r(t_i)$، $b_i = \frac{1}{\bar{F}(t_i)}$ و $c_{ij} = a_i b_j$، $i, j = 1, 2$. همچنین قرار دهید

$$\begin{aligned} g(p,q) &= \frac{\frac{pT_{1}(x)}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{qT_{2}(x)}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)T(x)}{\frac{p}{\bar{F}(t_{1})}+\frac{q}{\bar{F}(t_{2})}-(n-1)} \\ &= \frac{p(p-1)c_{11}+pqc_{21}+pqc_{12}+q(q-1)c_{22}-(n-1)(pa_{1}+qa_{2})}{pb_{1}+qb_{2}-(n-1)}. \end{aligned}$$

فرض کنید $\lambda_2 \geq \lambda_1$ و $tr(t)$ صعودی باشد. بنابراین کافی است تحت فرضیات $p^* \leq p \leq q \leq q^*$ و $(p^*, q^*) \preceq_w (p, q)$، نشان داده شود $g(p,q) \leq g(p^*, q^*)$. مشتق $g(p,q)$ نسبت به p عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p,q)}{\partial p} &\overset{sgn}{=} \big[(2p-1)c_{11}+q(c_{21}+c_{12})-(n-1)a_{1}-pa_{1}-qa_{2}\big] \\ &\times \big[pb_{1}+qb_{2}-(n-1)\big]-\big[p(p-1)c_{11}+pqc_{21}+pqc_{12} \\ &+ q(q-1)c_{22}-(n-1)(pa_{1}+qa_{2})\big]\times(b_{1}-1) \\ &= a_{1}\big[pb_{1}+qb_{2}-(n-1)\big]\times\big[(p-1)b_{1}+qb_{2}-(n-1)\big] \\ &+ (pc_{11}+qc_{22})(b_{1}-1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

بطور مشابه، مشتق $g(p,q)$ نسبت به q عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(p,q)}{\partial q} &\overset{sgn}{=} a_{2}\big[pb_{1}+qb_{2}-(n-1)\big]\times\big[pb_{1}+(q-1)b_{2}-(n-1)\big] \\ &\quad +(pc_{11}+qc_{22})(b_{2}-1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
C &:= \frac{\partial g(p,q)}{\partial p} - \frac{\partial g(p,q)}{\partial q} \\
&\overset{sgn}{=} \big[pc_{21} + (q-1)c_{22} - (p-1)c_{11} - qc_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)\big] \\
&\times \big[pb_1 + qb_2 - (n-1)\big] + (pc_{11} + qc_{22})(b_2 - b_1) \\
&\geq \big[pc_{21} + (q-1)c_{22} - (p-1)c_{11} - qc_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)\big] \\
&\times \big[pb_1 + qb_2 - (n-1)\big] + (pb_1 + qb_2)(a_1b_2 - a_1b_1) \\
&= \big[pc_{21} + (q-1)c_{22} - pc_{11} - (q-1)c_{12} - (n-1)(a_2 - a_1)\big] \\
&\times \big[pb_1 + qb_2 - (n-1)\big] + (n-1)(c_{12} - c_{11}) \\
&\geq (a_2 - a_1)\big[pb_1 + (q-1)b_2 - (n-1)\big] + (n-1)(c_{12} - c_{11}) \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

که در آن دو نابرای آخر، براساس $0 \leq a_1 \leq a_2$ و $1 \leq b_1 \leq b_2$ است. بنابراین

$$\frac{\partial g(p,q)}{\partial p} \geq \frac{\partial g(p,q)}{\partial q} \geq 0.$$

اکنون نتیجه لازم با استفاده از لم ۱ حاصل می‌شود.

نکته‌ای که باید متذکر گردید این است که شرط صعودی بودن $tr(t)$ در قضایای ۱ و ۲ برای بسیاری از توزیع‌های آماری قابل بررسی است. یکی از این توزیع‌ها، توزیع گامای تعمیم‌یافته است. متغیر تصادفی X دارای توزیع گامای تعمیم‌یافته با پارامترهای شکل $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ و پارامتر مقیاس $\lambda > 0$ است ($X \sim GG(\alpha,\beta,\lambda)$) هرگاه دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\,(\lambda\,x)^{\alpha\beta-1}\,e^{-(\lambda x)^{\beta}}, \qquad x > 0,$$

باشد، که در آن $\Gamma(\cdot)$ بیانگر تابع گامای ناقص است. این توزیع شامل توزیع‌های شناخته شده‌ای مانند نمایی ($\alpha = \beta = 1$)، وایبول ($\alpha = \beta$) و گاما ($\beta = 1$) است. خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان

دادند اگر $r(t)$ بیانگر تابع نرخ خطر توزیع $GG(\alpha, \beta, ۱)$ باشد آنگاه برای $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$، $t\,r(t)$ تابعی صعودی در t است.

قضیه ۳. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ متغیرهای تصادفی از مدل مقیاس باشند که در آن $X_i \sim F(\lambda_i x)$ و از مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ψ تبعیت کنند. همچنین فرض کنید $Y_۱, \cdots, Y_n$ یک مجموعه دیگر از متغیرهای تصادفی از مدل مقیاس باشند که در آن $Y_i \sim F(\mu_i x)$ و از مفصل ارشمیدسی با تابع مولد ψ تبعیت کنند $(i = ۱, \cdots, n)$. تحت تابع مفصل ارشمیدسی مشترک، اگر ψ لگ-مقعر و $r(x)$ تابعی نزولی باشد در این صورت

$$(\mu_۱, \cdots, \mu_n) \overset{w}{\preceq} (\lambda_۱, \cdots, \lambda_n) \Longrightarrow X_{۲:n} \geq_{st} Y_{۲:n}.$$

برهان: توابع بقا $X_{۲:n}$ و $Y_{۲:n}$ به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_{۲:n}}(x) &= \sum_{i=۱}^{n} \psi\big(\sum_{j\neq i} \phi\big(\bar{F}(\lambda_j x)\big)\big) - (n-۱)\psi\big(\sum_{i=۱}^{n} \phi\big(\bar{F}(\lambda_j x)\big)\big),\\ \bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) &= \sum_{i=۱}^{n} \psi\big(\sum_{j\neq i} \phi\big(\bar{F}(\mu_j x)\big)\big) - (n-۱)\psi\big(\sum_{i=۱}^{n} \phi\big(\bar{F}(\mu_j x)\big)\big).\end{aligned}$$

برای رسیدن به نتیجه مطلوب، باید نشان داده شود $\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) \leq \bar{F}_{X_{۲:n}}(x)$ است. با توجه به لم ۱ کافی است اثبات شود $\bar{F}_{X_{۲:n}}(x)$ تابعی نزولی در λ_k و شور-محدب در $(\lambda_۱, \cdots, \lambda_n)$ است. مشتق از $\bar{F}_{X_{۲:n}}(x)$ نسبت به λ_k، عبارت است از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{F}_{X_{۲:n}}(x)}{\partial \lambda_k} = \quad & \Big[(n-۱)\psi'\big(\sum_{i=۱}^{n} \phi\big(\bar{F}(\lambda_i x)\big)\big) - \sum_{i\neq k} \psi'\big(\sum_{j\neq i} \phi\big(\bar{F}(\lambda_j x)\big)\big)\Big]\\ & \times x r(\lambda_k x) \frac{\psi\big(\phi\big(\bar{F}(\lambda_k x)\big)\big)}{\psi'\big(\phi\big(\bar{F}(\lambda_k x)\big)\big)}. \qquad (۱)\end{aligned}$$

چون $\psi'(x)(\leq ۰)$ روی x و $\phi\big(\bar{F}(\lambda_k x)\big)$ روی λ_k، توابعی صعودی هستند و $\phi(x) \in [۰, ۱]$ است در نتیجه

$$(n-۱)\psi'\big(\sum_{i=۱}^{n} \phi\big(\bar{F}(\lambda_i x)\big)\big) - \sum_{i\neq k} \psi'\big(\sum_{j\neq i} \phi\big(\bar{F}(\lambda_j x)\big)\big)$$

روی λ_k نزولی و نامنفی است. از طرفی دیگر اگر ψ لگ-مقعر و $r(\lambda_k x)$ روی λ_k نزولی باشد، درنتیجه (۲) نامثبت است، به عبارت دیگر $\bar{F}_{X_{۲:n}}(x)$ روی λ_k نزولی است. لذا برای $k \neq \ell$،

$$(\lambda_k - \lambda_\ell)\Big(\frac{\partial \bar{F}_{X_{۲:n}}(x)}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial \bar{F}_{X_{۲:n}}(x)}{\partial \lambda_\ell}\Big) \geq ۰,$$

که تائیدی بر اثبات قضیه است.

تذکر ۱. نکته‌ای که لازم است توجه شود این است که شرط لوگ-مقعر بودن در قضیه ۳ کاملاً کلی است و می‌توان این شرط در خانواده مفصل‌های ارشمیدسی بررسی کرد. برای مثال، مفصل گامبل-هوگارد با تابع مولد $\psi(t) = e^{۱-(۱+t)^\theta}$ را برای $\theta \geq ۱$ در نظر بگیرید. واضح است $\log \psi(t) = ۱ - (۱+t)^\theta$ تابعی مقعر برحسب $t \in [۰, ۱]$ است. همچنین خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند برای $\beta \geq ۱$ و $\alpha\beta \leq ۱$ تابع نرخ خطر توزیع گامای تعمیم‌یافته، نزولی است.

بحث و نتیجه‌گیری

سیستم‌های $(n-۱)$ از n، به طور معمول در بسیاری از کاربردهای روزمره در ساختارهای قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. سیستم‌های $(n-۱)$ از n، به طور خاص یک ویژگی طراحی است که در صورت بروز یک خرابی، سیستم به گونه‌ای پاسخ خواهد داد که آسیبی به آن وارد نشود. سیستم ترمز در قطار، یک نمونه خوب از یک سیستم $(n-۱)$ از n، در برابر یک خرابی است که در آن ترمزها با فشار هوا در وضعیت خاموش نگه داشته می‌شوند و در صورتی که ترمز بریده شود یا واگن جدا شود، فشار هوا از بین می‌رود و ترمزها توسط یک مخزن هوای محلی عمل می‌کنند. نمونه دیگری از سیستم‌های $(n-۱)$ از n، آسانسوری است که در آن ترمزها توسط تنش از روی لنت‌های ترمز، نگه داشته می‌شوند و در صورت از دست رفتن تنش، ترمزها روی ریل‌های شافت، چفت می‌شوند و از سقوط آسانسور جلوگیری می‌کنند.

در این مقاله، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n مورد بحث قرار گرفته است. تحت شرایطی روی پارامترهای مقیاس و بیشاندن ضعیف از پایین میان بردار اندازه نمونه‌ها، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، اثبات شده است. همچنین تحت شرایطی مشخص روی مفصل ارشمیدسی و پارامترها، ترتیب تصادفی معمولی میان این‌گونه سیستم‌ها با مولفه‌های وابسته مورد بحث قرار گرفته است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران محترم و ویراستار مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند. نویسنده اول بابت حمایت مالی دانشگاه زابل، تشکر و قدردانی می‌نماید. شماره گرنت ۳۳۸۹ $- UOZ - GR$.

مراجع

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، **۱۴**، ۳۳۵–۳۵۰.

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۴۰۰)، مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، پذیرفته شده برای چاپ

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۱۸۹–۲۰۶.

Amini-Seresht, E., Qiao, J., Zhang, Y. and Zhao, P. (2016), On the Skewness of Order Statistics in Multiple-outlier PHR Models, *Metrika*, **79**, 817-836.

Balakrishnan, N., Haidari, A. and Barmalzan, G. (2015), Improved Ordering Results for Fail-Safe Systems with Exponential Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**, 2010-2023.

Balakrishnan, N. and Lai, C-D. (2009), *Continuous Bivariate Distributions*, Second edition, Springer, New York.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1996), Mathematical Theory of Reliability, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia.

Cai, X., Zhang, Y. and Zhao, P. (2017), Hazard Rate Ordering of the Second Order Statistics from Multiple-outlier PHR Samples, *Statistics*, **51**, 615-626.

Khaledi, B., Farsinezhad, S. and Kochar, S. C. (2011), Stochastic Comparisons of Order Statistics in the Scale Model, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **141**, 276-286.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007), *Life Distributions*, Springer, New York.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York.

Müller, A., Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* John Wiley & Sons, New York.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas.* Springer, New York.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders.* Springer, New York.

Zhang, Y., Amini-Seresht, E. and Zhao, P. (2019), On Fail-Safe Systems under Random Shocks. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **35**, 591-602.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2012), Stochastic Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Exponential Models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 159-182.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2015), Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Gamma Models, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **17**, 617-645.

Journal of Statistical Sciences, Autumn and Winter, 2021
Vol. 15, No. 2, pp 427-442
DOI: 10.29252/jss.15.2.427

Some Stochastic Orderings Among $(n-1)$–out–of–n Systems from Scale Components

Barmalzan، G.[1]**، Hosseinzadeh، A.**[2] **and Amini–Seresht، E.**[3]
[1]Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran
[2]Department of Mathematics, University of Zabol, Zabol, Iran
[3]Department of Statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

Abstract: This paper discusses the hazard rate order of the fail-safe systems arising from two sets of independent multiple-outlier scale distributed components. Under certain conditions on scale parameters in the scale model and the submajorization order between the sample size vectors, the hazard rate ordering between the corresponding fail-safe systems from multiple-outlier scale random variables is established. Under certain conditions on the Archimedean copula and scale parameters, we also discuss the usual stochastic order of these systems with dependent components.

Keywords: Hazard Rate Ordering; Usual Stochastic Ordering; Multiple-Outlier Scale Model; Submajorization Order; $(n-1)$-out-of-n Systems.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.